ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЖОЗЕ ДА КОСТА ЖОАКИМ

МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ

01.01.01 - математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Харьков - 1992

Работа выполнена на кафедре математического анализа Харьковского государственного университета

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Белицкий Г. Р.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Житомирский Я. И. (ХАДИ); кандидат физико-математических наук, доцент Кучко Л. П. (ХГУ).

Ведущая организация - Физико-технический институт низких температур Академии Наук Украины (г. Харьков).

Защита состоится " 4 " Декабря 1992 г. в 15^{15} часов на заседании специализированного совета К 053.06.02 в Харьковском государственном университете (310077, г. Харьков, пл. Свободы, No 4, ауд. 6/48).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Харьковского государственного университета.

Автореферат разослан " 18 " ноября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Сохин А. С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория функциональных уравнений /ф. у./ является классическим объектом исследования в математике. Особая роль этой теории обусловлена тем, что необходимость изучения тех или иных специальных ф. у. возникает в самых разнообразных разделах науки. Поэтому многие уравнения носят имена известных ученых прошлого - Коши, Абеля, Римона и других.

В настоящее время интерес к ф. у. значительно возрос в связи с интенсивным развитием теории динамических систем. При этом возникает все большая потребность в построении общих методов. Достаточно полная картина ф. у. на прямой /от одной переменной/ отражена в известной монографии Кучмы. Однако, многомерная теория динамических систем предполагает изучение уравнений на многомерных многообразиях. Примером многомерного ф. у., систематически изучаемого в теории динамических систем, является уравнение сопряженности отображений. Один из подходов к общей теории многомерных ф. у. излогается в работах А. Н. Шарковского и его учеников. Ряд общих многомерных методов предложен Г. Р. Белицким.

В диссертации развиваются методы изучения многомерного ф. у.

$$g(x, \varphi(x), \varphi(Fx)) = 0$$

в котором F и g заданные гладкие отображения гладких многообразий.

В работе найдены условия на заданные отображения, при которых уравнение имеет гладкое или непрерывные решение; для линейных уравнений найдены условия существования нетривиальных решений. Изучается также задача описания всех решений. Здесь мы следуем подходу, восходящему к Пуанкаре и широко используемому в современной динамике. А именно, для описания решений заданного уравнения мы приводим его с помощью естественных преобразований к так называемой нормальной форме, т.е. к такому более простому уравнению, задача описания решений которого не составляет труда.

Цель иследования:

- найти условия существования непрерывных или гладких решений многомерного ф.у.;

- найти условия существования нетривиальных решений линейного ф.у.;

- выяснить, насколько приведенные условия точны /близки к необходимы/;

- указать нормальную форму ф.у. относительно преобразования аргумента и неизвестной вектор-функции.

Методика исследования. Условия разрешимости ф.у. полученные в работе, формулируются в терминах динамических свойств заданных отображений. Для этого мы развиваем новые приемы доказательства существования решения, основанные на понятии аттрактора и репеллера. Наряду с этим новыми приемами нами используются и более стандартные методы, основанные на принципе неподвижной точки.

Научная новизна. В диссертации вводятся и исследуются понятия аттрактора и репеллера диффеоморфизма гладкого многообразия.

Полученные на основе этих понятий результаты являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказано, что при естественных условиях обратимости на отображение g, каждое решение в окрестности репектора продолжается до решения в целом.

2. Как следствие доказано, что если F обладает аттрактором и репеллером с пустым пересечением, то уравнение имеет решение.

3. Найдены условия типа сжатия существования решений разрешенного многомерного ф. у.

$$\varphi(x) = h(x, \varphi(Fx))$$

4. Найдены условия, при которых многомерное линейное однородное уравнение

$$\mathcal{A}(x)\varphi(x) + \mathcal{B}(x)\varphi(Fx) = 0,$$

имеет нетривиальное решение.

5. Найдена нормальная форма уравнеия

$$\varphi(x) = h(x, \varphi(Fx)),$$

в котором отображение

$$G(x,y) = (Fx, h(x,y))$$

является диффеоморфизмом, а F обладает аттрактором и репеллером с пустым пересечением.

Полученные нами условия существования решения и существования нетривиальных решений, как показывают примеры, близки к необходимым.

