АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ

На правах рукописи

КИРИЧИНСКАЯ Ирина Богдановна

ОДНОТОЧЕЧНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

01.01.05 - теория вероятностей и
математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

бота выполнена в отделе случайных процессов Института
ики АН Украины.

ный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ШУРЕНКОВ В.М.

иальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ПОРТЕНКО Н.И.

кандидат физико-математических наук
доцент КОПЫТКО Б.И.

едущая организация: Донецкий институт прикладной математики и механики АН Украины.

Защита состоится "22" декабря 1992 г. в 15 ч. на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601, Киев-4, ГСП, ул. Репина, 3.

Автореферат разослан "20" ноября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета ГУСАК Д.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная работа посвящена проблемам одноточечных продолжений марковского процесса и получению характеристик продолженного процесса. Задача продолжения обрывающегося однородного стохастически непрерывного строго марковского процесса до необрывающегося однородного стохастически непрерывного феллеровского строго марковского процесса состоит в нахождении вида резольвенты продолженного процесса и свойств основных характеристик продолженного процесса.

Проблемами продолжения марковских процессов занимались Дынкин Е.Б. /Дынкин Е.Б. О продолжениях марковского процесса// Теория вероятностей и её применения. - 1968. - Т. 13. - № 4.- С. 708 - 713.//, М.Мотоо/ M. Motoo. Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes (Levy's system of T-processes) // Proc 5-th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob II Part II, 1967, p 75-110/.

Е.Б. Дынкин и А.А. Юшкевич показали, что характеристический оператор процесса размножения и гибели в граничной точке характеризуется некоторой постоянной β - коэффициентом поглощения, π - мерой скачков и коэффициентом отображения α /Теоремы и задачи о процессах Маркова. - М: Наука. - 1967. - 232 с./.

Вторая задача, которая рассматривалась в диссертации, - применение общих результатов об одноточечных продолжениях к процессам с независимыми приращениями на полуоси.

Для процессов с односторонними скачками представление резольвенты обрывающегося процесса было получено в работе В.Н.Супруна и В.М. Шуренкова "О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. - С. 170-174 . В более общем виде эта задача решена Н.С. Братийчуком /Н.С. Братийчук, Д.В. Гусак. Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. - К: Наук. думка, 1990.-260 с/.

Частным случаем задачи об одноточечном продолжении является задача о склейке двух процессов броуновского движения, которую рассматривали Б.И. Копытко и Н.И. Портенко /Замечание о склеивании из двух процессов броуновского движения//Некоторые вопросы теории случайных процессов : Сб. научн. тр. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С. 67-78/.

В данной диссертации рассматривается задача продолжения обрывающегося процесса путем присоединения к пространству одной точки. Далее рассматривается процесс, полученный обрывом некоторого заданного процесса с независимыми приращениями. На основании полученных ранее результатов строится продолжение обрывающегося процесса.

Цель работы.

- Нахождение характеристик продолженного процесса, а также изучение их свойств.
- Применение общих результатов к процессам с независимыми приращениями.

Общая методика выполнения исследований. В работе используются теория марковских процессов и теория процессов с независимыми приращениями, а также элементы теории меры и функционального анализа.

Новизна результатов.

I. Показано, что одноточечные продолжения в общем случае характеризуются неотрицательной постоянной $l \geq 0$, σ-конечной мерой $N(dy)$ на пространстве E и конечной мерой $M(dz)$ на пространстве входов ∂E.

2. Показано, что найденные характеристики однозначно определяют резольвенту необрывающегося однородного стохастически непрерывного феллеровского строго марковского процесса.

3. Применение полученных результатов к продолжению марковского процесса, который получен обрывом некоторого процесса с независимыми приращениями.

4. Склейка двух процессов с независимыми приращениями.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в ряде вопросов теории случайных процессов.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на семинаре по теории вероятностей Института математики АН Украины, на семинаре по теории вероятностей и математической статистике Львовского университета, а также на Международной конференции, посвященной IOO-летию Стефана Банаха /Львов, 1992 г./.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [I - 4].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы, содержащей 22 названия. Общий объем работы 73 страницы машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении приведены основные определения и утверждения, которые используются в работе, а также изложены основные результаты.

В первой главе рассматривается некоторый метрический компакт E. Пусть $\sigma \in E$. Обозначим $E_\sigma = E \setminus \{\sigma\}$. В E_σ рассматриваем обрывающийся однородный стохастически непрерывный строго марковский процесс X_t^σ. Резольвенту этого процесса обозначим через $G_\lambda f(x)$, $f \in C$ /здесь C - пространство непрерывных функций/.

