Академия наук Украины
Институт математики

На правах рукописи

АЛИКУЛОВ Эшпулат Омонович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И КРИТЕРИИ ГОЛОМОРФНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 - математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в отделе Топологических методов анализа Института математики АН Украины.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ТРОХИМЧУК Ю.Ю.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ТАМРАЗОВ П.М., кандидат физико-математических наук, САФОНОВ В.М.

Ведущая организация: Киевский Университет им. Т.Г. Шевченко.

Защита состоится "22" декабря 1992 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу:
252601, Киев 4, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "20" ноября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Гусак Д.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Являясь одним из основных разделов анализа, дифференциальные свойства функций и множеств вот уже несколько столетий притягивают к себе внимание математиков. Считается, что по-настоящему серьезные исследования дифференциальных свойств функции начинаются с работ А. Лебега и А. Данжуа. Исследования были продолжены и существенно развиты в работах Н.Н.Лузина,В.В.Степанова,А.Я.Хинчина,С.Сакса и других математиков. Следует отметить важные идеи Хинчина, которые привели его к теперь уже общепринятому определению асимптотического предела, асимптотической производной и т.д. (приведшие, например, к существенному обобщению интеграла Данжуа).

Настоящая работа является одним из продвижений в этой области.

Цель работы. Изучение связности графиков производных множеств функций, получение новых критериев дифференцируемости и голоморфности комплексных функций.

Общая методика. В работе используются топологические и функциональные свойства внутренних отображений, известные методы теории функций как действительного, так и комплексного переменного.

Научная новизна. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми. Получены:

- условия связности графика производных множеств в случае вещественных функций многих переменных и в случае комплексных функций одного переменного;
- новые критерии дифференцируемости комплексных липшицевых функций и голоморфности функций с прямолинейными множествами моногенности;
- полная характеристика множеств моногенности на множестве не первой категории в случае, когда они нигде не плотны.

Апробация работ. Результаты диссертации докладывались на "Міжнародній математичній конференції, присвяченій 100 - річчю з дня народження С.Банаха (г.Львов, 1992), во Всесоюзных математических школах "Комплексный анализ" (Кацивели, 1990) и "Теория потенциалов", (Кацивели, 1991), на семинарах по "Топологическим методам анализа" Института математики АН Украины.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы.

Объем работы Диссертационная работа состоит из введения и трех глав.

Содержание работы

Во введении дается краткий обзор исследований по теме диссертации.

Первая глава посвящена изучению связности графика производных множеств.

В первом параграфе приводятся известные факты о связности подобных множеств, когда f задана на сегменте $[a,b]$, и доказывается следующая

Теорема I.I. Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ и $f:D\to\mathbb{R}^m$ – функция 1-класса Бэра, такая, что $f(\partial U)\subset\overline{f(D)}$ для любого открытого шара $U\subset D$, где $\bar{U}\subset D$. Тогда график отображения f связен в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Схема ее доказательства используется в дальнейших теоремах настоящей главы.

Во втором параграфе вводятся множества

$$M_x^{(i)}(f)=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{M_\varepsilon(f;x_i)},$$

где

$$M_\varepsilon(f;x_i)=\left\{\frac{f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)}{\Delta x_i},\ 0<|\Delta x_i|<\varepsilon\right\},$$

которые называются множествами частных производных чисел по переменной x_i функции $f:D\to\mathbb{R}_1$, $D\subset\mathbb{R}^n$ в точке $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $M_x^{(i)}$, вообще говоря, состоит из двух компонент: множества $M_x^{+(i)}$ правых (т.е. при $\Delta x_i>0$) и $M_x^{-(i)}$ левых (при $\Delta x_i<0$) частных производных чисел. Соответствие $x\to M_x^{(i)}$ осуществляет многозначное отображение области D в $\mathbb{R}_1$ обозначим ее через Φ_f. Отметим, что φ_f обладает множеством всюду второй категории в D точек полунепрерывности сверху.

Теорема 1.2. Пусть $f:D\to\mathbb{R}_1$, $D\subset\mathbb{R}^m$ - непрерывная функция и пусть в каждой точке $x\in D$ множество $M_x^{(l)}$ связно. Тогда график многозначного отображения

$$\varphi_f:x\to M_x^{(l)}(f)$$

т.е. $W_\varphi=\{(x,\xi):\ x\in D,\ \xi\in M_x^{(l)}(f)\}$ есть связное подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$. Из последной теоремы вытекает

Следствие. Пусть $f:D\to\mathbb{R}^1, D\subset\mathbb{R}^n$ - непрерывная функция, обладающая конечными частными производными $\partial f/\partial x_l$ в каждой точке $x\in D$, тогда множество

$$W=\{(x,\xi):x\in D,\xi=\partial f/\partial x_l\}\text{-связно.}$$

В теореме 1.2 единственным условием связности множества W_φ является связность множеств $M_x^{(l)}$ в каждой точке области определения функции f. Известно, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ (которое совпадает с множеством производных чисел) комплексной функции f всегда является связным множеством, поэтому естественно было ожидать связности графика производных множеств и в этом случае. Но оказывается, что это не так. Был построен пример(см.ст.С.В.Горленко в сб. "Некоторые вопросы современной теории функций" Н.1976) непрерывной функции $f(z)$, для которой обединение $\bigcup\limits_{z\neq 0}\mathfrak{M}_z(f)\subset\mathbb{C}^2$ связно, но расстояние $\rho(\bigcup\limits_{z\neq 0}\mathfrak{M}_z(f),\mathfrak{M}_0(f))>0$.

