АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ПУЛАТОВА Манзура

ТЕОРИЯ РЯДОВ И ЕЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

07.00.10 - история науки и техники

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Бухарском технологическом институте, Институте математики АН Украины.

Научный руководитель: член-корреспондент АН Украины,
доктор технических наук, профессор
А.Н. БОГОЛЮБОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор А.Ю. ЛУЧКА
кандидат физико-математических
наук, доцент В.М. УРЬЯНСКИЙ

Ведущая организация: Центр исследований научно-технического потенциала и истории науки им.Г.М.Доброва АН Украины

Защита состоится "13" 10 1992 г.
в 15 на заседании специализированного Совета
Д 016.50.01 в Институте математики АН Украины по адресу:
252604 Киев, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "9" 09 1992 г.

Учёный секретарь
специализированного совета Д.В. ГУСАК

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Проблема становления и развития теории рядов, одного из важных методов математического анализа, неоднократно исследовались в историко-математической литературе. Историки математики достаточно подробно изучили как процесс развития этого направления математического анализа, так и вклад, который внесли в его становление отдельные ученые. Всё же некоторые вопросы истории теории рядов следует пополнить и переосмыслить. Это относится, во-первых, к некоторым методам, введенным Эйлером в теорию рядов, к развитию эйлеровских методов в творчестве ряда математиков и, наконец, к вопросу о тех первопричинах, которые побудили ученых разрабатывать это направление математики; в значительной степени теория рядов развивалась в качестве аппарата, нужного для решения прикладных задач. Естественно, что зачастую проблемы и методы теории рядов рассматривались и решались как чисто математические задачи, но всё-же, в эпоху становления этой теории и на определенных этапах её развития, побудительной причиной была практика: у Эйлера, - задачи механики, у Фурье,- проблема теплопроводности, у Буля, - задачи символического исчисления, у Чебышева, - задача синтеза механизмов.

История проблемы теории ярдов начинается ещё в античные времена и ряды появляются тогда в результате постановки некоторых задач практики. Периодически ряды появляются и в творчестве арабоязычных учёных, в творчестве учёных Западной Европы XIII-ХУIвв. и лишь в последней четверти семнадцатого века, в эпоху создания математического анализа, ряды возникают как один из способов решения математических задач, связанных с изучением непрерывных процессов. Так они появляются у создателей математического анализа, - у Ньютона и Лейбница, у братьев Бернулли, их учеников и последователей.

Развитие математики в ХУIII веке характеризуется практической направленностью: математические методы разрабатываются в основном в качестве аппарата для решения конкретных задач, главным образом механики: механика, в сущности, была единственной отраслью физики, которая для своего развития требовала математических методов.

На рубеже ХУIII и XIX вв. начинает быстро развиваться математическая физика, основы которой были заложены ещё Эйлером. Включение естественных наук в сферу математики повлекло за собой дальнейшее развитие математических методов и становление новых разделов и направлений математики. Так, в трудах Фурье развивается теория тригонометрических рядов. Позже, попытки создания символических методов повышают интерес к этой теории: в частности, над её развитием работает Буль. В конце века П.Л.Чебышев, решал сложную техническую задачу и, одновременно, работая над созданием теории приближения функций полиномами, наименее уклоняющимися от нуля, подходит к решению этой сложной проблемы двумя путями, - путём эксперимента и путём теоретическим, при помощи теории рядов. Как известно, он обосновал существенную необходимость тесной связи и взаимодействия теории и практики.

Ученики и последователи Чебышева продолжали развивать его научное наследие. Теория рядов, как важный раздел математического анализа, продолжала развиваться и в XX веке, причём, зачастую, в результате потребностей задач, поставленных физикой и техникой. Таким образом, тема диссертации, сущность которой является развитием некоторых идей Эйлера в этом направлении и выявлением практических корней теории, является актуальной.

<u>Основные задачи исследования</u>.

I. Собрать воедино методы и приёмы,применявшиеся Эйлером для суммирования и преобразования рядов.

2. Выяснить историю одного из забытых методов Эйлера,-метода суммирования рядов с помощью дифференциальных уравнений. Показать,как Буль пришёл к тому же методу исходя из работ по разработке символических методов.

3. Рассмотреть творчество П.Л.Чебышева по теории рядов.

4. Рассмотреть обобщение А.А.Марковым одного приёма Эйлера,связанного с преобразованием рядов методом конечных разностей.

5. Показать,что потребности механики,физики и техники являлись важной первопричиной создания и разработки теории рядов.

