Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

УДК 330.115

ВЕЛИКИЙ Анатолій Павлович

МОДЕЛІ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ В ЗАДАЧАХ НАРОДНОГОСПОДАРСЬКОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

(на прикладі задач інформатизації Мінекономіки України)

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1992

Робота виконана в Головному науково-дослідному інституті з проблем інформатики (ІПІ) Міністерства економіки України.

Наукові консультанти: академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор КОРОЛЮК В. С.,

академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор СЕРГІЄНКО І. В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ПЕРЕПЕЛИЦЯ В. А.,

доктор фізико-математичних наук, професор ТУРБІН А. Ф.,

член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор ШОР Н. З.

Провідна організація: Київський університет ім. Т. Шевченка.

Захист відбудеться «25» 12 1992 р. о 14 год. годині на засіданні спеціалізованої ученої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розіслано «25» 11 1992 р.

Учений секретар
спеціалізованої ученої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Становлення України як самостійної держави, відхід від жорсткого централізованого планування і необхідність налагодження нової системи управління соціально-економічним розвитком в умовах ринкових відносин, що формуються, потребують створення та впровадження адекватного сучасного економіко-математичного компьютерного інструментарію. В рамках створення такого інструментарію в Інституті з проблем інформатики Мінекономіки України розробляється Система економіко-математичних комп'ютерних моделей комплексного аналізу, збалансованого прогнозування та регулювання соціально-економічного розвитку України. Система моделей передбачає узгодження широкого кола показників соціально-економічного розвитку України і її взаємодії з іншими країнами світу. Моделі системи містять показники макроекономіки, рівня життя народу, економії трудових ресурсів та зайнятості, фінансів та кредитів, грошового обігу, науково-технічного прогресу, інвестицій, цін, податкової політики, зовнішньоекономічних зв'язків, екології та ін. Складовою частиною системи економіко-математичних моделей є ряд моделей міжгалузевого балансу (МГБ) з явним врахуванням галузевих інвестиційних лагів. Ця модель, до якої як основні входять блок рівнянь балансу виробництва і розподілу продукції та блок балансу основних виробничих фондів, призначена для виконання узгоджених (за обсягами та в часовому вимірі) прогнозних розрахунків тенденцій нагромадження та використання продукції матеріального виробництва з врахуванням адекватної інвестиційної політики.

Незаперечні методичні переваги повністю динамічної моделі міжгалузевого балансу на відміну від статистичних та напівдинамічних моделей МГБ неодноразово відзначались в цілому ряді досліджень (С.О.Ашманов, Е.Ф.Баранов, О.О.Баранов, М.А.Гершензон, В.М.Глушков, О.А.Горюшин, О.Г.Гранберг, Ю.П.Іванілов, Л.В.Канторович, А.А. Конюс, О.В.Лотов, І.С.Матлін, Б.В.Мелентьєв, Дж.фон Нейман, Г.Г.Нікітін, В.К.Озеров, В.М.Павлов, Я.М.Урінсон, В.В.Щербінкін та ін.), і в першу чергу наголошувалось на тій обставині, що динамічні моделі дають змогу враховувати при формуванні показників економічного розвитку в кожному році планового періоду не тільки поточні потреби, вже досягнутий рівень нагромадження і використання виробничих ресурсів, а й передбачувані обсяги розширення виробничої бази з метою забезпечення стійкого збалансованого зростання в майбутньому. Ці моделі дозволяють, крім того, більш повно враховувати роль цін при прогнозуванні динаміки народного господарства на перспективу.

Поряд з тим, незважаючи на зазначені методологічні переваги, повідомлення про практичне застосування повністю динамічних моделей міжгалузевого балансу є нечисленними, що зумовлено виникаючими при цьому значними труднощами як щодо можливості побудови ефективних обчислювальних алгоритмів, так і відносно забезпечення цих розрахунків необхідною початковою інформацією.

Труднощі чисельної реалізації повністю динамічної моделі МГБ пов'язані з тим, що відповідна обчислювальна задача навіть при помірній кількості галузей, що входять до моделі, є задачею великої розмірності, і, крім того, матриця коефіцієнтів відповідної системи рівнянь може бути погано обумовленою.

Актуальність дослідження. В дисертаційній роботі на прикладі динамічної моделі міжгалузевого балансу досліджено джерела та причини ряду обчислювальних труднощів, що виникають при практичній реалізації деяких класів динамічних моделей, розроблено аналітичні та обчислювальні алгоритми для подолання цих труднощів, і на основі цих досліджень запропоновано систему ефективних машинних алгоритмів та програм для ЕОМ з метою виконання відповідних розрахунків.

В дисертації також показано, що результати проведених досліджень можуть бути застосовані і в динамічних моделях неекономічного змісту.

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є розв'язання наукової проблеми, що має важливе народногосподарське значення. Це розробка математичних методів та відповідних обчислювальних алгоритмів, спрямованих на практичну реалізацію динамічних моделей міжгалузевого балансу (а також деяких інших класів моделей) і таких, що забезпечують подолання обчислювальних труднощів, пов'язаних з великою розмірністю та поганою обумовленістю відповідних обчислювальних задач.

Методи дослідження. Як математичний апарат в дослідженні використані методи теорії різницевих та диференціальних рівнянь, методи граничних задач для таких рівнянь, і серед них зведення граничних задач до еквівалентних задач Коші, а також методи асимптотичного аналізу і обернення збурених на спектрі операторів. Використовуються також методи блочного обернення матриць великої розмірності.

Наукова новизна. В дисертації одержані нові наукові результати, серед яких:

1. Розроблено варіант повністю динамічної моделі міжгалузевого балансу з виділенням фондостворюючих та нефондостворюючих галузей і врахуванням різних галузевих інвестиційних лагів. Досліджено умови розв'язуваності системи рівнянь моделі і знайдено певні умови, за яких модель не може мати збалансованих розв'язків.

2. Вивчено граничні задачі та еквівалентні щодо них задачі Коші для систем різницевих та диференціальних рівнянь, що є математичною основою розглядуваних моделей, та знайдено закономірності асимптотичної поведінки розв'язків цих граничних задач на великому часовому інтервалі.

3. Досліджено якісні властивості обчислювальних задач, що виникають при практичній реалізації розглядуваних моделей, і встановлено, що з обчислювальної точки зору мусимо мати справу з задачами, що відносяться до теорії операторів, збурених на спектрі.

4. Розроблено аналітичні та обчислювальні алгоритми розв'язування таких задач. В процесі побудови обчислювальних алгоритмів запропоновано нові ефективні алгоритми обернення матриць великої розмірності, і серед них матриць, збурених на спектрі. При цьому запропоновано узагальнення відомих формул Фробеніуса щодо обернення блочних матриць. Побудовано паралельні алгоритми обернення матриць великої розмірності і наведено оцінки

обчислювальної складності цих алгоритмів.

5. На основі отриманих результатів виконано варіантні прогнозні розрахунки макропоказників соціально-економічного розвитку України по динамічній моделі міжгалузевого балансу, що входить до системи економіко-математичних комп'ютерних моделей комплексного аналізу, збалансованого прогнозування і регулювання соціально-економічного розвитку України.

