Академія наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора
Інститут математики

На правах рукопису

РОМАНЮК Віктор Сергійович

НАБЛИЖЕННЯ (ψ,β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
професор СТЕПАНЕЦЬ О.І.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
професор БІЛИЙ В.І.
кандидат фізико-математичних наук
ДРОЗД В.В.

Провідна організація - Одеський державний університет

Захист дисертації відбудеться "8" грудня 1992 р. в 15^{00} годин на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "3" листопада 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В теорії функцій комплексної змінної важливе місце надається питанням про наближення аналітичних функцій на замкнутих множинах комплексної площини $\mathbb{C}$. Історія досліджень в цьому напрямі досить об"ємна і насичена дуже глибокими результатами, значна частина яких викладена в монографіях В.К.Дзядика, Д.Гайєра, В.І.Смирнова і М.О.Лебедева, П.К.Суєтіна, П.М.Тамразова і в низці оглядових статей.

О.І.Степанцем було запропоновано розглянути інтеграли типу Коші вздовж замкненої спрямовної жорданової кривої (з. с. ж. к.) Γ і підійти до розв"язання задач, пов"язаних з їх наближенням в замкненій області $G \subset \mathbb{C}$, обмеженій кривою Γ , з точки зору теорії функцій дійсної змінної, взявши за основу розроблену ним методику наближення 2π-періодичних функцій, що належать до класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ (див. например, Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. - Киев: Наук.думка, 1987. - 268 с.).

З цією метою в роботі вводиться поняття контурної (ψ,β)-похідної функцій, визначених на з. с. ж. к. Γ , - аналог поняття (ψ,β)-похідної 2π-періодичних сумовних функцій дійсної змінної. На множині $L(\Gamma)$ - сумовних на Γ функцій - визначаються класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, що містять в собі функції, контурні (ψ,β)-похідні яких належать до множини $\mathfrak{N}(\Gamma) \subset L(\Gamma)$.

Інтеграли типу Коші вздовж з. с. ж. к. Γ класифікуються за ознакою належності їх щільностей до класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. Відповідна множина інтегралів типу Коші позначається через $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$.

Певні міркування дозволяють будувати теорію наближення в області $\overline{G}$ функцій, що належать до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, в значній мірі схожу до теорії наближення (ψ,β)-диференційовних функцій дійсної змінної.

Мета роботи. Продовжити відому класифікацію 2π-періодичних сумовних функцій дійсної змінної, яка базується на понятті

(ψ, β)-похідної цих функцій, на функції комплексної змінної.

Провести дослідження класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ з точки зору можливого ступеня апроксимації їх елементів в області $\bar{G}$ за допомогою часткових сум рядів Фабера, довільних алгебраїчних поліномів і довільних n-вимірних підпросторів при певних структурних властивостях області G.

<u>Загальна методика виконання досліджень</u>. В роботі використовуються:

- методи О.І.Степанця наближення 2π-періодичних функцій дійсної змінної, що належать до класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$;
- метод оцінки знизу колмогорівських n-поперечників, розроблений В.М.Тихомировим;
- відомі факти із теорії граничних властивостей аналітичних функцій і, зокрема, інтегралу типу Коші, а також із теорії конформних відображень.

<u>Новизна результатів та їх наукова цінність</u>. Основні результати дисертації є новими і становлять певний теоретичний інтерес. Їх зміст полягає в наступному:

- одержане інтегральне зображення відхилень від функцій, що належать до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, лінійних середніх їх рядів Фабера в областях $G \subset \mathbb{C}$, які обмежені з. с. ж. к. Γ;
- встановлені рівномірні в області $\bar{G}$ оцінки відхилень від функцій, що входять до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, часткових сум їх рядів Фабера;
- знайдені точні за порядком оцінки найкращих в області $\bar{G}$ наближень функцій, що належать до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня, а також порядкові оцінки n-поперечників за Колмогоровим цих класів в просторах з рівномірною чи інтегральною метриками.

Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях, які мають відношення до наближення функцій комплексної змінної на замкнених множинах комплексної площини.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарах відділу теорії функцій Інституту математики АН України (під керівництвом О.І.Степанця) і в школі "РЯДИ ФУР"Є: ТЕОРІЯ І ЗАСТОСУВАННЯ" (м. Кам"янець-Подільський, 1992).