Задача состоит в построении продолжения X_t^σ до необрывающегося однородного стохастически непрерывного строго марковского феллеровского процесса X_t в E и описанию характеристик всевозможных продолжений. Обозначим через $R_\lambda f(x)$ $(f \in C)$ резольвенту продолженного процесса. Если ζ - момент первого попадания в точку σ процесса X_t, то справедливо соотношение

$$G_\lambda f(x) = M_x \int_0^\zeta e^{-\lambda t} f(X_t)\,dt, \quad f \in C.$$

Рассматриваем семейство псевдометрик

$$\rho_\lambda f(x,y) = |K_\lambda f(x) - K_\lambda f(y)|, \ \lambda > 0, \ f \in C;$$

здесь

$$K_\lambda f(x) = \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)},$$

и пусть $\hat{E}$ - пополнение E_σ по этой системе псевдометрик, а $\partial\hat{E} = \hat{E} \setminus E_\sigma$.

Суть нижеприведенных теорем состоит в том, что искомые всевозможные продолжения полностью определяются постоянной $\ell \geq 0$, σ -конечной мерой $N(dz)$ на E и конечной мерой $M(dy)$ на $\partial\hat{E}$.

Обозначим $q(x) = M_x(1 - e^{-s})$.

Теорема I.I. Любому продолжению процесса X_t^σ до необрывающегося однородного стохастически непрерывного феллеровского строго марковского процесса X_t, $t \geq 0$, соответствуют постоянная $\ell \geq 0$, конечная мера $M(dz)$ на $\partial\hat{E}$, мера $N(dy)$ на E_σ с $N\{\sigma\} = 0$,

$$\int_E q(y)\, N(dy) < +\infty$$

такие, что

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + M_x e^{-\lambda s} R_\lambda f(\sigma),$$

$$R_\lambda f(\sigma) = \frac{\ell f(\sigma) + \int_E G_\lambda f(y)\, N(dy) + \int_{\partial\hat{E}} \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(z)\, M(dz)}{\lambda\, C_\lambda}$$

$f \in C$.

$$C_\lambda = \ell + \int\limits_E G_\lambda 1(y) N(dy) + \int\limits_{\partial\hat{E}} \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(z) M(dz);$$

при этом, если $\ell = 0$ и $M(\partial\hat{E}) = 0$, то $N(E) = +\infty$.

Теорема I.2. В условиях теоремы I.I $R_\lambda f(x)$ определяет резольвенту однородного стохастически непрерывного необрывающегося феллеровского строго марковского процесса X_t.

Во второй главе рассматривается применение теорем I.I и I.2 к процессам с независимыми приращениями. Пусть X^1_t - однородный необрывающийся стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Он является феллеровским и строго марковским. Пусть a - коэффициент сноса /переноса/ процесса, $b \geq 0$ - коэффициент диффузии, $\Pi(dx)$ - спектральная мера процесса. Напомним, что эти величины определяются из соотношения

$$k(z) = \frac{1}{t} \ln M e^{izX^1_t} = -\frac{b}{2} z^2 + iaz +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geq 1} (e^{izx} - 1) \Pi(dx) + \int\limits_{0 < |x| \leq 1} (e^{izx} - 1 - izx) \Pi(dx),$$

$k(z)$ называется кумулянтой процесса X_t.

Предположим, что в начальный момент времени процесс находится на положительной полуоси в т. x и справедливо одно из двух условий:

1/ $(\mathrm{Var}\, X_t^1 = +\infty) \wedge ((b \neq 0) \vee$

$$\vee \left(\int_{-1}^{0} x\, \Pi(dx) = +\infty \right));$$

2/ $$(\mathrm{Var}\, X_t^1 < +\infty) \wedge \left(a - \int_{0<|x|\le 1} x\, \Pi(dx) < 0 \right).$$

Условия 1/ и 2/ гарантируют то, что при $x \to a$ момент первого достижения $(-\infty; 0]$ также стремится к нулю.

От процесса X_t^1 переходим к обрывающемуся однородному стохастически непрерывному строго марковскому процессу X_t^0, причем $X_t^0 = X_t^1 \, (t < \zeta)$ в $(0; +\infty)$.

Здесь ζ - момент первого попадания процесса X_t^1 в $(-\infty; 0]$.

<u>Теорема 2.I.</u> Существует продолжение X_t^0 до однородного стохастически непрерывного необрывающегося феллеровского строго марковского процесса X_t, заданного в $[0; +\infty)$, и это продолжение характеризуется неотрицательными постоянными l, C, а также мерой $N(dy)$ на $[0; +\infty)$ с

$$N\{0\} = 0, \quad \int_0^{\infty} q(y)\, N(dy) < +\infty.$$

Резольвента продолженного процесса имеет вид

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1(x)) \cdot$$

$$\frac{\int\limits_0^{\infty} G_\lambda f(y)\,N(dy) + c\,\dfrac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(0+)}{\lambda\left(\ell + \int\limits_0^{\infty} G_\lambda 1(y)\,N(dy) + c\,\dfrac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(0+)\right)}.$$

Здесь $G_\lambda f(x)$ - резольвента X_t^0.