Теоретична і практична цінність. Дисертаційна робота робить внесок в моделювання народногосподарських процесів, теорію граничних задач для диференціальних та різницевих рівнянь, в методи розв'язування задач лінійної алгебри великої розмірності. Розроблені в дисертації аналітичні та обчислювальні методи використано для виконання практичних прогнозних розрахунків відповідно до завдань Мінекономіки України.

Апробація роботи. Результати, що складають зміст дисертації, обговорювались на Всесоюзних, республіканських та міжвідомчих конференціях та семінарах з питань математичного моделювання та обчислювальних методів. Вони доповідались на Всесоюзній конференції з оптимального управління в механічних системах (Москва, 1974 р.), на Всесоюзному семінарі "Досвід розробки та створення діалогових (людина-машина) систем для автоматизації планових розрахунків і вдосконалення управління виробництвом" (Київ, 1985 р.), на Міжреспубліканській конференції з інтерактивних систем (Тбілісі, 1982 р.), на Міжреспубліканській науково-практичній конференції "Моделювання планових розрахунків і діалогова оптимізація" (Севастополь, 1990 р.), Міжреспубліканській науково-практичній конференції "Створення автоматизованої технології планування та інформаційне обслуговування планових працівників" (Таллінн, 1987 р.), Семінарі "Перспективи розвитку РАСУ УРСР" (Київ, 1987 р.), а також на наукових семінарах в Інституті кібернетики АН України (Київ), ГОЦ Держплану СРСР (Москва), Головндіоц Держплану України (Київ).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 25 праць.

Основні результати відображено в 15 роботах, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох глав, розбитих на параграфи, висновків, додатка та списку літератури. За обсягом робота складає 295 сторінок друкарського тексту. Бібліографія складає 146 найменувань. Основний текст дисертації містить 8 таблиць.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подається обгрунтування актуальності вибраної теми, визначено мету і задачі досліджень, сформульовано наукову новизну та практичне значення результатів. Наведено бібліографічний огляд щодо розглядуваної проблематики і подано короткий виклад основних результатів дисертаційної роботи.

В першій главі досліджується максимально агрегована динамічна модель, що в явному вигляді враховує інвестиційний лаг. Система рівнянь моделі включає рівняння балансу виробництва і розподілу продукції та рівняння балансу основних виробничих фондів і має такий вигляд:

$$x(t) = a(t)x(t) + \sum_{\tau=0}^{\theta} v(t,t+\tau)\Delta\varphi(t+\tau) + \bar{y}(t) \qquad (1.6)^{*}$$

$$f(t+1)x(t+1)-(1-r)\lambda\Delta\varphi(t+1) = (1-2r)f(t)x(t)+(1-2r)(1-r)(1-\lambda)\Delta\varphi(t), \qquad (1.10)$$

де $x(t)$ - валова продукція; $a(t)$ - частка проміжного продукту в загальному обсязі валової продукції; $v(t,t+\tau)$ - коефіцієнт часової структури капітальних вкладень (характеризує питому вагу капітальних вкладень року t в загальній вартості основних виробничих фондів, що вводяться в дію в році $t+\tau$, $(\tau=0,1,\ldots,\theta)$; $\Delta\varphi(t)$ - обсяг основних виробничих фондів, що вводяться в дію з році t; $\bar{y}(t)$- кінцевий продукт нетто; θ - величина інвестиційного

---

* Нумерація формул збережена такою, як в дисертації.

лагу; f - коефіцієнт фондоємкості продукції; r - коефіцієнт вибуття основних виробничих фондів, λ - коефіцієнт зведення фактичного вводу в дію основних виробничих фондів до середньорічного їх вводу $\lambda\Delta\varphi(t)$.

З математичної точки зору система рівнянь (I.6), (I.10) являє собою систему двох різницевих рівнянь відносно функцій $x(t)$ і $\Delta\varphi(t)$.

Для системи різницевих рівнянь (I.6), (I.10) формулюється крайова задача шляхом задання крайових умов на початку та в кінці прогнозного інтервалу $[1,T]$. Крайова умова на початку прогнозного інтервалу будується виходячи з того, що середньорічна наявність основних виробничих фондів $\bar\varphi(t)$ року t дорівнює сумі їх наявності $\varphi(t)$ на початок цього року та середньорічного її вводу в цьому ж році за умови відрахування середньорічного вибування основних фондів. А саме:

$$\bar\varphi(1) = (1-r)[\varphi(1) + \lambda\Delta\varphi(1)], \qquad (1.7)$$

де $\bar\varphi(t)=f(t)x(t)$.

Для побудови крайових умов на правому кінці прогнозного інтервалу використовується припущення А.А.Конюса про те, що тенденція зростання основних фондів $\varphi(t)$ в перші роки після прогнозного періоду має відповідати параболі другого порядку. Внаслідок чого маємо

$$\nabla^2(\Delta\varphi(T+\tau)) = 0, \quad (\tau = 1,2,\dots\theta), \qquad (1.17)$$

де ∇^2 - оператор другої висхідної різниці. Крім того, зауважимо, що на початку прогнозного інтервалу доводиться також враховувати ту обставину, що значення функції $\Delta\varphi(t)$ в початкових точках прогнозного інтервалу, а саме при $t = 1,2,\dots,\theta$, обумовлені капітальними вкладеннями, що фактично здійснені на протязі тих років, що безпосередньо передували початку прогнозного періоду.

Початкові або крайові задачі для системи рівнянь (I.6),(I.10) задаються відповідними комбінаціями умов (I.7) та (I.17).

Поряд з системою рівнянь (I.6), (I.10), що відповідає відкритій динамічній моделі, розглядається також замкнутий варіант моделі. В цьому випадку система рівнянь має вигляд

$$x(t)=ax(t)+\sum_{\tau=0}^{\theta} s^{-1}v(t,t+\tau)\Delta\varphi(t+\tau), \qquad (1.41)$$

$$fx(t+1)-(1-r)\lambda\Delta\varphi(t+1) = (1-2r)fx(t)+(1-2r)(1-r)(1-\lambda)\Delta\varphi(t).$$

де s - норма виробничого нагромадження.

Для системи (I.4I), як і для системи (I.6), (I.I0), формулюється відповідна крайова задача.

Надалі, з метою уникнення обчислювальних труднощів, що виникають в разі чисельного розв'язання крайової задачі, здійснюється перехід від крайової задачі до еквівалентної задачі Коші. Алгоритм переходу на прикладі системи (I.6), (I.I0) полягає в наступному. Вважаємо, для простоти викладу, що $\theta=3$. Запишемо систему (I.6), (I.I0) в вигляді

$$fx(t+3)-(1-r)\lambda\Delta\varphi(t+3)=(1-2r)fx(t+2)+(1-2r)(1-r)(1-\lambda)\Delta\varphi(t+2),$$

$$v(t,\ +\tau)\Delta\varphi(t+3)=-v(t,t+2)\Delta\varphi(t+2)-v(t,t+1)\Delta\varphi(t+1)-(1-a)x(t)$$
$$-v(t,t)-\bar{y}(t)$$

і запровадимо вектори-стовпці:

$$Z(t+2)=(x(t+2),\Delta\varphi(t+2),x(t+1),\Delta\varphi(t+1),x(t),\Delta\varphi(t))'.$$

$$y(t) = (0,\ -\bar{y}(t),0,0,0,0)',$$

а також матриці:

$$H(t+3) = \begin{bmatrix} f(t+3) & -(1-r)\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$H(t+2) = \begin{bmatrix} (1-2r)f(t+2) & (1-2r)(1-r)(1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\upsilon(2) & 0 & -\upsilon(1) & 1-a & -\upsilon(0) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

де $\upsilon(t,t+\tau) = \upsilon(\tau)$.