Публікації. Основні результати дисертації викладені в чотирьох наведених в кінці автореферату роботах.

Структура і об"ем роботи. Дисертація об"ємом 109 сторінок машинопису, складається зі вступу, трьох розділів і списку цитованої літератури, що містить в собі 53 найменування.

Зміст роботи

При розкритті змісту роботи будемо дотримуватись наступних позначень:

- G - область в комплексній площині $\mathbb{C}$, обмежена з. с. ж. к. Γ;
- $w=\Phi(z)$ - конформний гомеоморфізм зовнішності області $\bar{G}$ на зовнішність одиничного кругу $\bar{D}$ ($D=\{w\in\mathbb{C}: |w|<1\}$, $\gamma=:\{w\in\mathbb{C} : |w|=1\}$), нормований умовами:

$$\lim_{z\to\infty} z^{-1}\Phi(z)=d>0 ; \quad \Phi(\infty)=\infty;$$

- $z=\Psi(w)$ - функція, обернена до $\Phi(z)$;
- $L_p(0;2\pi)$, $1\le p\le\infty$, - простір вимірних 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій $\varphi(\cdot)$, для яких скінченні величини

$$\|\varphi\|_p \overset{df}{=} \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p=\infty; \end{cases}$$

$$L(0;2\pi)\overset{df}{=}L_1(0;2\pi), \quad M\overset{df}{=}L_\infty(0;2\pi);$$

- $L_p(\Gamma)$, $1\le p\le\infty$, - простір функцій $f(\cdot)$, вимірних на з. о. ж. к. Γ, зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} \overset{df}{=} \begin{cases} \left(\int_{\Gamma}|f(\zeta)|^p\,|d\zeta|\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|, & p=\infty; \end{cases}$$

$$L(\Gamma)\overset{df}{=}L_1(\Gamma) \quad ; \qquad M(\Gamma)\overset{df}{=}L_\infty(\Gamma);$$

- $C(\Gamma)$ - простір функцій $f(\cdot)$, неперервних на Γ, з нормою

$$\|f\|_{C(\Gamma)} \overset{df}{=} \max_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|;$$

- $\widetilde{L}_p(\Gamma)$, $1\le p<\infty$, - простір функцій $f\in L(\Gamma)$, для яких

$$\|f\|_{\widetilde{L}_p(\Gamma)} = \|f\|_{\Gamma,p} \overset{df}{=} \left(\int_{\Gamma}|f(\zeta)|^p\,|\Phi'(\zeta)|\,|d\zeta|\right)^{1/p}<\infty,$$

де $\Phi'(\cdot)$ - похідна функції $\Phi(\cdot)$;

- $\mathfrak{A}(\overline{G})$ - простір функцій $f(\cdot)$, аналітичних в G і неперервних в $\overline{G}$, з нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{A}(\overline{G})} \overset{df}{=} \sup_{z\in G}|f(z)| = \max_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|;$$

- $\widetilde{\mathfrak{A}}_p(\overline{G})$, $1\le p<\infty$, - простір функцій $f(\cdot)$, які є аналітичними в G і належать до простору $\widetilde{L}_p(\Gamma)$ на границі Γ області G;

- $E_n(\varphi)_Y = \inf_{\{T_n\}}\|\varphi(t)-T_n(t)\|_Y$, $n\in\mathbb{N}$ - величина найкращого наближення функції $\varphi\in Y\subset L(0;2\pi)$ за допомогою алгебраїчних поліномів, степінь яких не перевищує $n-1$, в метриці простору Y;

- $E_n(\varphi)_c \overset{df}{=} E_n(\varphi)_{C(0;2\pi)}$, $E_n(\varphi)_p \overset{df}{=} E_n(\varphi)_{L_p(0;2\pi)}$;

$-\ \rho_n(\varphi;t)\overset{df}{=}\varphi(t)-S_{n-1}(\varphi;t),\ t\in\mathbb{R}$, де $S_{n-1}(\varphi;\cdot)$ - часткова сума порядку $n-1$ ряду Фур"е функції $\varphi\in L(0;2\pi)$.

