Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

РОЙТБЕРГ Інна Яківна

ГЛОБАЛЬНІ ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ"ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ.
ПРО ГЛАДКІСТЬ СЛАБКИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ.

01.01.02- диференціальні рівняння.

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Роботу виконано у відділі функціонального аналізу Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
НИЖНИК Л.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
МИХАЙЛЕЦЬ В.А.,

доктор фізико-математичних наук
ЕЙДЕЛЬМАН С.Д.

Ведуча організація: Інститут прикладної математики і механіки АН України

Захист відбудеться "19" січня 1993 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ 4, ГСП, вул. Репіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "10" листопада 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних
наук

ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Починаючи з 60-х років в теорії еліптичних граничних задач було досягнуто значного прогресу. Я.Б. Лопатинський і З.Я. Шапіро ввели поняття еліптичної граничної задачі. Потім в роботах Агмона, Дугліса, Ніренберга, М.С. Аграновича, Л.Р. Волевича, О.С. Диніна, Браудера, В.А. Солоннікова, Шехтера, Пітре було наведено різні еквівалентні означення еліптичності задачі як для одного рівняння, так і для загальних еліптичних систем (тобто систем, еліптичних за Дуглісом-Ніренбергом). Було також встановлено нетеровість еліптичних операторів в класах достатньо гладких функцій. Потім в роботах Ліонса, Мадженеса, Ю.М. Березанського, С.Г. Крейна, Я.А. Ройтберга та ін. було доведено теореми про повний набір ізоморфізмів, які знайшли чисельні застосування. Зокрема, в роботах Ю.М. Березанського, Я.А. Ройтберга та інших теореми про повний набір ізоморфізмів застосовуються для побудови та вивчення матриць Гріна еліптичних граничних задач. Іншим методом матриці Гріна було досліджено в роботах Ю.П.Красовського, В.А.Солоннікова.

Глобальні фундаментальні розв'язки еліптичних операторів широко застосовуються в математичній фізиці. Вони відіграють важливу роль і в сучасній теорії диференціальних рівнянь. Для еліптичних операторів другого порядку існування глобального фундаментального розв'язку (гфр) $\Phi(x,y)$ доведено Ю.І.Любичем. Для рівнянь порядку 2m існування гфр і нормального гфр досліджено Браудером і Я.А.Ройтбергом. Виявилось, що для існування гфр оператора $L(x,D)$ необхідна і достатня єдиність задачі Коші для формально спряженого рівняння $L^{+}(x,D)v=0$, а для існування нормального гфр необхідна і достатня єдиність задачі Коші як для рівняння $L^{+}(x,D)v=0$, так і для рівняння $L(x,D)u=0$.

Відкритими залишилися питання про існування і властивості гфр і нормального гфр для загальних еліптичних систем, питання введення і вивчення узагальнених гфр і нормальних гфр у випадку, коли немає єдиності відповідних задач Коші. Актуальною є також задача про вивчення відображення

$$f \longmapsto u = \int_{G} \Phi(x,y) f(y)\,dy \qquad (1)$$

у випадку, коли f - узагальнена функція; питання про можливість наближення розв'язків еліптичних рівнянь і систем лінійними комбінаціями фундаментальних розв'язків та їх похідних. Остання задача була поставлена Хаманном і розв'язана ним у випадку сталих коефіцієнтів виразу L, причому застосована ним методика істотно спирається на сталість коефіцієнтів. Детальне вивчення властивостей фундаментальних розв'язків дозволило розв'язати в даній роботі цю задачу у випадку змінних коефіцієнтів. Всі ці питання розглянуто в першому розділі дисертації.

В сучасній спектральній теорії виникає також необхідність вивчення функцій з області визначення оператора $\mathcal{L}$ - L_2-реалізації оператора l, породженого еліптичною граничною задачею для системи структури Дугліса - Ніренберга з однорідними граничними умовами. Цю задачу поставив М.С.Агранович; її розв'язано в другому розділі дисертації.

<u>Мета роботи.</u> а) побудувати і дослідити ГФР, нормальний ГФР, узагальнений ГФР, нормальний узагальнений ГФР як для одного рівняння, так і для загальних еліптичних систем; вивчити відображення (1) для випадку, коли f - узагальнені функції, і питання про можливість наближення розв'язків еліптичних граничних задач лінійними комбінаціями фундаментальних розв'язків та їх похідних; б) вивчити властивості регулярності функцій із області визначення оператора $\mathcal{L}$.