Приходимо до такого векторно-матричного рівняння

$$Z(t+1) = H(t)Z(t) + Y(t), \qquad (1.28)$$

де $H(t) = H^{-1}(t+1)N(t+1)$, $Y(t) = H^{-1}(t+1)Y(t-2)$.

Існування оберненої матриці $H^{-1}(t)$ обгрунтовано економічним змістом її елементів. Крайова задача для рівняння (I.28) має такий вигляд:

$$Z(t+1) = H(t)Z(t) + Y(t), \qquad (1.29)$$

$$f(1)x(1) - (1-r)\lambda\Delta\varphi(1) = (1-r)\varphi(1), \qquad (1.30)$$

$$f(2)x(2) - (1-r)\lambda\Delta\varphi(2) - (1-2r)fx(1) - (1-2\ )(1-r)(1-\lambda)\Delta\varphi(1) = 0,$$

$$f(3)x(3) - (1-r)\lambda\Delta\varphi(3) - (1-2r)fx(2) - (1-2r)(1-r)(1-\lambda)\Delta\varphi(2) = 0;$$

$$\nabla^2(\Delta\varphi(T+1)) = 0,$$

$$\nabla^2(\Delta\varphi(T+2)) = 0, \qquad (1.31)$$

$$\nabla^2(\Delta\varphi(T+3)) = 0.$$

Якщо $Z_k(t)$ - фундаментальна система розв'язків рівняння (I.29) (при $Y(t) \equiv 0$), а $Z(3) = (Z^{(1)}(3),\ldots,Z^{(6)}(3))' = (x(3),\Delta\varphi(3),x(2),\Delta\varphi(2),x(1),\Delta\varphi(1))'$ - початковий вектор, елементи якого розглядаються як деякі параметри, то розв'язок рівняння (I.29) може бути записаний у вигляді

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{6} Z(t)Z^{k}(3) + Z_{H/O}(t). \qquad (1.33)$$

де $z_{н/о}(t)$ – розв'язок цього рівняння з нульовим початковим вектором. Підставляючи (I.33) в умови (I.3I) та враховуючи (I.30), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для елементів початкового вектора $z(3)$:

$$\begin{bmatrix} f(3) & -(1-r)\lambda & -(1-2r)f(2) & -(1-2r)(1-r)(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(2) & -(1-r)\lambda & -(1-2r)f(2) & -(1-2r)(1-r)(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(2) & -(1-r)\lambda \\ \nabla^2 z_1^{(2)}(T+3) & \nabla^2 z_2^{(2)}(T+3) & \nabla^2 z_3^{(2)}(T+3) & \nabla^2 z_4^{(2)}(T+3) & \nabla^2 z_5^{(2)}(T+3) & \nabla^2 z_6^{(2)}(T+3) \\ \nabla^2 z_1^{(4)}(T+3) & \nabla^2 z_2^{(4)}(T+3) & \nabla^2 z_3^{(4)}(T+3) & \nabla^2 z_4^{(4)}(T+3) & \nabla^2 z_5^{(4)}(T+3) & \nabla^2 z_6^{(4)}(T+3) \\ \nabla^2 z_1^{(6)}(T+3) & \nabla^2 z_2^{(6)}(T+3) & \nabla^2 z_3^{(6)}(T+3) & \nabla^2 z_4^{(6)}(T+3) & \nabla^2 z_5^{(6)}(T+3) & \nabla^2 z_6^{(6)}(T+3) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x(3) \\ \nabla\varphi(3) \\ x(2) \\ \nabla\varphi(2) \\ x(1) \\ \nabla\varphi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-r)\varphi(1) \\ -\nabla^2 z_{н/о}^{(2)}(T+3) \\ -\nabla^2 z_{н/о}^{(4)}(T+3) \\ -\nabla^2 z_{н/о}^{(6)}(T+3) \end{bmatrix} \quad (1.1.36)$$

Розв'язуючи систему (I.36), одержимо той початковий вектор для рівняння (I.29), що визначає задачу Коші, еквівалентну крайовій задачі (I.29), (I.30), (I.31):

$$H(t+1)Z(t+1)=H(t)Z(t)+Y(t), \tag{1.37}$$

$$Z(t)|_{t=3}=Z(3). \tag{1.38}$$

Зауважимо, що в загальному випадку, коли число галузей моделі дорівнює n, система, що визначає початковий вектор $Z(t_0)$, має розмірність $N=2n$

Наведений алгоритм зведення крайової задачі до еквівалентної задачі Коші є досить відомим, але, як наполягають такі автори,як М.М.Моїсеєв, Е.Полак, та ін., при великій довжині інтервалу $[t_0,T]$ ця система може стати близькою до виродженої, що обумовлює значні труднощі при спробі її розв'язання. Саме ця обставина і досліджується в першій главі дисертації.

Вважаємо, що власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ оператора H розташовані в порядку зменшення їх модулів. Нехай, крім того, $x_1,\dots,x_n$ та $y_1,\dots,y_n$- відповідно праві та ліві власні вектори оператора H. Будемо вважати, що системи власних векторів є біортогональними.

За цих умов для векторних функцій $Z_k(t)$, які визначають фундаментальну систему розв'язків різницевого рівняння, має місце асимптотичне співвідношення

$$\lambda_1^{-T}Z_k(T+\theta)=x_1y_1^{(k)}+O(\varepsilon) \tag{1.53}$$

де $y_1^{(k)}$ - k-й елемент вектора y_1, а $\varepsilon=(\lambda_2/\lambda_1)^T\to 0$ при $T\to\infty$. Враховуючи (I.53), отримуємо для елементів початкового вектора $Z(\theta) = (x(3),\Delta\varphi(3),x(2),\Delta\varphi(2),x(1),\Delta\varphi(1))$, замість системи (I.36) таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь (для замкнутої моделі):

$$\begin{bmatrix} f(3) & -(1-r)\lambda & -(1-2r)f(2) & -(1-2r)(1-r)(1-\lambda) \\ 0 & 0 & f(2) & -(1-r)\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1^{(1)}+O(\varepsilon) & y_1^{(2)}+O(\varepsilon) & y_1^{(3)}+O(\varepsilon) & y_1^{(4)}+O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(1-2r)f(1) & -(1-2r)(1-r)(1-\lambda) \\ f(1) & -(1-r)\lambda \\ y_1^{(5)}+O(\varepsilon) & y_1^{(6)}+O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(3) \\ \Delta\varphi(3) \\ x(2) \\ \Delta\varphi(2) \\ x(1) \\ \Delta\varphi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-r)\varphi(1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Позначимо матрицю коефіцієнтів цієї системи буквою P і розіб'ємо її на два доданки таким чином:

$$P = A + \varepsilon B, \tag{1.56}$$

де матриця A складається з перших чотирьох рядків матриці P, при інших рядках нульових, а матриця B має перші чотири свої рядки нульовими, а останні два рядки збігаються з відповідними рядками матриці P.