Домовимось також, що в тому випадку, коли функція $f(\cdot)$ означена на з. о. ж. к. Γ, 2π-періодичну функцію $f(\Psi(e^{it}))$, означену на $\mathbb{R}$, будемо позначати відповідним великим символом, отже, $F(t)\overset{df}{=}f(\Psi(e^{it}))$.

В першому розділі основна увага приділяється розгляду питань, пов"язаних з наближенням функцій, що належать до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, частковими сумами їх рядів Фабера

В § I вводиться поняття контурної (ψ,β)-похідної функцій, що входять до множини $\tilde{L}(\Gamma)$, на основі якого і проводиться розбиття цієї множини на класи.

Нехай $f\in\tilde{L}(\Gamma)$ і

$$S[F]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(F)e^{ikt}$$

- ряд Фур"е функції $F(\cdot)$; $c_k(F)$ - її коефіцієнти Фур"е.

Припустимо, що для фіксованої послідовності $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ дійсних відмінних від нуля чисел і деякого числа $\beta\in\mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq0}}e^{i\beta\pi/2\,\mathrm{sgn}\,k}\,\frac{c_k(F)}{\psi(|k|)}\,e^{ikt}$$

е рядом Фур"е деякої функції з $L(0;2\pi)$. Позначимо цю функцію через $F^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ і, слідуючи О.І.Степанцю, назвемо її (ψ,β)-похідною функції $F(\cdot)$. Функцію $\mu\in\tilde{L}(\Gamma)$, для якої майже при всіх $t\in\mathbb{R}$ $\mu(\Psi(e^{it}))=F^{\psi}_{\beta}(t)$, назвемо контурною (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$. До множини $L^{\psi}_{\beta}(\Gamma)$ віднесемо функції $f\in\tilde{L}(\Gamma)$, у яких існують контурні (ψ,β)-похідні і якщо, окрім цього, $f^{\psi}_{\beta}\in\mathfrak{N}(\Gamma)$, де $\mathfrak{N}(\Gamma)$ - деяка підмножина в $\tilde{L}(\Gamma)$, то відповідний клас позначимо через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$.

Множину функцій, які є аналітичними в області $G\subset\mathbb{C}$, обмеженій кривою Γ, і зображуються інтегралами типу Коші $\mathcal{K}f(\cdot)$ вздовж Γ зі щільностями $f(\cdot)$, що належать до класу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, позначимо через $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$.

Якщо $S_p=\{f\in\tilde{L}_p(\Gamma):\|f\|_{\Gamma,p}\leq 1\}$, то покладаємо $L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)\overset{df}{=}L^{\psi}_{\beta}S_p(\Gamma)$.

В § 2 отримана формула відхилення від функцій, що належать до класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$, лінійних середніх їх рядів Фабера.

Нехай $\Lambda=\{\lambda^{(n)}_{k}\}^{\infty}_{k,n=0}$ – нескінченна числова матриця, $\lambda^{(n)}_{k}=0$ при $k\geq n$ і $\lambda^{(n)}_{0}=1$. Для будь-якої функції $f\in\tilde{L}(\Gamma)$ покладемо

$$U_n(f;z;\Lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{(n)}_{k}a_k(f)F_k(z),\quad n\in\mathbb{N},$$

де $a_k(f)=a_k(\mathcal{K}f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\Psi(w))\,w^{-k-1}dw,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, – коефіцієнти Фабера функції $\mathcal{K}f(\cdot)$, а $F_k(\cdot)$ – многочлен Фабера степеня k, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, що відповідає області $\bar{G}$ (поліноміальна частина лоранівського розкладу функції $[\Phi(\cdot)]^{k}$ в околі точки $z=\infty$).