<u>Загальний метод дослідження</u> грунтується на теоремах про повний набір ізоморфізмів для загальних еліптичних граничних задач та на властивостях матриці Гріна таких задач.

<u>Наукова новизна.</u> Всі основні результати роботи є новими. Розвинена методика дозволила з єдиної точки зору побудувати і дослідити ГФР, нормальні ГФР, узагальнені та нормальні узагальнені ГФР як для випадку одного рівняння, так і для випадку загальних еліптичних систем. Вивчено також відображення (1) у випадку, коли f - узагальнена функція. Доведено, що лінійними комбінаціями ГФР та їх похідних можна наблизити розв'язки відповідної еліптичної граничної задачі.

Досліджено властивості регулярності функцій з області визначення оператора $\mathcal{L}$.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на семінарі з диференціальних рівнянь у частинних похідних при Інституті математики АН України, у Воронезьких зимових математичних школах (1989, 1990, 1991 рр), у Кримських осінніх математичних школах-симпозіумах (1990, 1992 рр).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 6 роботах, список яких наведено наприкінці автореферату.

Об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів, списку цитованої літератури, який складається з 47 назв. Робота викладена на 113 сторінках машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

В першому розділі систематично вивчаються гфр, нормальні гфр, узагальнені і нормальні узагальнені гфр для еліптичних рівнянь і систем. Він складається з семи параграфів.

В §1.1 сформульовано означення гфр, нормальних гфр та задача про їх вивчення.

Нехай $G \subset R^n$ - обмежена область з межею ∂G; $L = L(x,D)$ $(x \in \bar{G})$ - правильно еліптичний в $\bar{G}$ вираз порядку $2m$. Його коефіцієнти, а також границя ∂G вважаються для простоти нескінченно гладкими.

Функцію $\Phi(x,y)$ $(x,y \in G,\ x \neq y)$ називають гфр оператора L, якщо для кожного $f \in L_p(G)$ $(1<p<\infty)$ оператор (1) неперервно діє з $L_p(G)$ в соболевський простір $H^{2m,p}(G)$, і справедлива рівність $Lu = f$ в G.

Гфр $\Phi(x,y)$ називають нормальним гфр, якщо $\Phi^*(x,y) = \overline{\Phi(y,x)}$ (риска означає комплексне спряження) є гфр формально спряженого оператора $L^+ = L^+(x,D)$.

В §1.2 наведено основні факти еліптичної теорії для одного рівняння і деякі властивості функції Гріна $R(x,y)$. Тут же доведено, що $R^*(x,y) := \overline{R(y,x)}$ є функція Гріна формально спряженої задачі.

В §1.3 побудовано і вивчено гфр, узагальнені гфр, нормальні гфр, узагальнені нормальні гфр.

Нехай $G_1 \subset R^n$ – деякий окіл $\overline{G}$ з нескінченно гладкою межею ∂G_1, $L_1(x,D)$ – гладке продовження $L(x,D)$ на $\overline{G}_1$. Нехай

$$\mathfrak{N}_0^+ = \{v \in C^\infty(\overline{G}_1) : \mathrm{supp}\, v \subset \overline{G},\ L_1^+ v = 0\},$$

$$\mathfrak{N}_0 = \{u \in C^\infty(\overline{G}_1) : \mathrm{supp}\, u \subset \overline{G},\ L_1 u = 0\}.$$

Зрозуміло, що умова $\mathfrak{N}_0^+ = \{0\}$ ($\mathfrak{N}_0 = \{0\}$) еквівалентна єдиності задачі Коші в G для рівняння $L^+ v=0$ ($Lu=0$).