Для початкового вектора $Z(\theta)$ маємо рівняння

$$(A+\varepsilon B)Z(\theta)=b, \tag{1.58}$$

де b - вектор правої частини системи переносу граничних умов.

Таким чином, задача знаходження вектора $Z(\theta)$ зводиться до задачі обернення матриці $A+\varepsilon B$, що є збуреною на спектрі.

Систематичній побудові алгоритмів обернення збурених на спектрі матричних операторів присвячені роботи В.С.Королюка та А.Ф.Турбіна, де ці алгоритми розглядалися у зв'язку з розвитком авторами теорії напівмарківських процесів та їх застосування в задачах укрупнення складних систем. В основу підходу цих авторів покладено відомий алгоритм Вішика-Люстерніка.

В дисертаційній роботі застосовано інший підхід. Для побудови оберненої матриці розроблено метод обернення довільної матриці по частинах, який не залежить від наявності у матричного оператора будь-якого збурення. Цей алгоритм одержано в процесі вивчення праць В.С.Королюка і А.Ф.Турбіна.

Нехай $C=[c_{ij}]$ - матриця розміром $N\times N$. Будемо використовувати її блочне зображення:

$$C=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{C_{mm}}}^{m} & \overbrace{\phantom{C_{mn}}}^{n} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} C_{mm} & C_{mn} \\ C_{nm} & C_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n \end{array} \end{array} \qquad (n+m)=N, \qquad (1.59)$$

Будемо вважати, що як для C, так і для C_{mm} та C_{nn} існують відповідні обернені матриці. Розіб'ємо C (по горизонталі) на два доданки таким чином:

$$C=A+B=\begin{bmatrix} C_{mm} & C_{mn} \\ O_{nm} & O_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} O_{mm} & O_{mn} \\ C_{nm} & C_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1.60)$$

де $O_{nm}, O_{nn}, O_{mm}, O_{mn}$ – відповідні нульові блоки.

Запровадимо U_A, U_B – матриці, стовпцями яких є праві власні вектори матриць A та B, і запровадимо також матриці R_A, R_B, рядками яких є ліві власні вектори матриць A та B. При цьому беруться до уваги тільки ті власні вектори, що відповідають нульовому власному значенню.

Теорема I.I. Якщо матриці $R_B AU_B$ та $R_A BU_A$ можуть бути обернені, то має місце перша формула обернення матриць по частинах:

$$C^{-1}=(A+B)^{-1}=U_B(R_B AU_B)^{-1}R_B + U_A(R_A BU_A)^{-1}R_A \qquad (1.69)$$

Розіб'ємо матрицю C по вертикалі на два доданки:

$$C=P+Q=\begin{bmatrix} C_{mm} & O_{mn} \\ C_{nm} & O_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} O_{mm} & C_{mn} \\ O_{nm} & C_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.70)$$

Теорема I.2. Якщо для матриць $R_P QU_P$ та $R_Q PU_Q$ існують обернені, то має місце друга формула обернення матриць по частинах:

$$C^{-1}=(P+Q)^{-1}=U_Q(R_Q PU_Q)^{-1}R_Q+U_P(R_P QU_P)^{-1}R_P. \qquad (1.80)$$

Формули (I.69) та (I.70) можуть бути переписані в термінах проекторів, які розглянуто у згаданих раніше працях В.С.Королюка та А.Ф.Турбіна.
Запровадимо позначення:

$$U_B(R_B AU_B)^{-1}R_B=\Pi_A, \qquad U_A(R_A BU_A)^{-1}R_A=\Pi_B.$$

де Π_A - власний проектор на напівпростір нулів оператора B, а Π_B - власний проектор на напівпростір нулів оператора A.

Наслідок 1.1.

$$(A+B)^{-1}=\Pi_A+\Pi_B. \tag{1.81}$$

Нехай ε - малий параметр, і $A+\varepsilon B$ - матриця, збурена на спектрі.

Наслідок 1.2.

$$(A+\varepsilon B)^{-1}=\Pi_A+\varepsilon^{-1}\Pi_B. \tag{1.81'}$$

Алгоритм обернення матриць по частинах узагальнюється на випадок, коли початкова матриця подана у вигляді суми довільного числа доданків, кожен з яких є матриця, ранг якої менший за ранг початкової матриці.

Нехай $A=[a_{ij}]$ $(i,j=\overline{1,k})$ - квадратна матриця размірсм $n\times n$ з елементами a_{ij}.

$A=[A(\alpha_i,\alpha_j)]$ $(i,j=\overline{1,r})$ - блочне зображення матриці A; тут $A(\alpha_i\ \alpha_j)$ - блок, що складається із α_i рядків та α_j стовпців початкової матриці A. При цьому $\sum\limits_i \alpha_i = \sum\limits_j \alpha_j = n$. В тому випадку, коли $\alpha_i=\alpha_j$, відповідний блок будемо позначати $A(\alpha_i)$.

Через $A(\alpha_k',\alpha_i')$ будемо позначати підматрицю, отримувану із матриці A відкиданням блочного рядка з мультиіндексом α_k та блочного стовпця з мультиіндексом α_i.

Нехай P_{α_j} - переставляюча матриця, що при множенні матриці на P_{α_j} зліва переставляє блочний рядок з мультиіндексом α_j в верхню частину матриці A, зсуваючи при цьому інші рядки матриці A відповідно вниз. Якщо ж матриця A множиться на P_{α_j} справа, то відбувається перестановка блочного стовпця з мультиіндексом α_j в ліву частину матриці A, при цьому інші стовпці матриці A зміщуються відповідно вправо.

Якщо одночасно помножити матрицю A на P_{α_j} зліва і справа, то будемо мати

$$P_{\alpha_j} A P_{\alpha_j} = \begin{bmatrix} A(\alpha_j) & A(\alpha_j,\alpha_j') \\ A(\alpha_j',\alpha_j) & A(\alpha_j') \end{bmatrix}, \tag{1.89}$$

Запровадимо матриці $S(\alpha_j)$ $(j=\overline{1,r})$:

$$S(\alpha_j) = A(\alpha_j) - A(\alpha_j,\alpha'_j)A(\alpha'_j)^{-1}A(\alpha'_j,\alpha_j). \qquad (1.90)$$

При цьому матрицю $S(\alpha_j)$ будемо називати доповненням Шура до підматриці $A(\alpha'_j)$ блочної матриці A.