Нехай, далі, $\{\lambda_n(\cdot),\ n\in\mathbb{N}\}$ – послідовність неперервних на $[0;1]$ функцій, для яких $\lambda_n(k/n)=\lambda^{(n)}_{k}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\psi(\cdot)$ – функція, неперервна на $[1;\infty)$, і

$$\tau_n(v)=\tau_n(v;\Lambda;\psi)=\begin{cases}\psi_0(v), & 0\leq v\leq 1/n,\\ (1-\lambda_n(v))\psi(nv), & 1/n\leq v\leq 1,\\ \psi(nv), & v\geq 1,\end{cases}\tag{I}$$

де $\psi_0(\cdot)$ - довільна неперервна на $[0;1/n]$ функція, $\psi_0(0)=0$ і $\psi_0(1/n)=\psi(1)(1-\lambda_1^{(n)})$.

Надалі, коли мова йде про функцію $\psi(\cdot)$, визначену на $[1;\infty)$, під послідовністю $\{\psi(k), k\in\mathbb{N}\}$, за допомогою якої визначається клас $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{M}(\Gamma)$, розуміємо слід цієї функції на множині $\mathbb{N}$.

В наведених позначеннях справедливе твердження.

Теорема І.2.І. Нехай $f\in L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$ і $\tau_n(\cdot)$ - функція, яка визначається формулою (І) і така, що її перетворення

$$\hat{\tau}_n(t)=\hat{\tau}_n(t;\Lambda;\beta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_n(v)\cos(vt+\beta\pi/2)dv$$

сумовне на $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_n(t)|dt<\infty$$

(інтеграл вживається в розумінні головного значення).

Тоді $\forall z\in G$ при будь-яких $n\in\mathbb{N}$ і $\beta\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$\mathcal{K}f(z)-U_n(f;z;\Lambda)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t)\int_{\Gamma}\frac{f^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta-z}d\zeta dt.$$

В цьому ж параграфі отримано ряд наслідків теореми І.2.І у випадку, коли матриця $\Lambda=\Lambda_c$ визначається послідовністю

$$\lambda_n(v)=\lambda_n(c;v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le c,\\ 1-\dfrac{v-c}{1-c}\dfrac{\psi(n)}{\psi(nv)}, & c\le v\le 1,\\ 0, & v\ge 1,\end{cases}$$

де c - деяке число з проміжку $[0,1)$, а $\psi(\cdot)$ задовольняє умови, які є достатніми для сумовності на $\mathbb{R}$ перетворення $\hat{\tau}_n(t)=\hat{\tau}_n(t;\Lambda_c;\beta)$.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину неперервних на $[0;\infty)$ випуклих вниз на $[1;\infty)$ функцій $\psi(\cdot)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v)=0$. Нехай

$$F_0 \overset{df}{=} \left\{\psi\in\mathfrak{M}: \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt<\infty\right\}.$$

Покладемо також $\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)=\mathcal{K}f(\cdot)-S^F_{n-1}(f;\cdot)$, де $S^F_{n-1}(f;\cdot)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k(f)F_k(\cdot)$ - часткова сума порядку $n-1$ ряду Фабера функції $\mathcal{K}f(\cdot)$.

В наслідку I.2.3' стверджується, що якщо $f\in L^\psi_\beta M(\Gamma)$ і $\psi\in F_0$, то при будь-яких $n\in\mathbb{N}$ і $\beta\in\mathbb{R}$ в кожній точці $z\in G$ виконується рівність

$$\rho_n(\mathcal{K}f;z)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t;\Lambda_{1-1/n};\beta)\delta_n(z;t/n)dt, \quad (2)$$

де

$$\delta_n(z;t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^\psi_\beta(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it}))}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=-n+1}^{n-1}c_k^{(n)}(z)e^{ikt},$$

а $c_k^{(n)}(z)$ - довільні функції змінної z.

Якщо ж $\psi\in\mathfrak{M}$, то рівність (2) справедлива в кожній точці $z\in G$ при будь-якому $n\in\mathbb{N}$ і $\beta=0$.

В § 3, виходячи із формули (2), отримані поточкові в області G оцінки величин $|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)|$, в припущенні, що Γ - з. о. ж. к.

Ці оцінки виражаються в термінах параметрів, що визначають клас функцій, і величин

$$E_{n,\infty}(f^\psi_\beta;z)=\inf_{c_k^{(n)}(z)}\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\ \delta_n(z;t/n),\quad z\in G.$$

Встановлені також рівномірні в замкненій області $\bar{G}$ оцінки величин $|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)|$ за умови, що область G фаберова (див. нижче теорему I.3.4).