Тем не менее, во втором параграфе при дополнительном условии доказывается следующая

Теорема 1.3. Пусть f - непрерывная и $\mathbb{R}$-дифференцирумая функция в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда график многозначного отображения

$$\Phi_f:z\to \mathfrak{M}_z(f)$$

т.е. $W_\Phi=\{(z,\zeta):z\in D,\zeta\in\mathfrak{M}_z(f)\}$ есть связное подмножество $\mathbb{C}^2(z,\zeta)$. В ее доказательстве используется и существенно дополняется конструкция знаменитой теоремы Стоилова о простой дуге.

В этом же параграфе доказывается и свойство более "сильной" связности при тех же условиях теоремы 1.3.

Теорема 1.4. Пусть f - непрерывная и $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в области $D\subset\mathbb{C}$, z_0- произвольная точка D. Тогда для произвольной точки $\zeta\in\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ существует последовательность $\{z_n\}, n=1,2,\ldots$, такая, что $z_n\to z_0$ и расстояние

$$\rho(\mathfrak{M}_{z_n},\zeta)\to 0 \text{ при } n\to\infty .$$

Во второй главе получены новые критерии дифференцируемости функции комплексного переменного в одной отдельно взятой точке.

Известно , что если непрерывная функция $f:D\to\mathbb{R}^1$, $D\subset\mathbb{R}^2$ обладает частными производными в области D и в некоторой точке ее они непрерывны, то f дифференцируема в этой точке. Имеются много различных обобщений и усилений этого весьма полезного утверждения. Например, нетрудно показать, что для липшицевой функции f (вещественной или комплекснозначной) существование пределов ее частных производных в некоторой точке по точкам дифференцируемости также приводит к дифференцируемости в такой точке; при этом наперед о существовании частных производных в ней ничего не предполагается. К сожалению, в общем случае это утверждение неверно: если взять, например, произвольную сингулярную монотонную функцию $\varphi(x)$, $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^1$, взять точку x_0, где $\varphi'(x_0)=+\infty$, и положить $f(z)=$ $=f(x+iy)=\varphi(x)$, то в точках $z=x_0+iy$ наше последнее утверждение не имеет места.

В нашем случае дифференцируемость комплексной функции f в точке дает дифференциал $df=f_z dz+f_{\bar z}d\bar z$. Оказывается, что для дифференцируемости комплексной функции f достаточно существования лишь одного предела $\lim f_z$, либо $\lim f_{\bar z}$, конечно это доказывается в случае, когда функция липшицева, зато пределы $\lim f_z$, $\lim f_{\bar z}$ можно понимать как *асимптотические*.

В первом параграфе главы приводятся интегральные оценки, вывод которых потребовал весьма тонких рассуждений.

Рассмотрим в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функцию f, удовлетворяющую условию Липшица:

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leq L|z_1-z_2|$$

для произвольных $z_1, z_2 \in D$. Пусть $f_{\bar z} \to 0$ при $z \to z_0$ асимптотически. Это означает, что существует измеримое в смысле (двумерной) меры Лебега множество $Q(z_0)$, имеющие z_0 в качестве точки плотности, вдоль которой $f_{\bar z}$ имеет обычный предел при $z \to z_0$.

Введем обозначения:

$$\frac{Mes(K_r \cap Q)}{Mes(K_r)} = 1-\delta(r), \qquad \frac{Mes(K_r \setminus Q)}{Mes(K_r)} = \delta(r),$$

в наших условиях $\delta(r) \to 0$, при $r \to 0$.

Теорема 2.1. Пусть $f \in Lip(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ и $f_{\bar z} \to 0$ *асимптотически*, при $z \to z_0$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} \right| < \varepsilon(r)M_1(r,h)+2LM_2(r,h) \, ,$$

где $\varepsilon(r)=\sup\limits_{K_r \cap Q} ess|f_{\bar z}|$, M_1, M_2- константы, зависящие от r и h.

Во втором параграфе главы доказывается основная

Теорема.2.2. Пусть $f \in Lip(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ и $f_{\bar z} \to 0$ *асимптотически*, при $z \to z_0$. Тогда f моногенна в точке z_0.

Доказывается, что при этом имеет место следующая формула:

$$f'(z_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} \, .$$

В третьем параграфе приводятся следствия и приложения основной теоремы.