Заметим, что используемые нами понятия аттрактора и репеллера несколько отличаются от общепринятых /см. определение 2/, а репектор - это пересечение аттрактора и репеллера.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут послужить основой для дальнейшего развития общих теорий ф. у. Они могут оказаться полезными в различных задачах анализа, качественной теории динамических систем, эргодической теории и других областях.

Апробация работы. Результаты работы систематически докладывались на семинарах по теории динамических систем в Харьковском госуниверситете /1989 - 1991 гг., руководитель Г. Р. Белицкий/, на семинарах по уравнениям в частных производных в Харьковском госуниверситете /1989 - 1991 гг., рукодитель профессор В. М. Борок/.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и четырех глав, подразделенных на одинадцать параграфов. Работа снабжена оглавлением и библиографией из 10 наименований. Она занимает 80 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, дается краткая историческая справка и обзор литературы, а также сообщается краткое содержание диссертации по параграфам.

Глава 1. Примеры и описание преобразований.

§ 1. Некоторые конкретные уравнения.

В этом параграфе рассматриваются примеры уравнений, иллюстрирующие связь между разрешимостью и динамикой заданных отображений.

Вопрос о разрешимости уравнения

$$g(x, \varphi(x), \varphi(Fx)) = 0,$$

тесно связан с динамикой отображения F.

Определение 1. Точка $x_0 \in M$ называется неблуждающей для диффеоморфизма $F: M \to M$, если для любой её окрестности U, существует такой номер $n = n(U)$, что

$$F^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Наличие неблуждающих точек обычно препятствует существованию решений.

Например хорошо известно, что уравнение на окружности $(M = S^1)$

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) = \gamma(x), \quad x \in S^1 \qquad (1)$$

вообще говоря не имеет решении того же класса гладкости, что и правая часть (здесь $F(x) = x + \alpha$ и α - иррационально, то все точки неблуждают).

Однако, C^∞ - разрешимость уравнения (1) при любой правой части $\gamma \in C^\infty$ ($\gamma_0 = 0$) ветекает из условия Зигеля.

§ 2. Диффеоморфизмы с аттрактором и репеллером.

Определение 2. Замкнутое множество $\mathcal{U}_+ \in M$ называется аттрактором относительно диффеоморфизма F , если выполняются следующие условия:

1. $F(\mathcal{U}_+) \subset \mathring{\mathcal{U}}_+$.

2. $\bigcup\limits_{n \geq 0} F^n(\mathcal{U}_+) = M$.

Определение 3. Замкнутое множество $\mathcal{U}_- \subset M$ называется репеллером для F , если оно ябляется аттрактором для F^{-1} .

Теорема. Если существуют неблуждающие точки для диффеоморфизма F , то они содержатся в множестве $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$.

§ 3. Обратимость по переменным.

В предыдущем параграфе, мы определили те динамические условия на F , которые в дальнейшем обеспечат разрешимость уравнения.

Кроме этих условий на F , возникают условия обратимости отображения $g(x, y_1, y_2)$.

Определение 4. Отображение $g(x, y_1, y_2): M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется обратимым по переменной y_1 , если существует такое C^K - отображение $h(x, z, y_1, y_2): M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что

1. $g\left(x, h(x,z,y_1,y_2), y_2\right) = z$

2. $h\left(x, g(x,y_1,y_2), y_1, y_2\right) = y_1$

при всех $x \in M$, $z \in \mathbb{R}^m$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Аналогично определяется обратимость по переменной y_2 .

Глава 2. Продолжение решений.

Основной результат настоящей главы заключается в том, что каждое решение уравнения

$$g\left(x, \varphi(x), \varphi(Fx)\right) = 0 \tag{1}$$

где $g: M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - отображение класса C^k , в окрестности репектора продолжается до решения в целом.

§ 1. Нелинейные уравнеия.

Пусть U_+ , U_- , U_0 - аттрактор, репеллер и репектор для F соответственно.

Положим $V_0 = U_+ \cap F(U_-) \supset U_0$.

Теорема 1. Пусть отображение $g(x, y_1, y_2)$ обратимо по каждой из переменной y_1 , y_2 . Тогда для каждого решения $\varphi_0(x) \in C^k$ уравнения (1) в окрестности U_0 , существует такое решение /в целом/ класа C^k , которое совпадает с решением φ_0 на множестве V_0.

В частности, если $V_0=\emptyset$, то теорема гарантирует разрешимость.

