ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Габриелян Саак Саркисович

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ И ЕГО ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

0I.0I.0I - математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

ХАРЬКОВ - 1992

Работа выполнена в Физико-техническом институте низких температур им. Б.И.Веркина АН Украины

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Фельдман Г.М.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор Азарин В.С/ХИИТ,Харьков/
кандидат физико-математических наук
доцент Ильинский А.И/ХГУ,Харьков/

Ведущая организация - Институт химической физики п/о Черноголовка, Московская обл., Ногинский р-н.

Защита состоится "5" февраля 1993 г. в 15^{15} часов на заседании специализированного Совета К 053.06.02 в Харьковском государственном университете по адресу:
310 077, Харьков, пл. Свободы, 4, ауд. 6/48

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Харьковского государственного университета.

Автореферат разослан "11" декабря 1992 г.

Ученый секретарь специализированного
Совета К 053.06.02
кандидат физ.-мат. наук, доцент А.С.Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Одним из наиболее известных и важных распределений на числовой прямой $\mathbb{R}$, наряду с гауссовским распределением, является распределение Коши, т.е. распределение μ с характеристической функцией

$$\hat{\mu}(y) = \exp\{-\alpha|y| + i\beta y\}, \quad \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$$

и плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{[\alpha^2 + (x-\beta)^2]}, \quad \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$$

Это распределение возникает в целом ряде задач молекулярной, атомной, ядерной физике, физике элементарных частиц, радиотехнике и электронике и др., и подробно исследовалось в различных аспектах (см., напр., монографии: Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. "Характеризационные задачи математической статистики"; Золотарёв В.М. "Одномерные устойчивые распределения"; Лукач Е. "Характеристические функции"; работы А.И. Ильинского, G. Letac, F.B. Knight и др.).

Распределением Коши в $\mathbb{R}^n$ называется распределение μ характеристическая функция которого имеет вид

$$\hat{\mu}(y) = \exp\{i\langle x,y\rangle - \int_S |\langle y,\xi\rangle| M(d\xi)\} \tag{I}$$

где $M(d\xi)$ конечная мера на сфере $S = \{\xi : \|\xi\| = 1\}$. Это распределение возникает, в частности, в ряде задач физики, теории случайных матриц и др. (см., напр., вышеупомянутую могрофию В.М.Золотарёва). Распределение Коши в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, изучено существенно меньше чем на $\mathbb{R}$, но, тем не менее, достаточно подробно исследованы некоторые подмножества множества распределений Коши, а именно, типы следующих распределений с плотностями *)

$$p_1(x) = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

---

*) типом меры называется множество сдвигов автоморфных образов этой меры.

$$\rho_2(x) = 2^{n-1} \cdot \pi^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+\|x\|^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

исследованию свойств которых посвящены работы J.-L. Dunau and H. Senateur, F.B. Knight and P.A. Meyer, G. Hassenforder, S.G. Dani и др., при этом, в частности, важность этих типов определяется тем свойством, что они являются единственными инвариантами при некоторых преобразованиях пространства $\mathbb{R}^n$.

В настоящее время значительно вырос интерес к вероятностным мерам на группах, при этом основное внимание уделялось либо общим свойствам безгранично делимых распределений, либо гауссовским распределениям (см., напр., монографии Х.Хейера "Вероятностные меры на локально компактных группах" и Г.М.Фельдмана "Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах".).

Что же касается других семейств безгранично делимых распределений, отличных от гауссовского, то на локально компактных абелевых сепарабельных метрических группах (LCA группах), эти вопросы почти не изучались. Отметим лишь, что Г.М.Фельдманом был предложен некоторый аналог распределения Коши на LCA группах (групповой аналог типа меры с плотностью $\rho_1(x)$) и исследованы некоторые его свойства в случае когда размерность компоненты нуля равна единице ([1]).

С другой стороны, стимулирующее значение для изучения распределения Коши на LCA группах является, поставленная в вышеупомянутой монографии Кагана А.М., Линника Ю.В., Рао С.Р., задача построения теории равнораспределенности линейных форм на алгебраических структурах.

Этим определяется актуальность темы диссертации.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является: определение распределения Коши на LCA группах и исследование его свойств; решение ряда характеризационных задач для распределения Коши на группах.