Научная новизна.

I. Выяснены некоторые методы Эйлера в области теории рядов и их дальнейшее развитие в творчестве математиков XIX-XX вв.

2. Исследованы основы развития теории рядов в XVIII веке. Показано,что основной "движущей силой" исследований в этом направлении была механика.

3. Показано,что дальнейшее развитие теории рядов определялось в значительной степени потребностями естественных наук и техники.

4. Показано,что к своей теории приближения П.Л.Чебышев пришёл не только экспериментальным путём,но и в результате теоретического анализа,при помощи теории рядов.

Практическая ценность. Результаты диссертационного исследования помогают обосновать основные положения социальной истории математики о взаимообусловленности и взаимозависимости исследований из области математики и из области иных направлений человеческой деятельности,в частности,из области естествознания и техники. Кроме того,они привлекают внимание исследователей к возможности продолжения и дальнейшего развития некоторых идей Эйлера и других классиков науки.

Апробация результатов работы. Основные положения диссертации и отдельные её результаты докладывались и обсуждались на научно-теоретических конференциях Бухарского технологического института (Бухара, 1983-87 гг.),на секции "История математики и механики" конференции Ленинградского отделения Института истории естествознания и техники АН СССР (Ленинград,1985 г.),на конференции "Актуальные проблемы преподавания математического анализа в вузах" (Ленинград, ЛГПИ им.Герцена,1985 г.), на Герценовских чтениях в ЛГПИ им.А.И.Герцена (Ленинград,1986 г.),на семинарах по истории математики и механики в Институте математики АН Украины (Киев: май 1991, октябрь 1991, март 1992 гг.)

Публикации. Основное содержание работы изложено в пяти опубликованных работах.

Объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав,заключения; содержит 120 страниц машинописного текста. В списке литературы указано 97 источников, в том числе 66 - на русском и 31 - на иностранных языках.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Введение посвящено описанию темы диссертации и доказательству её актуальности. Оно содержит также сведения о литературе вопроса и краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава "Становление теории рядов" содержит четыре параграфа. Первый параграф посвящен историческим предпосылкам становления теории рядов. Ряды появляются ещё в античные времена и их происхождение тесно связано с запросами практики. В дальнейшем,подобные идеи развиваются в арабоязычной и латинской математической литературе Средневековья,когда математика,в основном, обслуживала три группы профессий, - врачей,торговцев и строителей.

В годы научной революции рядами пользуются для представления некоторых чисел, в частности π и e.

Математическая теория рядов возникает у Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, а также, у их учеников и последователей в качестве аппарата для решения задач механики; в этом отношении важную роль сыграла теория колебаний, - первая из теорий математической физики по времени своего становления. Как показывает история науки в XVIII в. механика была неотделима от математики; впрочем творцами обоих наук были одни и те-же лица.

Важную роль в развитии теории рядов сыграл Л.Эйлер. В сущности он выполнил основную работу по созданию механики, заложил также основы для теоретического исследования физики, - для создания математического естествознания.

Второй параграф и посвящён теории рядов в прикладных исследованиях Эйлера. В научном наследии Эйлера эти исследования занимают четыре тома Полного собрания сочинений и, кроме того, Эйлер занимался теорией рядов во многих других сочинениях. Поэтому, в настоящей диссертации рассмотрены лишь некоторые из многих результатов великого математика.

Теорию рядов он применяет в задачах о колебании струны, о падении тел, об устойчивости колонн и в ряде других задач механики. Можно сказать, что постановка этих задач побудила Эйлера совершенствовать теорию рядов и находить её новые свойства. Впрочем, то-же самое можно сказать и о других учёных XVIII века.

Важное значение имела в творчестве Эйлера небесная механика. Следует отметить при этом, что в своих вычислениях Эйлер никогда не выписывал лишних членов, тщательно следил за точностью, но теория рядов ещё находилась в процессе становления и поэтому в его работах по небесной механике он пользовался лишь быстро сходящимися рядами.

В своих исследованиях по математическому анализу Эйлер рассматривает разложимость аналитических выражений в степенной ряд, как важный факт анализа. Он сам, а также и его современники, включая Лагранжа, считали, что любую функцию можно представить в виде степенного ряда, а следовательно, она должна иметь все свойства, вытекающие из такого представления. Это обстоятельство ярко проявилось в знаменитом споре о колебании струны, послужившим основой при становлении математической физики. Действительно, Эйлер и Даламбер разошлись в своём пояснении понятия "функции". Интересно, что тогда-же было найдено разложение функции в тригонометрический ряд, получившее позже, в трудах Фурье, чрезвычайно важное значение.