§2. Линейные уравнения.

В этом параграфе мы рассматриваем уравнения вида

$$\mathcal{A}(x)\varphi(x)+\mathcal{B}(x)\varphi(Fx)=\gamma(x), \tag{2}$$

где $\varphi: M\to\mathbb{C}^m$ - неизвестная вектор-функция $\mathcal{A},\mathcal{B}: M\to Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$ заданные C^∞ - матрицы-функции, $F: M\to M$ - заданный C^K -диффеоморфизм, $\gamma: M\to\mathbb{R}^m$ - заданная C^K - функция.

Пусть

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}=\{x: rg\,\mathcal{A}<n\}\ ;\ \mathcal{S}_{\mathcal{B}}=\{x: rg\,\mathcal{B}<n\}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\mathring{U}_+\supset\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ 2. $\mathring{U}_-\supset\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$

Тогда для каждого решения $\varphi\in C^K$ уравнения (2) в окрестности U_0, существует такое решение /в целом/ класса C^K, которое совпадает с решением φ на множестве V_0.

§3. Линейные однородные уравнения.

Здесь мы изучаем уравнения вида

$$\mathcal{A}(x)\varphi(x)+\mathcal{B}(x)\varphi(Fx)=0. \tag{3}$$

Пусть существует открытое подмножество $V\subset M$ для которого выпонены следующие условия:

1. $\overline{F^n_{n\in Z}(V)}\cap\overline{V}=\phi$.

2. $\overline{\bigcup_{n\in Z}F^n(V)}=\bigcup_{n\in Z}\overline{F^n(V)}$

3. $\overline{\bigcup_{n>0}F^n(V)}\cap\mathcal{S}_{\mathcal{B}}=\phi$, $\overline{\bigcup_{n\leq 0}F^n(V)}\cap\mathcal{S}_{\mathcal{B}}=\phi$.

Теорема 3. При выполнении этих условий уравнение (3) имеет нетривиальное решение.

Заметим, что если матрицы $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{B}(x)$ - квадратные ($m=n$), то определение множеств $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ сводится к следующему:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}=\{x:\det\mathcal{A}(x)=0\}\ ;\ \mathcal{S}_{\mathcal{B}}=\{x:\det\mathcal{B}(x)=0\}.$$

Глава 3. Существование решения.

В этой главе мы рассматриваем вопрос о существовании решения многомерного ф. у. вида

$$\varphi(x)=g\left(x,\varphi(Fx)\right) \tag{4}$$

В этом уравнении $F:M\to M$ - заданное гладкое отображение многообразия в себя, но не обязательно диффеоморфизм. Однако, понятие аттрактора, очевидно переносится и на этот случай.

Предполагается, что M - многообразие снабженное римановой метрикой, может иметь край. Однако, для наших целей вполне достаточно считать, что многообразие M вложено в Евклидово пространство $\mathbb{R}^s(M\subset\mathbb{R}^s)$, а римонова метрика на M индуцирована из объемлющего пространства.

В частности, растояние между точками $x, z\in M$ есть

$$\rho(x,z)=\|x-z\|,$$

где $\|\cdot\|$ - норма в $\mathbb{R}^m$.

§1. Уравнение с аттрактором.

Пусть $\mathcal{U}\subset M$ аттрактор для F .

Теорема 1. Пусть F , $g\in C^K$. Тогда для всякого решения φ_0 уравнения (4) на $\mathcal{U}$, найдется единственное C^K -решение в целом, совпадающее с φ_0 на $\mathcal{U}$.

В силу этой теоремы, для доказательства разрешимости уравнения (4), достаточно доказать его разрешимость в окрестности аттрактора. Мы докажем это в предположении, что отображения g и F удовлетворяют тем или иным условиям сжатия.

В формулируемых ниже теоремах предполагается ограниченность на аттракторе "свободного членая", т.е.

$$a_0=\sup_{x\in\mathcal{U}}\|g(x,0)\|<\infty$$

Теорема 2. Пусть отображения g и F непрерывны, и кроме того, выполняется следующее условие

$$\|g(x,y)-g(x,z)\|\le C\|y-z\|,\ C<1$$

где $x\in\mathcal{U}$ и $y, z\in\mathbb{R}^m$.

Тогда уравнение (4) имеет единственное, непрерывное ограниченное на $\mathcal{U}$ решение во всем M.