Теорема 1.3.1. Для існування гфр $\Phi(x,y)$ ($x,y \in G$, $x \neq y$) оператора $L(x,D)$ необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{N}_0^+ = \{0\}$. При цьому гфр $\Phi(x,y)$ є нескінченно гладким при $x \neq y$. При $x=y$ особливість $\Phi(x,y)$ така ж, як і у функції Гріна $R(x,y)$ задачі

$$L_1(x,D)u=f,\ D_\nu^{j-1} u\big|_{\partial G_1} =0 \ (j=1,\dots,m), \tag{2}$$

Теорема 1.3.3. Для існування нормального гфр $Q(x,y)$ ($x,y \in G$, $x \neq y$) оператора $L(x,D)$ необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{N}_0^+ = \mathfrak{N}_0 = \{0\}$. При цьому нормальне гфр $Q(x,y)$ є нескінченно гладким при $x \neq y$. При $x=y$ особливість $Q(x,y)$ така ж, як і у функції Гріна задачі (2).

Якщо $\mathfrak{N}_0^+ \neq \{0\}$, то для існування розв'язку рівняння $Lu=f$ необхідно, щоб $f \perp \mathfrak{N}_0^+$ (тобто, $(f,v)_G =0$ ($\forall v \in \mathfrak{N}_0^+$)). Тому природно функцію $\Phi(x,y)$ ($x,y \in G$, $x \neq y$) називати узагальненим гфр оператора $L(x,D)$, якщо для кожного $f \in L_p(G)$ оператор (1) неперервно діє з $L_p(G)$ в $H^{2m,p}(G)$, і, якщо $f \perp \mathfrak{N}_0^+$, то $Lu=f$ в G. Узагальнений гфр будемо називати нормальним узагальненим гфр, якщо $\Phi^*(x,y):=\overline{\Phi(y,x)}$ є узагальненим гфр оператора $L^+(x,D)$.

Теорема 1.3.2. Для оператора $L(x,D)$ існує узагальнений гфр $\Phi(x,y)$ ($x,y \in G$, $x \neq y$). Функція $\Phi(x,y)$ є нескінченно гладкою при $x \neq y$, при $x=y$ вона має таку ж особливість, як і функція Гріна $R(x,y)$ задачі (2).

Теорема 1.3.4. В області G існує узагальнений нормальний гфр $Q(x,y)$ ($x,y \in G$, $x \neq y$) оператора $L(x,D)$. При $x \neq y$ функція $Q(x,y)$ є нескінченно гладкою. Особливості $Q(x,y)$ при $x=y$ такі ж, як і у функції Гріна $R(x,y)$.

Детальне вивчення фундаментальних розв'язків дозволило вивчити відображення (1) у випадку, коли f – узагальнена функція. Це відображення істотно використовується для апроксимації розв'язків еліптичних граничних задач лінійними комбінаціями фундаментальних розв'язків та їх похідних.

Теорема 1.3.1'. Нехай $\mathfrak{N}_0^+ = (0)$, $s<0$. Тоді відображення

$$f \mapsto u = \int_G \Phi(x,y)f(y)dy \quad (f \in L_p(G),\ 1<p<\infty) \qquad (3)$$

неперервно діє з $H^{s,p}(G)$ відповідно у $H^{2m+s,p}(G)$, якщо $2m+s \geq 0$, і у $H'^{2m+s,p}(G)$, якщо $2m+s<0$ (тут $H'^{2m+s,p}(G)$ – простір, спряжений $\overset{\circ}{H}{}^{-2m-s,p'}(G):=(u \in H^{-2m-s,p'}(R^n):\ \operatorname{supp} u \subset \bar G)$ відносно розширення $(.,.)_G$ скалярного добутку в $L_2(G)$. Ці простори детально вивчено в п. 1.3.5 дисертації.

Теорема 1.3.1' дає можливість розширити відображення (3) по неперервності. Позначимо це розширення також через

$$f \mapsto \int_G \Phi(x,y)f(y)dy = u(x) \quad (f \in H^{s,p}(G),\ s<0). \qquad (4)$$

Тоді відображення (4) неперервно діє в парі просторів

$$H^{s,p}(G) \mapsto \begin{cases} H^{2m+s,p}(G) & (s<0,\ 2m+s \geq 0), \\ H'^{2m+s,p}(G) & (s<0,\ 2m+s<0); \end{cases} \qquad (5)$$

при цьому $Lu=f$ всередині G (тобто $(u, L^+v)_G = (f,v)_G$ $(\forall v \in C_0^\infty(G))$. Вірними є також подібні доповнення до теорем 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4.