Враховуючи (I.89), подамо матрицю $P_{\alpha_j} A P_{\alpha_j}$ у вигляді суми двох доданків:

$$P_{\alpha_j} A P_{\alpha_j} = \begin{bmatrix} A(\alpha_j) & A(\alpha_j,\alpha'_j) \\ O(\alpha'_j,\alpha_j) & O(\alpha'_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\alpha_j) & O(\alpha_j,\alpha'_j) \\ A(\alpha'_j,\alpha_j) & A(\alpha'_j) \end{bmatrix}. \qquad (1.91)$$

Запровадимо матриці $U(\alpha_j)$ $(j=\overline{1,r})$, стовпцями яких є праві власні вектори матриці $\begin{bmatrix} O(\alpha_j) & O(\alpha_j,\alpha'_j) \\ A(\alpha'_j,\alpha_j) & A(\alpha'_j) \end{bmatrix}$, що входить до правої частини (I.91).

Запровадимо матриці $R(\alpha_j)$, рядками яких є ліві власні вектори матриці $\begin{bmatrix} O(\alpha_j) & O(\alpha_j,\alpha'_j) \\ A(\alpha'_j,\alpha_j) & A(\alpha'_j) \end{bmatrix}$.

Подамо тепер вихідну блочну матрицю $A(\alpha_i,\alpha_j)$ $(i,j=\overline{1,r})$ у вигляді суми r доданків, в кожному з яких міститься тільки один блочний рядок вихідної матриці, а інші рядки нульові:

$$[A(\alpha_i,\alpha_j)] = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha_1,\alpha_j) \\ O(\alpha_2,\alpha_j) \\ O(\alpha_3,\alpha_j) \\ \vdots \\ O(\alpha_r,\alpha_j) \end{bmatrix}}_{B_{\alpha_1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} O(\alpha_1,\alpha_j) \\ A(\alpha_2,\alpha_j) \\ O(\alpha_3,\alpha_j) \\ \vdots \\ O(\alpha_r,\alpha_j) \end{bmatrix}}_{B_{\alpha_2}} + \ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} O(\alpha_1,\alpha_j) \\ O(\alpha_2,\alpha_j) \\ O(\alpha_3,\alpha_j) \\ \vdots \\ A(\alpha_r,\alpha_j) \end{bmatrix}}_{B_{\alpha_r}} \qquad (1.93)$$

Позначимо матриці-доданки в правій частині (I.93) відповідно через $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_r}$.

<u>Теорема 1.4.</u> Якщо матриці $S(\alpha_k)$ $(k=\overline{1,r})$ можна обернути, то для блочної матриці

$$A = [A(\alpha_i,\alpha_j)] = \sum_{k=1}^{r} B_{\alpha_k}$$

має місце формула обернення

$$A^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{r} B_{\alpha_k}\right]^{-1} = \sum_{k=1}^{r} \Pi_{\alpha_k},$$

де

$$\Pi_{\alpha_k} = P_{\alpha_k} U(\alpha_k) S(\alpha_k)^{-1} R(\alpha_k) P_{\alpha_k}^{-1}.$$

Із цієї теореми отримуємо формули обернення блочної матриці, що узагальнюють відомі формули Фробеніуса для обернення блочних матриць з числом блоків 2×2.

Теорема 1.5. Нехай блочна матриця $A=[A(\alpha_i,\alpha_j)]$ $(i,j=\overline{1,r})$ може бути обернена і, крім того, можна обернути підматриці $A(\alpha_k)(k=\overline{1,r})$. Тоді має місце така формула блочного обернення матриці:

$$A^{-1} = [A(\alpha_i,\alpha_j)]^{-1} =$$

$$= \Bigg[\underbrace{P_{\alpha_1}^{-1}\begin{bmatrix} I(\alpha_1) \\ -A(\alpha_1')^{-1} A(\alpha_1',\alpha_1) \end{bmatrix} S(\alpha_1)^{-1}}_{\alpha_1\text{-й стовпець оберненої матриці}} \ldots \underbrace{P_{\alpha_r}^{-1}\begin{bmatrix} I(\alpha_r) \\ -A(\alpha_r')^{-1} A(\alpha_r',\alpha_r) \end{bmatrix} S(\alpha_r)^{-1}}_{\alpha_r\text{-й стовпець оберненої матриці}}\Bigg]$$

де $I(\alpha_1),\ldots,I(\alpha_r)$ – одиничні матриці.

Зокрема, якщо $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ і $\det A \neq 0$, $\det D \neq 0$, то

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}; \qquad (1.85)$$

або

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (1.85')$$

Формули (1.85) і (1.85') є деякими модифікаціями аналогічних формул Фробеніуса, проте така модифікація дозволяє побудувати ефективні паралельні алгоритми обернення матриць великої розмірності. Цим питанням присвячена четверта глава дисертації.

В другій главі дисертації досліджується динамічна модель міжгалузевого балансу для N галузей. При цьому окремо розглядаються варіанти, коли модель містить тільки фондостворюючі галузі, або коли всі лаги однакові. І, нарешті, докладно досліджується загальний випадок, коли модель містить фондостворюючі та нефондостворюючі галузі, а їхні лаги можуть набувати різних значень.

Подано вивід системи рівнянь для загального випадку. Одержана при цьому система є системою різницевих рівнянь, нерозв'язаною щодо старших різниць.

Досліджуються питання розв'язуваності отриманої системи різницевих рівнянь та встановлюється, зокрема, що при деяких сполученнях числа фондостворюючих галузей і числа галузей з тим чи іншим лагом система рівнянь моделі стає нерозв'язною.

Загальну кількість галузей моделі позначимо N, а загальну кількість фондостворюючих галузей - M. Далі буквою $\theta^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots,k)$ позначимо різні величини лагу капітальних вкладень, а буквою n_s -кількість галузей з лагом $\theta^{(s)}$. Крім того, буквою m_s позначимо кількість фондостворюючих галузей з лагом $\theta^{(s)}$. Надалі будемо вважати, що величини $\theta^{(s)}$ занумеровані так, що $\theta^{(1)} < \theta^{(2)} < \ldots < \theta^{(k)}$. Нарешті, будемо вважати, що в розглянутих далі рівняннях галузі беруться в порядку зростання лагу, а в підмножині галузей з однаковим лагом першими ідуть фондостворюючі галузі.

Отримана в другій главі (§ 2.5) система рівнянь моделі являє собою систему $2N$ різницевих рівнянь з невідомими функціями $\Delta\varphi_j(t)$ та $x_j(t)$ $(j=\overline{1,N})$. При цьому отримана система рівнянь має різницевий порядок $\theta^{(1)}$ щодо функцій $\Delta\varphi_j(t)$, $(j=1,\ldots,N_1)$, різницевий порядок $\theta^{(2)}$ щодо функцій $\Delta\varphi_j(t)$ $(j=N_1+1,\ldots,N_2)$ і т.д. і, нарешті, різницевий порядок $\theta^{(k)}$ щодо функцій $\Delta\varphi_j(t)$ $(j=N_{k-1}+1,\ldots,N)$ (для $x_j(t)$ аналогічно).
Множини індексів α_M та α_{N-M} визначають відповідно кількості

фондостворюючих та нефондостворюючих галузей.