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{U}\\ y\in\mathbb{R}^m}} \left(\|g_y'(x,y)\|\cdot\|F'(x)\|^p\right) \le q < 1, \quad (p=0,1,\dots,K)$

2. $\sup\limits_{x\in\mathcal{U}} \|F'(x)\| \le 1$

3. производные $F^{(p)}(x)$, $(p=1,2,\dots,K)$ ограничены и равномерно непрерывны на $\mathcal{U}$;

4. производные $g^{(p)}(x,y)$ $(p=1,2,\dots,K)$ ограничены и равномерно непрерывны на любом множестве $\mathcal{U}\times V$, где $V\subset\mathbb{R}^m$ -компакт.

Тогда уравнение (4) имеет единственное ограниченное на $\mathcal{U}$, C^K-решение на M.

Очевидно, что условие равномерной непрерывности относится к старшим производным $F^{(K)}(x)$, $g^{(K)}(x,y)$, если $K<\infty$.

Заметим, что в случае, когда $\mathcal{U}$ компакт, то из теоремы 3 вытекает следствие.

Следствие. Пусть $\mathcal{U}\subset M$ - компакт на произвольном многообразии M, и пусть выполняются следующие условия:

1. $\sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{U}\\ y\in\mathbb{R}^m}} \left(\|g_y'(x,y)\|\cdot\|F'(x)\|^p\right) < 1, \quad (p=0,1,\dots,K)$

2. $\sup \|F'(x)\| \le 1$

а F, $g\in C^K$.

Тогда уравнение (4) имеет решение класса C^K.

Замечание. Теорема 2 доказана в классе ограниченных функций. Однако, при выполнении условий теоремы, уравнение (4) вообще говоря имеет на $\mathcal{U}$ неограниченное решение.

§ 2. Локальная разрешимость.

Рассмотрим ф. у. вида (1), где $F \in C^{\infty}$ - гиперболический локальный диффеоморфизм, $g \in C^{\infty}$, $\det g'_y(0,0,0) \neq 0$, $\det g'_z(0,0,0) \neq 0$.

Определение 5. Будем говорить, что φ_0 - формальное решение уравнеия (1), если отображение

$$\gamma(x) = g\left(x, \varphi_0(x), \varphi_0(Fx)\right)$$

является плоским в нуле. Это означает, что все производные в точке $x=0$ равны нулю.

Теорема 4. Если φ_0-формальное решение уравнения (1), то найдется такое C^{∞} - локальное решение $\varphi(x)$ у которого ряд Тейлора в нуле совпадает с рядом Тейлора формального решения φ_0.

§ 3. Некоторые примеры.

Объединяя глобальные результаты главы 1 с теоремой существования C^{∞} решения в целом.

Рассмотрим уравнение

$$g\left(x, \varphi(x), \varphi(\Lambda x)\right) \tag{5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - гиперболический линейный оператор, а $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ обратимое по каждой из переменных y и z, C^{∞} - отображение.

Из теоремы 4 вытекает, что если уравнение (5) формально разрешено в точке $x=0$, то оно имеет локальное решение.

Теорема 5. Если уравнение (5) имеет формальное решение в точке $x=0$, то оно имеет решение в целом.

Для того, чтобы уравнение имело формальное решение, очевидно, необходимо существования такого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^m$, что

$$g(0, y_0, y_0) = 0 \tag{6}$$

<u>Следствие.</u> Пусть существует такой вектор y_0, удовлетворяющий уравнению (6), что отсутствуют резонансы. Тогда уравнение (5) имеет глобальное C^∞ - решение $\varphi(x)$, для которого $\varphi(0) = y_0$.

Условия существования решения упрощаются для линейных уравнений

$$\mathcal{A}(x)\varphi(x) + \mathcal{B}(x)\varphi(\Lambda x) = \gamma(x) \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^s \to Hom(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$$
$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^s \to Hom(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$$

C^∞ - отображения.

<u>Следствие.</u> Пусть выполнено следующее условие

$$rg\left(\mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(0)\right) = p,$$

и отсутствуют резонансы. Тогда линейное уравнение (7) имеет глобальное C^∞ - решение при любой C^∞ - правой части $\gamma(x)$.

Глава 4. Классификация уравнений.

В этой главе развивается подход к изучению ф. у.

$$\varphi(x) = g(x, \varphi(Fx)), \tag{8}$$

основанный на приведении этого уравнения к возможно более простой "нормальной" форме.