В §1.4 наведено основні факти про загальні еліптичні системи і про еліптичні граничні задачі для них, про матриці Гріна таких задач. Доведено, що $R^*(x,y):=R'(y,x)$ є матрицею Гріна формально спряженої задачі.

В §1.5 вивчаються фундаментальні розв'язки еліптичних операторів для систем рівнянь.

Теореми 1.5.1 і 1.5.2 – це узагальнення для систем, еліптичних за Петровським теорем 1.3.2 і 1.3.1 про гфр і узагальнений гфр. Потім побудовано і вивчено нормальний і узагальнений нормальний гфр для еліптичної за Петровським системи (теореми 1.5.4 і 1.5.5). Відзначимо тут, що якщо $l(x,D)$ – еліптична за Петровським система, то формально спряжена система $l^+(x,D)$ є еліптичною за Дуглісом – Ніренбергом. Це викликає певні додаткові труднощі.

Вивчається також відображення (1), коли $f=(f_1,\dots,f_N)$ є узагальненою вектор-функцією, f_j – елемент негативного соболевського простору. Теореми 1.5.1', 1.5.2', 1.5.4' доповнюють в цьому сенсі теореми 1.5.1, 1.5.2 і 1.5.4 і є аналогами для систем теореми

1.3.1'.

В §1.6. побудовано і вивчено гфр для еліптичних за Дуглісом-Ніренбергом систем.

§1.7 присвячено вивченню щільності лінійних комбінацій фундаментальних розв'язків та їх похідних в множині розв'язків еліптичних граничних задач.

Нехай $G\subset R^n$ - обмежена область з межею ∂G. Нехай в $\bar{G}$ задано правильно еліптичний вираз $L(x,D)$ порядку $2m$ з нескінченно гладкими коеффіцієнтами. Нехай для L в G існує нормальний гфр $\Phi(x,y)$. Нехай $\Omega\subset\bar{\Omega}\subset G$ - обмежена область з нескінченно гладкою межею Γ, при цьому $G/\bar{\Omega}$ є зв'язною.

В Ω розглядається еліптична гранична задача з нормальними граничними умовами:

$$lu|_{\Omega}=f;\ B(x,D)u|_{\Gamma}=\varphi$$

$(B=(B_1,\dots,B_m),\ \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m),\ \mathrm{ord}\,B_j=m_j<2m)$.

Нехай $K\subset G\setminus\bar{\Omega}$ - кусок гладкої $(n-1)$-мірної поверхні, і нехай $(y_k)_{k=1}^{\infty}\subset G\setminus\bar{\Omega}$ -послідовність, щільна в K (тобто $\overline{(y_k)}\supset K$). Нехай

$$\varphi\in\prod_{j=1}^{m}B^{2m+s-m_j-1/p,p}(\Gamma):=\mathcal{B}^{s}\ (s\in R,\ 1<p<\infty,\ j=1,\dots,m), \quad (6)$$

де $B^{t,p}(\Gamma)$ - простір Бесова. Вивчається питання: чи існує послідовність

$$u_l(x)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}c_{k\alpha}^{(l)}(D_y^{\alpha}\Phi)(x,y_k) \qquad (7)$$

($c_{k\alpha}^{(l)}$ - комплексні числа, $l=1,2,\dots$).

така, що

$$\lim_{l\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{m}\langle\langle\varphi_j-B_ju_l,\Gamma\rangle\rangle_{2m+s-m_j-1/p,p}\Big)=0 \qquad (8)$$

Наступні теореми сформулюємо тут для випадку, коли дефект відсутній (в роботі розглянуто загальний випадок).

<u>Теорема 1.7.1</u>. Нехай $s\in R$, $1<p<\infty$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ задовольняє (6). Тоді існує послідовність (7), яка задовольняє (8).

<u>Теорема 1.7.2</u>. Нехай в умовах теореми 1.7.1 K -гладка межа області U $(U\subset\bar{U}\subset G\setminus\bar{\Omega})$ і нехай задача

$$L^{+}v|_{U}=0;\ D^{\alpha}v|_{K}=0 \qquad (|\alpha|\le m-1)$$

має в $C^{\infty}(\overline{U})$ лише тривіальний розв'язок. Тоді виконується твердження теореми 1.7.1 з заміною у (8) $|\alpha|\leq 2m-1$ на $|\alpha|\leq m-1$.