Теорема 2.3. Пусть $f \in Lip(D)$, и в некоторой точке $z_0 \in D$ существует асимптотический предел при $z \to z_0$ либо производной f_z либо $f_{\bar z}$. Тогда f дифференцируема в точке z_0, причем соответствующий коэффициент дифференциала $df=f_z dz+f_{\bar z}d\bar z$ равен этому предельному значению. Второй коэффициент при этом находим по формулам

$$f_{\bar{z}}(z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} ,$$

либо

$$f_z(z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - \bar{z}_0)^2} .$$

Задача о структуре множеств моногенности $\mathfrak{M}_z$ на множестве всюду второй категории до конца не решена.

Основная теорема позволяет описать $\mathfrak{M}_z$ в одном частном случае. Именно, справедлива следующая

Теорема 2.3. Пусть $f \in Lip(D)$ и на множестве $E \subset D$ не первой категории множества моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ нигде не плотны. Тогда в E, исключая множество первой категории, $\mathfrak{M}_z(f)$ являются либо окружностями либо точками, а сама функция f дифференцируемой.

Как правило, всякое продвижение в теории дифференциальных свойств комплексных функций обычно приводит к новым критериям голоморфности таких функций. Не является исключением из этого правила и настоящая работа.

Известная гипотеза о голоморфности функци и комплексного переменного гласит: для того, чтобы непрерывная функция f была голоморфной в своей области определения, необходимо и достаточно, чтобы множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ в каждой точке этой области не было ни полной плоскостью, ни полной окружностью. Известно также, что эта гипотеза в определенном смысле сводится к случаю, когда множества моногенности являются подмножествами прямых линий на плоскости. Этот случай был исследован в работах М.М. Тара, С.В. Горленко и различными методами было доказано, что если множество моногенности непрерывной функции в области определения ее является подмножеством прямых $\tilde{P}$- плоскости, то такая функция является голоморфной. При этом под $\tilde{P}$- плоскостью понимается расширенная комплексная плоскость с топологией замкнутого круга (где бесконечно удаленная точка рассматривается как граничная "окружность" бесконечно удаленных точек $(\infty,\alpha):0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$). Справедливости гипотезы в случае, когда множества моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ являются подмножествами прямых расширенной комплексной плоскости с обычной сферической топологией, и посвящена третья глава.

В первом параграфе главы приводятся известные вспомогательные утверждения. Приведем некоторые из них.

Лемма 1. Пусть $w=f(z)$ - непрерывная в области $D\subset\mathbb{C}$ функция. Если в каждой точке z множества E не первой категории в D множества моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ не содержат точку $\zeta=0$, то найдется подобласть $d_0\subset D$, в которой $f(z)$ однолистна.

Лемма 2. Пусть $w=f(z)$ -непрерывная в области $D\subset\mathbb{C}$ функция и P-совершенное множество в области D. Если для каждого $z\in P$ $\mathfrak{M}_z(f)$ не содержат точку $\zeta=0$, то найдется порция P_0 множества P, на которой $f(z)$ однолистна.

Лемма 3. Пусть $w=f(z)$ - непрерывная в области D функция. Если на множестве E не первой категории в D множества $\mathfrak{M}_z(f)$ ограничены (т.е. принадлежат некоторому фиксированному кругу плоскости ζ), то найдется подобласть $d_0\subset D$, в которой $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Лемма 4. Если для непрерывной в области D функции $w=f(z)$ множества моногенности ограничены в точках совершенного множества P, то найдется порция $P_0\subset P$, на которой функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

С помощью вспомогательных утверждений, приведенных в первом параграфе, во втором параграфе главы доказывается следующий вариант вышеуказанной гипотезы:

Теорема 3.10. Пусть $w=f(z)$ - непрерывная в области $D\subset\mathbb{C}$ функция. Если для каждой точки $z\in D$, исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ является подмножеством прямой расширенной комплексной плоскости со сферической топологией на ней, и при том не вырождается в бесконечно удаленную точку $\zeta=\infty$, то $f(z)$ голоморфна в области D.

Отметим, что при ее доказательстве существенно используется основная теорема второй главы.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Аликулов Э.О. О связности производных множеств//Всесоюзная математическая школа "Теория потенциала" Кацивели, 26 июня-3 июля 1991г.: Тез. докл. Киев, 1991.-С.4.
2. Трохимчук Ю.Ю., Аликулов Є.О. Об одном условии дифференцируемости плоских отображений//Міжнародної математичної конференції, присвяченої 100-річчю народження С.Банаха, Львів 6-8 травня 1992р.: Тез.докл.Львов, 1992.-с.74.
3. Аликулов Э.О. Некоторые дифференциальные свойства комплексных функций. - Киев, 1992. - 27 с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 92.24).
4. Аликулов Э.О., Горленко С.В. Об аналитичности функций с прямолинейными множествами моногенности. - Киев, 1992.- 11 с. - (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 92.29).

Подп. в печ. 17.11.92. Формат 60х84/16. Бумага тип. Офс. печать
Усл. печь. л. 0,69. Усл. кр.-отт. 0,69. Уч.-изд. л. 0,5.
Тираж 100 экз. Зак. 327 Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3