Область G, обмежена з. о. ж. к. Γ, називається фаберовою ($G\in\mathfrak{F}$), якщо існує стала C така, що для будь-якої функції $g\in\mathcal{A}(\bar{D})$ виконується нерівність

$$\sup_{z\in G}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta-z}d\zeta\right|\leq C\sup_{w\in D}|g(w)|. \qquad (3)$$

Сукупність областей $G\in\mathfrak{F}$, для яких нерівність (3) виконується при заданому значенні C, позначимо через $\mathfrak{F}_C$.

Покладемо далі

$$\eta(t)=\psi^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\psi(t)\right)\quad \text{і}\quad \mu(t)=\frac{t}{\eta(t)-t}\ ,\ t\geq 1,$$

де $\psi^{-1}(\cdot)$ - функція, обернена до $\psi(\cdot)$.

Визначимо множини

$$\mathfrak{M}_c=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ K_1\leq\mu(t)\leq K_2\ ,\ \forall t\geq 1\},$$
$$\mathfrak{M}_0=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ 0<\mu(t)\leq K\ ,\ \forall t\geq 1\},$$
$$\mathfrak{M}_\infty=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ \mu(t)\uparrow\infty\ ,\ t\to\infty\},$$

де K, K_1 і K_2 - сталі, взагалі кажучи, залежні від $\psi(\cdot)$.

Позначимо через $\tilde{M}(\Gamma)$ множину функцій $h\in M(\Gamma)$ таких, що якщо $\tilde{H}(\cdot)$ - тригонометрично спряжена до $H(\cdot)$, то функція

$$\hat{H}(\theta)=\tfrac{1}{2}c_0(H)+\tfrac{1}{2}\left(H(\theta)+i\tilde{H}(\theta)\right)$$

неперервна на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що $S[\hat{H}]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(H)e^{ik\theta}$.

Якщо $h\in\tilde{M}(\Gamma)$, то через $\hat{h}(\cdot)$ позначимо функцію, неперервну на Γ і таку, що $\hat{h}(\Psi(e^{i\theta}))=\hat{H}(\theta)$ (існування такої функції обумовлене неперервністю на Γ функцій $\Psi(\cdot)$ і $\Phi(\cdot)$).

Нехай також $\forall a\in\mathbb{R}:\ a^{+}=\max\{a;0\}$.

Результат, що стосується рівномірних оцінок величин

$|\rho_n(\mathcal{K}_f;\cdot)|$, формулюється в такому вигляді.

Теорема 1.3.4. Нехай $G\in\mathfrak{F}_c$. Тоді

1) якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}\tilde{M}(\Gamma)$, $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$ і $\beta\in\mathbb{R}$, то

$$\|\rho_n(\mathcal{K}_f;\cdot)\|_{A(\bar{G})}\le\frac{4c}{\pi^2}\psi(n)\left[\ln^+(\eta(n)-n)+O(1)\right]E_n(\hat{F}^{\psi}_{\beta})_C; \qquad (4)$$

2) якщо $f\in L^{\psi}_{0}\tilde{M}(\Gamma)$ і $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то

$$\|\rho_n(\mathcal{K}_f;\cdot)\|_{A(\bar{G})}\le\frac{4c}{\pi^2}\psi(n)\left[\ln n+O(1)\right]E_n(\hat{F}^{\psi}_{0})_C, \qquad (5)$$

де $O(1)$ - величини, рівномірно обмежені по n, β і $f(\cdot)$, а $\hat{F}^{\psi}_{\beta}(t)=\hat{f}^{\psi}_{\beta}(\Psi(e^{it}))$.

Зрозуміло, що $D\in\mathfrak{F}_c$, $c\ge1$. В цьому випадку нерівності (4) і (5) точні в тому розумінні, що константу $\frac{4}{\pi^2}$ поліпшити неможливо.

Для інших класів функцій одержані близькі за змістом результати в роботах С.Б.Стечкіна (1953), С.Я.Альпера (1955), Т.Кьовbooрі і Х.Померенке (1967), Ф.Леслі, В.Вінжа і С.Варшавського (1974) тощо.