Теорема 1.7.3. Нехай в умовах теореми 1.7.1 послідовність (y_k) щільна у відкритій множині U $(U\subset\overline{U}\subset G\setminus\overline{\Omega})$. Тоді виконується твердження теореми 1.7.1 з заміною в (7) $|\alpha|\leq 2m-1$ на $|\alpha|=0$.

Другий розділ присвячено вивченню гладкості слабких розв'язків еліптичних за Дуглісом-Ніренбергом систем.

Розглянемо у $G\subset R^n$ еліптичну граничну задачу для системи структури Дугліса-Ніренберга

$$lu(x) = (l_{jk}(x,D))_{j,k=1,\dots,N}\begin{pmatrix}u_1(x)\\ \vdots\\ u_N(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_N(x)\end{pmatrix}=f(x)\quad (x\in G),$$

$$bu(x) = (b_{hk}(x,D))_{\substack{h=1,\dots,m\\ k=1,\dots,N}}\begin{pmatrix}u_1(x)\\ \vdots\\ u_N(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \vdots\\ \varphi_m(x)\end{pmatrix}=\varphi(x). \tag{9}$$

Тут $\operatorname{ord} l_{jk}\leq s_j+t_k$, $\operatorname{ord} b_{hk}\leq \sigma_h+t_k$: s_j, t_j $(j=1,\dots,N)$, $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ - цілі числа, $s_1+\dots+s_N+t_1+\dots+t_N=2m$, $t_1\geq\dots\geq t_N\geq 0=s_1\geq\dots\geq s_N$, $\sigma_h<0$ $(h=1,\dots,m)$. Нехай $C^{\infty}(\text{гр})=\{u\in(C^{\infty}(\overline{G}))^N;\ bu=0\}$, а $\mathcal{L}$ - замикання в $(L_2(G))^N=L_2$ відображення $u\mapsto lu$ $(u\in C^{\infty}(\text{гр}))$.

В розділі досліджено властивості регулярності функцій з області визначення $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 2.2 - основний результат другого розділу. Вона стверджує, що якщо $u=(u_1,\dots,u_N)\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$, то $u_j\in H^{t_j+s_N}(G)$, і підвищення гладкості має місце, якщо $t_j+s_N>0$ $(j=1,\dots,N)$. В цьому випадку, зокрема, власні функції оператора $\mathcal{L}$ є нескінченно гладкими.

На закінчення автор виражає щиру подяку доктору фізико-математичних наук професору Л.П. Нижнику за керівництво роботою.

Основні положення дисертації опубліковано в наступних роботах:

I. Ройтберг И.Я. О существовании фундаментальних решений эллиптических операторов во всей области//Операторные методы и их применения/Воронеж. ун-т.- 1989.-С.59-60.-Деп. ВИНИТИ, 1989.-№ 6385-В89.
2. Мех (Ройтберг) И.Я.//О фундаментальных решениях эллиптических операторов Докл.АН УССР.-1991.-№5.- С.14-18.
3. Мех (Ройтберг) І.Я. Про гладкість слабких розв"язків загальних еліптичних систем//Спектральні і еволюційні задачі: Тези доповідей КРОМШ-I.-Київ: НМК ВО,1991.-С.79.
4. Мех (Ройтберг) И.Я. О гладкости слабых решений эллиптических по Дуглису - Ниренбергу систем Укр.мат.журн.-1991.-43, №10.-С.1379-1383.
5. Ройтберг И.Я., Ройтберг Я.А. Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями фундаментальних решений //Докл.АН Украины.-1992.-№12.-С.
6. Ройтберг И.Я., Ройтберг Я.А. Об аппроксимации решений граничных эллиптических задач линейными комбинациями фундаментальних решений//Тези доповідей конференції, присвяченої пам"яті академіка М.П.Кравчука, Київ, Луцьк, 22-28 верес. 1992р.- Київ: Ін-т математики АН України, 1992.- С.178.

Підп. до друку 20.10.92. Формат 60х84 16. Папір друк.
Офс. друк. Ум.-друк. арк. 0,69. Ум.-фарб. відб.0,69.
Обл.-вид. арк. 0,5. Тираж 100 прим. Зам.290. Безкоштовно.

Підготовлено та віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3