Третий параграф содержит сведения об одном методе Эйлера, относящемся к числу забытых или полузабытых. Этот метод суммирования рядов при помощи составления вспомогательного дифференциального уравнения, общее решение которого при определенных начальных условиях и значениях независимой переменной даёт сумму заданного ряда впервые был предложен Эйлером в 1739 г. Позже он неоднократно пользовался этим методом в своих исследованиях.

В качестве примера приводится ряд

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!\,(2n+2)}$$

для нахождения суммы которого Эйлер вводит функциональный ряд

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

и почленным дифференцированием последнего устанавливает, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y''-xy'-1=0$$

и начальным условиям $y=y'=0$ в результате, при $x=1$

получаем
$$S = \frac{\pi^2}{8}$$

В этом параграфе приводятся и разбираются ещё два примера.

Четвертый параграф посвящён искусственному приёму составления дифференциального уравнения. Этот метод был развит и несколько усовершенствован Серре.

<u>Вторая глава</u> "Различные методы суммирования и преобразования рядов у Эйлера" состоит из семи параграфов. Первый параграф посвящен исследованию вопроса о применении метода конечных разностей для суммирования рядов.

Эйлер пользовался методом конечных разностей для нахождения частичных сумм числовых рядов. Прежде всего он применяет этот метод для тех рядов, у которых конечные разности какого-либо порядка для последовательности членов постоянны. Такие ряды он называет рядами n-го порядка, где n - порядок тех конечных разностей, которые постоянны. В диссертации рассмотрены три случая применения этого метода.

I. С помощью конечных разностей Эйлер находит формулы общих членов ряда. В этом случае он применяет метод неполной индукции: последовательно рассматривает ряд первого порядка, ряд второго порядка и т.д. Затем, Эйлер обобщает результат и приходит к той формуле
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \Delta^k u_1$$
которая фактически является интерполяционной формулой Ньютона, из которой Тейлор получил свой ряд.

Зная общий член ряда, Эйлер ищет затем частичную сумму по формуле
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \Delta^{k-1} u_1$$

2. Другой способ нахождения частичных сумм сводится к обращению разностного дифференцирования.

3. Метод конечных разностей Эйлер применяет и для нахождения частных сумм рядов, члены которых представлены в виде произведения сомножителей, составляющих арифметическую прогрессию и для рядов с членами, обратными этим произведениям.

Второй параграф посвящён знаменитой формуле суммирования, выведенной Эйлером в 1741 году. Формула эта в конечном виде:

$$S_n = \int U_n\,dn + \alpha_1 U_n + \beta_1 \frac{dU_n}{dn} + \gamma_1 \frac{d^2U_n}{dn^2} + \dots$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ находятся по рекуррентным формулам.

Третий параграф содержит использование бесконечных произведений для нахождения сумм рядов. Полагая, что степенной ряд является обобщением многочлена высокой степени, то его можно представить как произведение разностей вида $1-\frac{x}{x_n}$, где x_n - корень, а множество сомножителей бесконечно:

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

Исходя из этого соотношения, Эйлер находит суммы многих рядов. Пользуясь бесконечными произведениями Эйлер одновременно применяет к ним логарифмирование и дифференцирование. Суммы многих рядов он находит через тригонометрические и показательные функции.

Четвертый параграф содержит некоторые специальные преобразования рядов. Здесь приводятся примеры того, как Эйлер использовал преобразования рядов для нахождения их сумм, а также для достижения его быстрой сходимости.

Пятый параграф посвящён воззрениям Эйлера на расходящиеся ряды. В теории расходящихся рядов Эйлер существенно опередил своих современников. Он широко пользовался неполной индукцией и гипотезами; в случае подтверждения гипотезы в достаточно большом числе случаев, он считал её законом. Поэтому он и с расходящимися рядами оперировал так, как и с обычными многочленами. Свои соображения о расходящихся рядах он систематизировал в отдельном мемуаре в 1746 году, в котором привёл ряд примеров, подтверждающих его теоретические предположения.

Шестой параграф посвящён анализу основного конечноразностного метода Эйлера. Он берёт степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и обозначает его сумму $S(x)$ вне зависимости от того, известна она или нет, сходится ли ряд или нет. После некоторых предположений и преобразований он приходит к формуле ряда

$$S = \frac{x}{1-x} a_1 + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a_1 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{k+1} \Delta^k a_1$$

сумма которого известна, если известна сумма исходного ряда.