Зазначимо, що результати розділу I отримані автором спільно з О.І.Степанцем.

В другому розділі вивчаються найкращі рівномірні наближення функцій з класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$ за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня в замиканні фаберових областей G , а також колмогорівські n -поперечники класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(\Gamma)$ в просторі $A(\bar{G})$, де $\tilde{B}(\Gamma)=\{f\in\tilde{M}(\Gamma):\|f\|_{C(\Gamma)}\le1\}$.

Основний результат § I цього розділу полягає в наступному.

Теорема 2.1.2. Нехай $G\in\mathfrak{F}$, $f\in L^{\psi}_{\beta}\tilde{M}(\Gamma)$, $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$ і $\beta\in\mathbb{R}$, або $f\in L^{\psi}_{0}\tilde{M}(\Gamma)$, $\psi\in\mathfrak{M}_0$. Тоді

$$E_n(\mathcal{K}_f)_{A(\bar{G})}\ll\psi(n)E_n(\hat{F}^{\psi}_{\beta})_C,$$

де $\hat{F}^{\psi}_{\beta}(t)=f^{\psi}_{\beta}(\Psi(e^{it}))$.

Запис $\alpha(\cdot)\ll\beta(\cdot)$ означає, що існує стала C така, що при всіх значеннях аргументів, від яких залежать α і β, виконується нерівність $\alpha(\cdot)\leq C\beta(\cdot)$. Якщо одночасно $\alpha(\cdot)\ll\beta(\cdot)$ і $\beta(\cdot)\ll\alpha(\cdot)$, то будемо писати: $\alpha(\cdot)\asymp\beta(\cdot)$

Оцінки величин $E_n(f)_{A(\bar{G})}$ для функцій $f(\cdot)$, аналітичних в однозв"язних областях $G\subset\mathbb{C}$ і неперервних на їх замиканні разом з r-ю ($r\in\mathcal{N}$) похідною, при різних умовах на межу Γ одержані в роботах С.Варшавського (1942), С.М.Мергеляна (1952), С.Я.Альпера (1955), В.К.Дзядика і Г.А.Алібекова (1968), Є.М.Динькіна (1974) тощо.

В § 2 розділу 2 досліджуються колмогорівські n-поперечники класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(\Gamma)$ в просторі $A(\bar{G})$ (область G - фаберова) при певних обмеженнях на послідовність $\{\psi(k),k\in\mathcal{N}\}$.

Нехай X - банаховий простір, $\mathfrak{U}$ - центрально-симетрична підмножина в X і L_n - довільний n-вимірний підпростір в X.

Означення. n-вимірним поперечником за Колмогоровим множини $\mathfrak{U}$ в просторі X називається величина

$$d_n(\mathfrak{U};X)=\inf_{L_n}\sup_{x\in\mathfrak{U}}\inf_{y\in L_n}\|x-y\|_X,$$

де $\|\cdot\|_X$ - норма в просторі X.

Позначимо через S множину функцій $\psi(\cdot)$, визначених на $[0;\infty)$, не зростаючих і таких, що функції $1/\psi(\cdot)$ випуклі вниз або вгору на $[1;\infty)$.

Має місце наступний результат.

Теорема 2.2.3. Нехай $G\in\mathfrak{F}$, $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}\cap S$ і $\beta\in\mathbb{R}$ або $\psi\in\mathfrak{M}_0\cap S$ і $\beta=0$. Тоді

$$d_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(\Gamma);A(\bar{G}))\asymp\psi(n).$$

Зазначимо, що умови теореми 2.2.3 задовольняють, наприклад, функції $\psi_1(t)=t^{-r}$ $(r>0)$, $\psi_2(t)=e^{-\alpha t^r}$ $(\alpha\geq 1, r>0)$, $\psi_3(t)=\ln^{-r}(t+e)$ $(r>0)$.

Найбільш близьким до результату теореми 2.2.3 є результат В.М.Коновалова (див. Коновалов В.Н. К задаче о поперечниках классов аналитических функций // Укр. мат. журн. - 1978. - 30, № 5. - С. 668-670).

В третьому розділі результати розділу 2 поширюються на інтегральну метрику простору $\tilde{\mathcal{A}}_p(\bar{G})$.