Запровадимо вектори:

$$\vec{\Delta\Phi}_{N_s-N_{s-1}} = (\Delta\Phi_{N_{s-1}+1}, \Delta\Phi_{N_{s-1}+2}, \ldots, \Delta\Phi_{N_s})',$$

діагональні матриці:

$$V_{N_s-N_{s-1}} = diag\left[v_{N_{s-1}+1}, v_{N_{s-1}+2}, \ldots, v_{N_s} \right]$$

та прямокутні матриці:

$$B_{N_s-N_{s-1}} = \left[b_{ij};\ i \in \alpha_M,\ j=N_{s-1}+1, \ldots, N_s \right],$$

$$s=1,2,\ldots,k.$$

Нехай надалі

$(I-A)_{\alpha_M}$ - матриця $I-A$,

у якої залишено тільки рядки, що відповідають фондостворюючим галузям.

Запровадимо також вектори:

$$\vec{Y}_{\alpha_M} = \left[\bar{y}_i,\ i \in \alpha_M \right]',$$

$$\vec{X}_N(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t) \right]'.$$

Із врахуванням запроваджених позначень система рівнянь динамічної моделі міжгалузевого балансу у загальному випадку має такий вигляд

$$-\sum_{s=1}^{k} B_{N_s-N_{s-1}} V^{t,t+\theta^{(s)}}_{N_s-N_{s-1}} \vec{\Delta\Phi}_{N_s-N_{s-1}}(t+\theta^{(s)}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{\tau=\theta^{(s-1)}}^{\theta^{(s)}-1} B_{N-N_{s-1}} V^{t,t+\tau}_{N-N_{s-1}} \vec{\Delta\Phi}_{N-N_{s-1}}(t+\tau) -$$

$$- (I-A)_{\alpha_M} \vec{X}_N(t) + \vec{Y}_{\alpha_M}(t).$$

$$(I-A)^{(1)}_{\alpha_{N-M}} \vec{X}_{N_1}(t+\theta^{(1)}) = -(I-A)^{(2)}_{\alpha_{N-M}} \vec{X}_{N-N_1}(t+\theta^{(1)}) + \vec{Y}_{\alpha_{N-M}}(t+\theta^{(1)}).$$

$$-(I-R)_{N_s-N_{s-1}} \Lambda_{N_s-N_{s-1}} \overrightarrow{\Delta\Phi}_{N_s-N_{s-1}}(t+\theta^{(s)}) + F^{t+\theta^{(s)}}_{N_s-N_{s-1}} \hat{x}_{N_s-N_{s-1}}(t+\theta^{(s)}) =$$

$$= (I-R)_{N_s-N_{s-1}} (I-2R)_{N_s-N_{s-1}} (I-\Lambda)_{N_s-N_{s-1}} \overrightarrow{\Delta\Phi}_{N_s-N_{s-1}}(t+\theta^{(s)}-1) +$$

$$+(I-2R)_{N_s-N_{s-1}} F^{t+\theta^{(s)}-1}_{N_s-N_{s-1}} \hat{x}_{N_s-N_{s-1}}(t+\theta^{(s)}-1).$$

Оскільки отримана система різницевих рівнянь не є розв'язаною відносно старших різниць, виникає питання про умови, за яких вона може бути розв'язаною.

В § 2.7 показано, зокрема, що за умови

$$\alpha_{N-M} > N_1, \qquad (2.99)$$

де α_{N-M} – загальна кількість нефондоутворюючих галузей, а N_1 – кількість галузей з мінімальним лагом $\theta^{(1)}$, система рівнянь динамічної моделі міжгалузевого балансу стає нерозв'язною. При цьому припускається, що в моделі є галузі, у яких лаги перевищують мінімальний лаг моделі. У випадку, коли всі галузі, що входять в модель, мають однаковий лаг (§2.4), явище нерозв'язності не виникає.

В § 2.8 другої глави наведено алгоритм розв'язування крок за кроком системи різницевих рівнянь динамічної моделі МГБ в загальному випадку.

В третій главі досліджуються алгоритми переносу граничних умов в динамічних моделях, які використовують диференціальні рівняння.

Вектор x_0^d додаткових початкових значень задачі Коші, що замінює відповідні крайові умови в точці $t=T$, визначається системою лінійних алгебраїчних рівнянь, для побудови якої залучається фундаментальна система розв'язків вихідного лінійного диференціального рівняння (або системи рівнянь). Знайдені формули для вектора x_0^d використовуються для аналізу асимптотичної при $T \to \infty$ поведінки розв'язку вихідної крайової задачі на відрізку $[0,T]$. Встановлено, що компоненти вектора x_0^d зростають при $T \to \infty$, як експоненти з показниками, що залежать від розміщення характеристичних коренів вихідного диференціального рівняння.

В кінці глави обмірковуються можливі застосування отриманих результатів до задач оптимального управління.

Розглянемо лінійну крайову задачу на відрізку $[0,T]$:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(t)x^{(p-i)}(t) = b(t), \quad a_0(t) \equiv 1, \tag{3.1}$$

$$x^{(j)}(0) = x_0^j \quad (j=0,1,\dots,k-1), \tag{3.2}$$

$$x^{(m)}(T) = x_T^m \quad (m=0,1,\dots,l-1;\ k+l=p) . \tag{3.3}$$

Нехай $\eta_j(t)$ $(j=0,1,\dots,p-1)$ - фундаментальна система розв'язків рівняння (3.1) при $b(t) \equiv 0$.

Л е м а 3.I. Крайова задача (3.1) - (3.3) еквівалентна такій початковій задачі:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(t)x^{(p-i)}(t) = b(t), \quad a_0 \equiv 1, \tag{3.1'}$$

$$x^{(j)}(0) = x_0^j \quad (j=0,1,\dots,k-1), \tag{3.2'}$$

$$x^{(k+m)}(0) = x_0^{k+m} \quad (m=0,1,\dots,l-1;k+l=p). \tag{3.6}$$

Тут рівності (3.1') та (3.2') збігаються відповідно з (3.1) та (3.2), а додаткові початкові значення x_0^{k+m} $(m=0,1,\dots l-1)$ визначаються системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A_T X_0^d = Y(T). \tag{3.7}$$

де
$$A_T = \left\{ \eta_{k+m}^{(r)}(T); \quad 0 \leqslant r,m \leqslant l-1 \right\} \tag{3.8}$$

(r - номер рядка, m - номер стовпця);

$$X_0^d = (x_0^{k+m}; \quad 0 \leqslant m \leqslant l-1), \tag{3.9}$$

$$Y(T) = (y^r(T);\ 0 \leqslant r \leqslant l-1)', \tag{3.10}$$

$$y^r(T) = x_T^r - \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j^{(r)}(T)x_0 - \int_0^T \eta_{p-i}^{(r)}(T,s)b(s)ds. \tag{3.11}$$

В § 3.2 досліджується асимптотична, при великому T, поведінка матриці A_T. Розглядається випадок, коли коефіцієнти a_j не залежать від t, а характеристичні корені λ_i $(i=0,1,\dots,p-1)$ (для простоти викладу) вважаються різними.