Последний, седьмой параграф главы посвящён анализу функционального уравнения для ζ - функции. Пытаясь найти сумму ряда S_{2k+1} для случая, когда известна сумма S_{2k}, Эйлер в мемуаре 1749 года нашёл связь между суммами прямых и обратных степеней натурального ряда. При этом он рассматривает функцию

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s}$$

которую можно получить из функции $\zeta(s)$ путём её умножения на $(1-2^{1-s})$.

В своих работах, посвященных этой проблеме, Эйлер предвосхитил результаты Римана.

<u>Третья глава</u> "Различные методы суммирования и преобразования рядов у Эйлера" содержит четыре параграфа. Первый параграф - вводные замечания, посвящён некоторым вопросам развития математики в переходной период конца XVIII- начала XIX вв. В XVIII веке для развития математики основное значение имели потребности математического естествознания и, в первую очередь, механики. Так

происходило создание математического аппарата для решения конкретных задач и одновременно происходило его обобщение. В "переходной период" происходит быстрое развитие ряда направлений физики и техники, которые, в связи с этим, ставят новые требования к математике. Происходит расширение диапазона математических исследований, возникают новые научные направления. В отношении дальнейшего развития теории рядов важную роль сыграли исследования Фурье, которые в диссертации не рассматриваются.

Второй параграф посвящён суммированию рядов методом Буля и усилению этого метода. Приводятся некоторые биографические данные о Буле и его научном творчестве. Отмечается, что Буль внёс существенный вклад в создание символических методов, развивавшихся английской математической школой и завершенное созданием операционного исчисления Хевисайдом. Буль применил символические методы к решению проблем теории рядов.

В диссертации показывается, что соответствующий метод Буля можно усилить.

Третий параграф главы содержит применение операционного исчисления для вывода формул суммирования. В качестве примера приводится вывод формулы суммирования Плана и Эйлера-Маклорена.

Четвертый параграф посвящён творчеству П.Л.Чебышева в области теории рядов. На протяжении всей своей жизни Чебышев интересовался проблемой создания механизмов, которые могли бы воспроизвести наперёд заданное преобразование некоторого движения в иное, с иными параметрами. В качестве исходной проблемы Чебышев принял экспериментальное решение Уатта, который построил так называемый параллелограмм Уатта для преобразования поступательного движения поршня паровой машины во вращательное. Чебышев обобщил эту задачу и начал своё исследование экспериментальным методом. При этом он пришёл к выводу, что приближённое решение может быть более точным, чем точное.

Таким образом, разрабатывая свою теорию приближения функции полиномами наименее уклоняющимися от нуля, Чебышев ищет такие механизмы, которые могут на некотором участке пути выполнить требуемое движение. Одновременно он производит аналитическое исследование и изучает ряды, как тип многочлена с помощью которого можно придти к решению поставленной задачи. Путь, которым шёл Чебышев в этом направлении, прослеживается по высказываниям самого учёного и по последовательности его работ в области теории рядов.

Исследования Чебышева были продолжены и развиты его учениками и последователями.

<u>Четвертая глава</u> "О методе преобразования рядов академика А.А.Маркова" содержит три параграфа.

Первый параграф посвящён анализу сущности метода Маркова и его связи с методом Эйлера. Ученики Чебышева и ученики его учеников оказали существенное влияние на становление и развитие математики и математических знаний в ряде республик бывшего Советского Союза. В частности, основоположник узбекской математической школы В.И.Романовский был учеником А.А.Маркова, ближайшего ученика П.Л.Чебышева.

Математическое творчество А.А.Маркова было весьма разносторонним и, что очень важно, большинство полученных им результатов нашли себе практическое применение. Исследуя ряд вопросов математического анализа Марков обратил внимание на теорию рядов, причём и в этом направлении он остановился на вопросе, ценном с практической точки зрения. В 1890 году он развил метод преобразования медленно сходящихся рядов в ряды быстро сходящиеся. Разрабатывая эту проблему он нашёл преобразование, носящее его имя и нашедшее широкое применение. При помощи этого преобразования можно получить формулу Эйлера:

$$u(0)+u(1)\xi+u(2)\xi^2+\dots=\frac{u(0)}{1-\xi}+\frac{\xi\Delta u(0)}{(1-\xi)^2}+\dots$$

Второй параграф содержит анализ преобразования одного класса рядов. При этом исходный ряд преобразуется в ряд, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем равным Можно получить и более сходящийся ряд, однако вычислительная работа в этом случае оказывается существенно большей.