§ I допоміжний. Спочатку наводяться достатні умови на послідовність $\{\psi(k), k\in\mathcal{N}\}$, за яких має місце включення $L^{\psi}_{\beta}\tilde{L}_p(\Gamma)\subset L_q(\Gamma)$ для різних співвідношень між p і q $1<p,q<\infty$. Потім формулюється один відомий результат, що має відношення до теорії граничних властивостей інтегралів типу Коші. З нього виводиться наслідок 3.I.2, який дає змогу обгрунтування коректності постановки задач про наближення функцій із класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\tilde{L}_p(\Gamma)$ за нормою простору $\tilde{\mathcal{A}}_q(\bar{G})$, і істотно використовується при розв"язуванні таких задач.

В цьому ж параграфі визначається множина RM_p, $1<p<\infty$, замкнених спрямовних жорданових кривих Γ, що вдовольняють наступні умови:

I) криві Γ регулярні, тобто $\forall\zeta\in\Gamma$, $\forall r>0$

$$\mu(\Gamma\cap\{z\in\Gamma: |\zeta-z|<r\})\leq C_0 r,$$

де μ - міра Лебега на Γ, C_0 - стала, яка залежить від Γ;

2) для функції $\Phi'(\cdot)$ виконується умова Маккенхаупта, тобто існує стала C така, що

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int\limits_{B(z;r)\cap\Gamma}|\Phi'(\zeta)||d\zeta|\right)\left(\frac{1}{r}\int\limits_{B(z;r)\cap\Gamma}|\Phi'(\zeta)|^{-\frac{1}{p-1}}|d\zeta|\right)^{p-1}\leq C,$$

де $B(z;r)$ - круг з центром в точці z з радіусом r.

В § 2 розглянуті питання про найкраще наближення окремих функцій, що належать до множини $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta}\tilde{L}_p(\Gamma)$, і про найкраще наближення класів $\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$ за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня в просторі $\tilde{\mathcal{A}}_q(\bar{G})$, $1<p,q<\infty$.

Покладемо $\forall f \in \tilde{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})$

$$E_n(f)_{\tilde{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_{n-1}} \| f(\cdot) - P_n(\cdot) \|_{\tilde{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})},$$

де $\mathcal{P}_{n-1}$ – простір алгебраїчних поліномів по $z \in G$, степінь яких не перевищує $n-1$;

$$E_n(\mathfrak{R})_{\tilde{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})} = \inf_{f \in \mathfrak{R}} E_n(f)_{\hat{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})},$$

де $\inf$ береться по всіх функціях $f(\cdot)$ із множини $\mathfrak{R} \subset \tilde{\mathfrak{A}}_q(\bar{G})$.

Далі, при фіксованому $\alpha \geq 0$ позначимо через $P_\alpha^{(n)}$ множину послідовностей $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ таких, що виконуються співвідношення

$$\nu_\alpha(\psi_n) = \sup_k |\psi_n(k)| k^\alpha \ll \nu(n) n^\alpha,$$

$$\sigma_\alpha(\psi_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_n(k) k^\alpha| \ll \nu(n) n^\alpha,$$

де

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi(k), & k \geq n, \end{cases}$$

$$\nu(n) = \nu(\psi; n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)|.$$

Якщо послідовність $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ додатна, а $\{\psi(k) k^\alpha\}$ не зростає, то будемо записувати це так: $\psi \in I_\alpha$.

Через $P_{0,c}$ позначимо множину додатних послідовностей $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ таких, що

$$\max_{n \leq k \leq 2n} \frac{\nu(n)}{\psi(k)} \leq K_1$$

і

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^r}^{2^{r+1}} |h(k+1) - h(k)| \leq K_2,$$

$$h(k)=\begin{cases} 0, & 0\le k\le n-1,\ k>2n, \\ \dfrac{\nu(n)}{\psi(k)}, & n\le k\le 2n, \end{cases}$$

а K_1 і K_2 - сталі, які не залежать від n.

Зазначимо, що $P_{0,c}\supset tr\,\mathfrak{M}_0$, де $tr\,\mathfrak{M}_0$ - множина послідовностей, які є слідами функцій $\psi(\cdot)$ із $\mathfrak{M}_0$ на множині $\mathbb{N}$.