Определение 6. Будем говорить, что уравнение (8) C^K -эквивалентно уравнению

$$\Psi(x) = \tilde{g}\left(x, \Psi(\tilde{F}x)\right), \tag{9}$$

если существует такое обратимое C^K - преобразование

$$x \longmapsto H(x)$$
$$\varphi(x) \longmapsto T(x, \Psi(x))$$

что

$$\tilde{F}(x) = H^{-1} F H(x) = (H^{-1} \circ F \circ H)(x)$$

$$T(x, \tilde{g}(x,y)) = g(x, T(Fx, y)), \quad y = \Psi(\tilde{F}x)$$

При этом, если $\Psi(x)$ - решение уравнение (9), то

$$\varphi(x) = T\left(H^{-1}(x), \Psi(H^{-1}(x))\right)$$

- решение уравнения (8).

§1. Линейные уравнения.

В этом параграфе мы рассматриваем задачу эквивалентности линейных уравнений

$$\mathcal{A}(x)\varphi(x) + \mathcal{B}(x)\varphi(Fx) = \gamma(x) \tag{$*$}$$

где F - отображение вида

$$F(x) = (\xi+1, h(\xi,\eta)), \quad (x = (\xi,\eta), \ \xi \in \mathbb{R}^1, \eta \in N)$$

Теорема 1. Пусть $\det \mathcal{A}(x) \neq 0$, $\det \mathcal{B}(x) \neq 0$ всюду. Тогда уравнение ($*$) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\Psi(x) + J\Psi(Fx) = 0$$

где $J = \mathrm{diag}(\pm 1, 1, \dots, 1)$, $\pm 1 = \mathrm{sign} \det \mathcal{A}^{-1}(x)\mathcal{B}(x)$.

§ 2. Нелинейные уравнения.

Здесь мы доказываем аналог теоремы 1 для нелинейных уравнений.

Рассмотрим диффеоморфизм

$$\Phi(x,y) = \big(H(x), T(x,y)\big). \tag{10}$$

Теорема 2. При $K \geqslant 1$ существует C^{K-1} диффеоморфизм вида (10), который приводит

$$G(x,y) = \big(Fx, g(x,y)\big),$$

к нормальной форме

$$G_H(\xi,\eta,y) = \big(\xi+1, h(\eta), \mathcal{I}y\big).$$

Функциональное уравнение (8), отвечающее G_H, является однородным линейным

$$\varphi\big(\xi+1, h(\eta)\big) = \mathcal{I}\varphi(\xi,\eta) \tag{11}$$

Тем самым, каждое решение уравнения (8) можно записать в виде

$$\varphi(x) = T\Big(H^{-1}(x), \Psi\big(H^{-1}(x)\big)\Big)$$

где $\Psi(x) = \Psi(\xi,\eta)$ - решение уравнения (11).

Вопрос об описании решений однородного уравнения (11) связан с дальнейшей классификацией диффеоморфизма вида

$$G_H(\xi,\eta,y) = \big(\xi+1, h(\eta), \mathcal{I}y\big).$$

В качестве приложения рассмотрим диффеоморфизм вида

$$F_0(x)=\mathcal{A}x+e,\ e\in\mathbb{R}^n,\ \mathcal{A}\in \mathcal{E}nd\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

Лемма. Если отображение F_0 не имеет неподвижных точек, то оно приводится к диффеоморфизму вида

$$(\xi+1,\ J_0\eta)$$

где $J_0=diag\,(-1,1,\dots,1)$.

Поэтому из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие. Каждое уравнение вида

$$\varphi(\mathcal{A}x+e)=g(x,\varphi(x))$$

где $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ - линейный невырожденный оператор, причем $e\notin Im\,(A-I)$ некоторым C^{k-1}-преобразованием (10) приводится к нормальной форме $G_н$

$$G_н(\xi,\eta,y)=(\xi+1,\ J_0\eta,\ Jy).$$

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность научному руководителю Г. Р. Белицкому за постановку задач и постоянную поддержку в работе.

Подп. к печ. 13.11.92.   Формат 60x84 1/16. Бумага тип.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0.   Уч.- изд. л. 1.0.
Тираж 100 экз. Зак. No 3953.   . Бесплатно.

Харьковское межвузовское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.