Параграф третий посвящён обоснованию формул преобразования. При этом используются результаты предыдущего параграфа.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

I. Теория рядов - как раздел математического анализа возникла и развивалась в качестве математического аппарата, необходимого для решения различных практических задач. Становление этой теории относится к периоду научной революции XVII века, когда создатели математического анализа Ньютон и Лейбниц обнаружили,что бесконечные ряды могут служить удобным средством при описании явлений, связанных с непрерывными процессами. На протяжении всего XVII века основным "потребителем" теории рядов остаётся механика, но к концу века и в начале XIX века теорией рядов начинают заниматься и пользоваться ими при исследованиях, посвященных задачам физики и техники. Естественно, что теория рядов являлась одновременно и исследовательской темой для математиков.

2. Важное значение для развития математической теории рядов имело творчество Эйлера. Разрабатывая математический аппарат для решения задач механики, Эйлер широко пользовался теорией рядов, которой посвятил не только ряд мемуаров, но также и отдельные главы в своих монографиях.

Однако не все исследования Эйлера в этом направлении получили развитие в трудах математиков, некоторые идеи и методы оказались полузабытыми или совсем забытыми. К этому числу относятся исследования Эйлера в области суммирования рядов с помощью дифференциальных уравнений, с помощью конечных разностей и некоторые специальные его методы.

3. Рассмотрено функциональное уравнение для дзета-функции. Показано, что Эйлер предвосхитил результаты Римана в этом направлении. Показано, что результат Эйлера можно получить также иным способом. Исследована история вопроса и показано в каком направлении развивались идеи Эйлера, высказанные им в этом направлении.

4. Исследован вклад Буля в область теории рядов, показано, что он независимо от Эйлера пришёл к подобным результатам. Показано, что в творчестве Буля обнаруживается взаимозависимость его исследований в области теории рядов и символических методов. Показано, что символическими методами можно пользоваться при выводе формул суммирования.

5. Исследовано творчество П.Л.Чебышева в области теории рядов. Показано, что при разработке своей теории приближения функций полиномами наименее уклоняющимися от нуля Чебышев шёл двумя путями, - путём эксперимента, развивая экспериментальный метод Уатта и аналитическим путём. При этом изучение рядов и их свойств, а также совершенствование этой теории явилось тем путём, которым Чебышев вводил многочлены в свою теорию.

Показано, что при развитии теоретического синтеза механизмов, основоположником которого был сам Чебышев, применил теорию рядов не только к исследованию шарнирных механизмов, но также и к ряду механизмов другого состава.

6. Изучено творчество А.А.Маркова в области теории рядов. Показано, что это направление в его творчестве имело важные практические применения. Показано, что развитый Марковым метод преоб-

разования ряда в иной ряд, сходящийся с большей скоростью. Этот метод Маркова можно развить далее и получить еще более быструю сходимость, однако вычислительная работа при этом возрастает.

Автор благодарит своего научного руководителя А.Н.Боголюбова за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Пулатова М.И. О методе Эйлера суммирования рядов с помощью дифференциальных уравнений. //Изд-во АН УзССР.-1983- № 2, С.13-19.

2. Пулатова М.И. Усиление метода суммирования рядов Дж. Буля. М.: ВИНИТИ, 20.05.83, № 3264-83. Деп. С. 1-6.

3. Пулатова М.И. Развитие метода преобразования рядов академика А.А.Маркова. М.: ВИНИТИ, 20.05.83, № 3265-83. Деп. С.1-14.

4. Пулатова М.И. Применение операционного исчисления для вывода формул суммирования. // Сборник "Актуальные вопросы истории и методики преподавания математического анализа". М.: НИИВШ, 16.02.89, № 36952. Деп. С. 214-221.

5. Пулатова М.И. Прикладное значение исследования П.Л.Чебышева в области теории рядов. // Сборник " Актуальные теоретические исследования, а также практические разработки в области физики, химиии и высшей математики." Изд-во ТашГТУ, 1991. С.3-12.

Подп.к печ.11.06.92.Формат 60x84/16.Бумага типографская №1.
Офс.печать.Усл.п.л.0,93.Уч.-изд.л. 0,8.Тираж 100 экз.
Заказ 165.Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601,Киев ГСП,ул.Репина,3