Лема 3.2. Якщо корені рівняння

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \dots + a_{p-1}\lambda + a_p = 0 \qquad (3.17)$$

задовольняють співвідношенню

$$Re\ \lambda_0 > Re\ \lambda_1 > \dots > Re\ \lambda_l \geq Re\ \lambda_{l+1} \geq \dots \geq Re\ \lambda_{p-1}. \qquad (3.18)$$

то при досить великих значеннях T матриця A_T може бути подана у такому вигляді:

$$A_T = e^{\lambda_0 T}\left[A_0 + \sum_{i=1}^{l-1} \varepsilon_i A_i + O(\varepsilon_i) \right]. \qquad (3.19)$$

де

$$\varepsilon_i = e^{-(\lambda_0-\lambda_i)T} \qquad (i=1,2,\dots,p-1). \qquad (3.20)$$

а матриці A_i $(i=0,1,\dots,l-1)$ мають вигляд

$$A_i = \left\{ \lambda_i^r c_{k+m,i};\ 0 \leq r,\ m \leq l-1 \right\}. \qquad (3.16)$$

і при цьому

$$\det A_0 = \det (A_0 + \varepsilon_1 A_1) = \dots = \det \left[A_0 + \sum_{i=1}^{l-2} \varepsilon_i A_i \right] = C. \qquad (3.21)$$

$$\det \left[A_0 + \sum_{i=1}^{l-1} \varepsilon_i A_i \right] \neq 0. \qquad (3.22)$$

Встановлено, що матриця A_T системи переносу граничних умов є матрицею, збуреною на спектрі, і при цьому

$$A_T^{-1} = e^{-\lambda_0 T}\left[\left[A_0 + \sum_{i=1}^{l-1} \varepsilon_i A_i\right]^{-1} + o(1)\right]. \qquad (3.35)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_{l-1}$ не залежить від ε.

В § 3.3 для матриці A_T^{-1} отримано таке асимптотичне зображення (теорема 3.I):

$$A_T^{-1} = e^{-\lambda_0 T}\left\{ \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_i^{-1} \left[\vec{C}^{(-1)}_{\cdot i} \otimes \vec{\Lambda}^{(-1)}_{i\cdot} \right] + o(1) \right\}. \qquad (3.38)$$

де $\vec{c}^{\,(-1)}_{\cdot i}$ - i-й стовпець матриці $C_i^{-1} = (c_{ij}^{(-1)},\ 0\le i,\ j\le l-1)$,

а $\vec{\Lambda}^{(-1)}_{i\cdot}$ - i-й рядок матриці $\Lambda_i^{-1} = (\lambda_{ij}^{(-1)},\ 0\le i,\ j \le l-1)$,

$\otimes$ - знак тензорного множення.

В § 3.4 отримано асимптотичні формули для вектора x_0^d додаткових початкових значень (теорема 3.2).

На основі теореми 3.2 встановлено такий результат.

Н а с л і д о к 3.3. Розв'язок $x(t)$ крайової задачі (3.1) - (3.3) зі сталими коефіцієнтами a_i можна подати рівномірно по $t \in [0,T]$ в такому асимптотичному вигляді:

при $Re\lambda_0 < 0$

$$x(t) = e^{-\lambda_{l-1}T}\left[(\vec{\Lambda}^{(-1)}_{l-1,\cdot}, \vec{Y}_0) \sum_{m=0}^{l-1} c^{(-1)}_{m,l-1}\eta_{k+m}(t) + O(\varepsilon_T) \right]; \quad (3.55)$$

при $Re\lambda_0 = 0$

$$x(t) = e^{-\lambda_{l-1}T}\left[(\vec{\Lambda}^{(-1)}_{l-1,\cdot}, (\vec{Y}_0 + \vec{Y}_1)) \sum_{m=0}^{l-1} c^{(-1)}_{m,l-1}\eta_{k+m}(t) + O(\varepsilon_T) \right]; \quad (3.56)$$

при $Re\lambda_0 > 0$

$$x(t) = e^{\lambda_0 T}\left\{ e^{-\lambda_{l-1}T} \sum_{m=0}^{l-1} \eta_{k+m}(t)[(\vec{\Lambda}^{(-1)}_{l-1,\cdot}, \vec{Y}_1) c^{(-1)}_{m,l-1} + O(\varepsilon_T)] + O(\varepsilon'_T) \right\}, \quad (3.57)$$

де $\varepsilon_T,\ \varepsilon'_T \to 0$ при $T \to \infty$.

В § 3.5 аналогічні результати отримано на випадок, коли модель описується системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

В § 3.6 попередні результати третьої глави використовуються для асимптотичного аналізу та розв'язку однієї задачі оптимального управління.

<u>В четвертій главі</u> розроблено алгоритми блочного обернення матриць; в простішому варіанті такий алгоритм був розглянутий в глав' I. Побудовано алгоритми обернення матриць з кількістю блоків 4×4, 8×8 і подано загальну схему блочного обернення матриць з довільним числом блоків. Далі в цій главі показано, що на основі алгоритмів блочного обернення можна побудувати ефективні

паралельні алгоритми обернення матриць великої розмірності, що актуальним у зв'язку з розвитком індустрії паралельних ЕОМ. Паралельні алгоритми побудовано для матриць, розбитих на блоки за кількістю 2×2, 4×4, 8×8; подано загальну схему.

Треба зауважити, що побудовані паралельні алгоритми виявляються корисними і для послідовних машин, якщо на них мають розв'язуватися задачі лінійної алгебри з великими матрицями. В такому випадку паралельні гілки алгоритму виконуються послідовно, а ефективність алгоритму виявляється в тому, що на ЕОМ можуть бути розв'язані задачі, матриці яких не вміщуються в оперативній пам'яті. Зокрема, на комп'ютері PC AT-486-33, *MS DOS*, з розбиттям $n\times n$-матриць на 64 блоки отримано такі фактичні дані затрат машинного часу на обертання матриць:

для n :	104	200	320	400	498	600	720
затрати часу, хв.:	5	11	21	31	45	62	90

Для блочної матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

2-лінійний паралельний алгоритм має вигляд

1.1	A^{-1}	2.1	D^{-1}	
1.2	$C\cdot(1.1)$	2.2	$B\cdot(2.1)$	
1.3	$(1.2)\cdot B$	2.3	$(2.2)\cdot C$	(4.51)
1.4	$D-(1.3)$	2.4	$A-(2.3)$	
1.5	$(1.4)^{-1}$	2.5	$(2.4)^{-1}$	
1.6	$(1.5)\cdot(1.2)$	2.6	$(2.5)\cdot(2.2)$	
1.7	$-(1.6)$	2.7	$-(2.6)$	

Алгоритм (4.51) побудовано у відповідності до формули (1.85'). Для блочних матриць з більшою кількістю блоків $(4\times4,\ 8\times8,\dots)$ паралельні алгоритми будуються шляхом рекурентного застосування формул типу (1.85') і відповідних їм 2-лінійних алгоритмів типу (4.51). Побудовано 2^k-лінійний паралельний алгоритм $(k\geq1)$ та дано оцінку обчислювальної складності таких алгоритмів. Зокрема, показано, що для $n\times n$-матриці кількість арифметичних операції однієї паралельної гілки такого алгоритму еквівалентна $\approx \frac{3n^3}{2^{k+1}}$. В цій же главі подано приклад паралельного обернення матриці над скінченним числовим полем.