Наведемо два результати із § 2.

Теорема 3.2.3. Нехай $\Gamma\in RM_q$, $1<q\le p<\infty$ і $\psi\in P_0^{(n)}$, $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді

$$E_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\times\mathcal{E}_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp\nu(n)$$

Зокрема, якщо $\psi\in I_0$, тобто послідовність $\{\psi(k),k\in\mathbb{N}\}$ додатна і не зростає, то

$$E_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp$$
$$\times\,\mathcal{E}_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp\psi(n). \qquad (6)$$

Теорема 3.2.4. Нехай $\Gamma\in RM_q$, $1<p<q<\infty$ $\alpha=1/p-1/q$, і $\psi\in P_\alpha^{(n)}\cap P_{0,c}$, $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді

$$E_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\times\mathcal{E}_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp\nu(n)n^{\alpha}$$

Зокрема, якщо $\psi\in I_\alpha\cap P_{0,c}$, то

$$E_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp$$
$$\times\,\mathcal{E}_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\tilde{A}_q(\bar{G})}\asymp\psi(n)n^{\alpha}. \qquad (7)$$

В тому випадку, коли послідовність $\{\psi(k),k\in\mathbb{N}\}$ додатна і досить швидко опадає до нуля при $k\to\infty$, оцінки (6) і (7) уточнюються (теореми 3.2.7 і 3.2.8).

В заключному, § 3, в припущенні, що $\Gamma\in RM_p$, отримані оцінки згори поперечників $d_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma);\tilde{A}_p(\bar{G}))$ у випадку, коли $\psi \in P_0^{(n)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$, а також їх оцінки знизу, коли послідовність $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ належить до множини $\tilde{P}$, що характеризується умовами

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} \left| 1/\tilde{\psi}_n(k+1) - 1/\tilde{\psi}_n(k) \right| \ll 1/\lambda(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

де

$$\tilde{\psi}_n(k) = \begin{cases} \psi(k), & 1 \le k \le n, \\ \psi(n), & k > n, \end{cases} .$$

$$\lambda(n) = \lambda(\psi; n) = \inf_{k \le n} |\psi(k)|.$$

Зокрема, згадані оцінки справедливі у випадку довільної додатної не зростаючої послідовності $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$, і співпадають за порядком.

Теорема 3.3.3. Нехай $\Gamma \in RM_p$, $1 < p < \infty$, послідовність $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ додатна і не зростає і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$d_n(\mathcal{K}L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma); \tilde{A}_p(\bar{G})) \asymp \psi(n). \tag{8}$$

У випадку, коли Γ - одиничне коло $|z| = 1$, а $\psi(k) = \left[\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)}\right]^{-1}$ $(k, r \in \mathbb{N},\ k > r)$, де Γ - гама-функція Ейлера, Л.В.Тайковим (1967) доведено, що при $n > r$ в (8) має місце точна нерівність.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру вдячність моєму науковому керівнику професору Олександру Івановичу СТЕПАНЦЮ за постановку задач, їх обговорення, а також за постійну увагу і підтримку в роботі.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Степанец А.И., Романюк В.С. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение их линейными средними рядов Фабера // Приближение классов (ψ, β)-дифференцируемых аналитических функций в жордановых областях. - Киев, 1992. - С. 1 - 28. - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 92.15).
2. Романюк В.С. Наилучшие приближения и поперечники классов (ψ, β)-дифференцируемых функций комплексного переменного. - Там же. - С. 29 - 52.
3. Романюк В.С. О наилучшем приближении и поперечниках по Колмогорову классов аналитических функций. - Киев, 1992. - 40 с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 92.20).
4. Степанец А.И., Романюк В.С. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение линейными средними их рядов Фабера // Укр. мат. журн. - 1992. - 44, № 11.

Підп.до друку 27.I0.92. Формат 60х84/I6. Папір друк. Офо. друк. Ум.-друк.арк. I,04. Ум.фарб.-відб. I,04. Обл.-вид.арк. 0,9. Тираж I00 прим. Зам. 4I8. Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України
25260I Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3