Существенным моментом приведенной выше теоремы является то, что пополнение по псевдометрике $K_\lambda f(x)$ $(0;+\infty)$ состоит из одной точки, которую мы обозначим через $0+$. Это следует из того, что при $x \to 0$ предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)} \quad \text{существует}.$$

Существование предела следует из представления резольвенты обрывающегося процесса.

Далее рассматриваем склейку двух процессов с независимыми приращениями, причем один из них без положительных скачков.

Пусть заданы два необрывающихся марковские процессы с независимыми приращениями X_t^1, X_t^2, которые являются однородными, стохастически непрерывными и, значит, феллеровскими, строго марковскими.

Их кумулянты $k_1(z)$, $k_2(z)$ соответственно равны

$$k_1(z) = \frac{1}{t} \ln M e^{izX_t^1} = -\frac{b_1}{2} z^2 + a_1 iz +$$

$$+\int\limits_{0<|x|\le 1}\left(e^{izx}-1-izx\right)\Pi_1(dx)+\int\limits_{|x|\ge 1}\left(e^{izx}-1\right)\Pi_1(dx),$$

$$k_2(z)=\frac{1}{t}\ln M e^{zX_t^2}=a_2 z+\frac{b_2}{2}z^2+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{zx}-1-\frac{zx}{1+x^2}\right)\Pi_2(dx).$$

Если X_t^1-процесс неограниченной вариации, то должно выполняться хотя бы одно из приведенных ниже условий:

1/ $b_1\neq 0$,

2/ $\int\limits_{-1}^{0}x\,\Pi_1(dx)=+\infty$.

Когда же вариация X_t^1 ограничена, то

$$a_1-\int\limits_{0<|x|\le 1}x\,\Pi_1(dx)<0.$$

Для процесса X_t^2 при условии неограниченной вариации необходимо, чтобы $b_2\neq 0$, когда же вариация ограничена

$$a_2-\int\limits_{0<|x|\le 1}x\,\Pi_2(dx)>0.$$

Приведенные выше условия гарантируют, что момент первого попадания в т. 0 стремится к нулю, при условии, что в начальный момент времени X_t^0 находится в т. x и $x \to 0$. X_t^0 определяется следующим образом:

X_t^0 - обрывающийся однородный стохастически непрерывный строго марковский процесс, определенный в $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, причем

$$X_t^0 = X_t^1, \text{ если } X_t^0 > 0$$

$$X_t^0 = X_t^2, \text{ если } X_t^0 < 0,$$

и пусть $G_\lambda f(x)$ - резольвента процесса X_t^0.

<u>Теорема 2.2.</u> Существует продолжение X_t^0 до однородного необрывающегося стохастически непрерывного феллеровского строго марковского процесса X_t, заданного в $(-\infty; +\infty)$, и это продолжение характеризуется мерой $N(dy)$ и неотрицательными постоянными l, c_1, c_2, а резольвента продолженного процесса имеет вид

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1(x)) \cdot$$

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda f(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(0+) - c_2 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(0-)}{\lambda \left(l + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda 1(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(0+) - c_2 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(0-)\right)},$$

$$f \in C$$

В этом случае пополнение по системе псевдометрик $K_\lambda f(x)$ состоит из двух точек $0+$, $0-$. Этот результат следует из того, что существуют пределы

$$\lim_{x \to 0+} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)} , \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)} ,$$

которые в общем случае не совпадают.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Щуренков В.М., Киричинская И.Б. Одноточечные продолжения марковского процесса // Стохастический анализ и его приложения: Сб. науч . тр. - Киев: Ин-т математики АН УССР, I989.- С. II3 - I20.

2. Киричинская И.Б. Продолжения полунепрерывных процессов с независимыми приращениями // Укр.мат.журн. - I99I. - т.43. - № 9. - с. I269 - I272.

3. Киричинская И.Б. Склеивание двух полунепрерывных процессов с независимыми приращениями // Укр.мат.журн. - I99I. - т.43. - № 5. - С. 596 - 600

Подп. в печ. 5.08.92 Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс.печать.
Усл.печ. л. 0,93. Усл.кр.-отт. 0,93 Уч.-изд.л. 0,65.
Тираж 100 экз. Зак. 320 Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул.Терещенковская, 3