В додатку подано деякі результати застосування розроблених в дисертації моделей та обчислювальних алгоритмів для розв'язування задач, що входять до Системи економіко-математичних комп'ютерних моделей комплексного аналізу, збалансованого прогнозування та регулювання соціально-економічного розвитку України. Ця система моделей розроблена в ІПІ Мінекономіки України під науковим керівництвом М.Т.Матвеєва та автора дисертації. Відповідальними виконавцями та авторами окремих блоків системи моделей є А.І.Соляник, І.А.Шумило та інші співробітники ІПІ.

Наведені короткий опис системи моделей, її блок-схема, а також результати розрахунків по тому блоку системи моделей, що відповідає динамічній моделі міжгалузевого балансу.

Програмне забезпечення для реалізації паралельних алгоритмів виконала Т.І.Вегера, для розрахунків по динамічній моделі міжгалузевого балансу - І.С.Гайдук. Велику роботу по набору тексту дисертації та автореферату на комп'ютері виконала Є.С.Тітаєвська. Всім названим особам автор висловлює щиру подяку.

У висновках до дисертації подано її основні результати. Вони є такими:

- Розроблено варіант повністю динамічної моделі міжгалузевого балансу із включенням фондостворюючих та нефондостворюючих галузей та врахуванням різних галузевих інвестиційних лагів.
- Досліджено умови розв'язності системи рівнянь моделі і визначено умови, за яких модель не може мати збалансованих розв'язків.
- Сформульовано і проаналізовано крайову задачу для системи різницевих рівнянь моделі та обґрунтовано доцільність переходу до еквівалентної задачі Коші.
- Вивчено асимптотичні властивості розв'язків крайових і початкових задач для систем лінійних різницевих і диференціальних рівнянь, пов'язаних з розглянутими динамічними моделями.

- Досліджено витоки та причини обчислювальних труднощів, що виникають в разі практичної реалізації задач прогнозування з використанням динамічних моделей міжгалузевого балансу; встановлено, що ці задачі відносяться до класу задач для операторів, збурених на спектрі. Розроблено аналітичні та обчислювальні методи розв'язку таких задач.
- Запропоновано нові ефективні алгоритми обернення матриць великої розмірності та матриць, збурених на спектрі. При цьому подано узагальнення відомих формул Фробеніуса для обернення блочних матриць.
- Побудовано паралельні алгоритми обернення матриць великої розмірності і подано оцінки обчислювальної складності цих алгоритмів.
- На основі одержання наукових результатів виконано варіантні прогнозні розрахунки макропоказників соціально-економічного розвитку України по динамічній моделі міжгалузевого балансу як складової частини Системи економіко-математичних комп'ютерних моделей комплексного прогнозування та регулювання соціально-економічного розвитку України.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

I. Великий А.П., Королюк В.С. Об асимптотическом решении одной задачи оптимального управления // Укр.мат.журн. - 1975.- Т.27, вып.3. - С.364-368.
2. Великий А.П., Королюк В.С. Асимптотический подход к переносу граничных условий для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. - 1977. - Т.29, № I.- С.23-31.
3. Великий А.П. Асимптотический подход к переносу граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. - 1978. - Т.30, № 4. - С.504-512.
4. Великий А.П., Королюк В.С. Об одном подходе к асимптотическому решению задач оптимального управления // Тез. докл. Всесоюз. конф. по оптимальному управлению в механических системах ИПМ АН СССР. - М., 1974. - С.21.
5. Великий А.П., Колотошин С.П., Михайлов В.А. Математическое обеспечение АСПР // Механизация и автоматизация упр. - 1974. - № 3. - С.19-22.

6. Великий А. П., Соляник А. И. Об одном подходе к проблеме прогнозирования динамических рядов и способах его реализации. // Проблемы математического обеспечения автоматизированных систем планирования и управления народным хозяйством: Сб. науч. тр. — Киев: Главниивц Госплана УССР, 1974. — С. 3—12.

7. Великий А. П. Некоторые проблемы интеграции программного обеспечения в РАСУ УССР // Математическое обеспечение взаимодействующих АСУ: Сб. науч. тр. — Киев: Главниивц Госплана УССР, 1986. — С. 5—11.

8. Матвеев М. Т., Великий А. П. Реализация диалогового режима — актуальная задача автоматизации плановых расчетов // Совершенствование систем обработки данных в межотраслевых АСУ: Сб. науч. тр. — Киев: Главниивц Госплана УССР, 1983. — С. 3—7.

9. Великий А. П., Илюхин С. В. Диалоговая реализация одной модели перспективного планирования // Интеграция программного обеспечения взаимодействующих АСУ: Сб. науч. тр. — Киев: Главниивц Госплана УССР, 1987. — С. 145—149.

10. Великий А. П., Гайдук И. С. Моделирование и программно-технологическая реализация перспективного сбалансированного планирования // Моделирование плановых расчетов и диалоговая оптимизация: Тез. докл. межресп. науч.-практ. конф. — Севастополь, 1990. — С. 3.

11. Великий А. П., Илюхин С. В. Опыт создания автоматизированных рабочих мест в Госплане УССР на базе мини-ЭВМ // Материалы Всесоюз. семинара «Опыт разработки и создания диалоговых (человек-машина) систем для автоматизации плановых расчетов и совершенствование управления производством». — Киев, 1985. — С. 7.

12. Великий А. П. Обращение матриц по частям // Кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 112—113.

13. Великий А. П., Илюхин С. В. Об одном подходе к реализации диалога в АСПР // Интерактивные системы: Тез. докл. — Тбилиси: Мецниереба, 1982. — Кн. I. — С. 153.

14. А. П. Великий, С. В. Илюхин. Организация обмена данными и программами в сети мини-ЭВМ // Вопросы создания АСПР. — 1987. — Вып. 77. — С. 27—30.

15. Великий А. П., Гайдук И. С., Илюхин С. В. Построение и реализация в ИВС эффективных алгоритмов динамических моделей МОБ // Там же. — 1989. — Вып. 84. — С. 47—56.

Із спільних публікацій [5], [9], [10], [15] в дисертаційну роботу включено лише результати, одержані дисертантом особисто. В спільних працях [1], [2], [4] ідея можливих результатів виникла в процесі спільних обговорень з співавтором, а формулювання остаточних результатів та їх доведення виконані дисертантом. Спільні праці [6], [8], [11], [13], [14] виконано співавторами спільно з рівним творчим вкладом.

Автор складає щиру подяку своєму вчителю Володимирові Семеновичу Королюку за постійну увагу до виконуваної роботи, а також Іванові Васильовичу Сергієнку за підтримку та консультації з питань проектування та побудови пакету програм для ЕОМ.

Підп. до друку 16.11. 92. Формат 60×84/16. Бум. кн. журн. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,51. Обл.-вид. арк. 1,75. Тираж 100 прим. Зам. 1701.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40