Научная новизна результатов работы. В работе Г.М.Фельдмана [1] было предложено некоторое определение распределения Коши на LCA группах, а именно: распределение μ называется распределением

[1] Фельдман Г.М. "Распределение Коши на абелевых группах и его характеризация".- Докл. АН СССР, т.309, I(1989), с. 46-49

Коши, если его характеристическая функция представима в виде $\hat{\mu}(y)=(x,y)\cdot\exp\{-\sqrt{\varphi(y)}\}$,где $\varphi(y)$ -квадратичная форма на Y, множество которых обозначим через $K_\varphi(X)$, и исследованы некоторые его свойства в случае когда размерность компоненты нуля равна единице.

В диссертационной работе рассматривается другое определение распределения Коши на LCA группе, а именно: распределение μ называется распределением Коши, если μ - безгранично делимо и каждым характером переводится в распределение Коши на торе T, при этом под распределением Коши на торе понимается образ распределения Коши на $\mathbb{R}$ при естественном гомоморфизме $\tau: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=T$ Множество распределений Коши на группе X обозначим через $K(X)$ В работе показано, что $K_\varphi(X)\subset K(X)$, при этом, как показал Фельдман Г.М. [1] , $K_\varphi(X)=K(X)$ тогда и только тогда, когда размерность компоненты нуля не больше единицы.

В диссертационной работе ограничение на размерность компоненты нуля отсутствует и, кроме того, рассматривается целый ряд свойств распределений Коши, их множества $K(X)$, характеризационные теоремы для распределения Коши на LCA группе X , которые, в случае когда $X\neq\mathbb{R}^n$, ранее не рассматривались.

Таким образом, все основные результаты диссертации являются новыми.

<u>Научное значение</u> результатов работы заключается в том, что

I. Введено определение распределения Коши на LCA группах. Показано, что любое распределение Коши является сдвигом гомоморфного образа в линейном пространстве, исследованы его свойства и структура.

2.Получены необходимые и достаточные условия которым должна удовлетворять группа чтобы на ней были справедливы групповые аналоги классических характеризационных теорем для распределения Коши на вещественной прямой.

<u>Методика исследования.</u> Основными методами исследования являлись структурная теория локально компактных абелевых групп, теория двойственности Понтрягина и гармонический анализ на LCA группах (теория характеристических функций).

<u>Основные положения вынесенные на защиту.</u>

I. Определение распределения Коши. Теорема о том, что любое распределение Коши на группе является сдвигом гомоморфного образа распределения Коши в линейном пространстве. Описание всех групп для которых все распределения Коши характеризуются одним из своих свойств.

2. Структурные теоремы для распределения Коши.

3. Топологические свойства множества распределений Коши.

4. Основная характеризационная теорема для распределения Коши.

5. Групповые аналоги характеризации распределения Коши равнораспределенностью одночлена и линейной формы.

<u>Апробация работы.</u> Изложенные в работе результаты докладывались на семинаре И.В.Островского в ХГУ, семинаре В.Я.Голодца в ХГУ.

<u>Публикации.</u> По материалам диссертации опубликовано шесть статей [1-6].

<u>Объём работы.</u> Диссертационная работа состоит из 139 страниц машинописного текста. Библиография содержит 35 наименований.

<u>Структура и содержание работы.</u> Диссертация состоит из введения и трёх глав. Во введении излагаются постановки рассматриваемых вопросов, их история, основные результаты диссертации. В нулевой главе излагаются предварительные сведения необходимые для понимания работы.

Первая глава посвящена определению распределения Коши на группах и исследованию его свойств.

Во второй главе решается ряд характеризационных задач для распределения Коши на LCA группах.

<u>ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.</u>

На протяжении всей работы под группой X понимается сепарабельная, метрическая, абелева, локально компактная группа, $Y=X^*$ её группа характеров.

Множество всех распределений на группе X обозначим через $M_1(X)$. Пусть $\mu\in M_1(X)$ а $y\in Y$, через $y(\mu)$ обозначим образ распределения μ на одномерном торе T под действием характера y , т.е. $y(\mu)(E)=\mu(y^{-1}(E))$ для любого борелевского множества $E\subset T$.

Обозначим через E_x вырожденное распределение сосредоточенное в точке $x \in X$. Множество вырожденных распределений обозначим через $D(X)$. Через $T(X)$ обозначим множество сдвигов мер Хаара m_K компактных подгрупп K группы X .

Распределение μ называется безгранично делимым, если для любого $n \in N$ существует $x_n \in X$ и распределение μ_n , такие, что $\mu = E_{x_n} * \mu_n^{*n}$

Элемент $x \in X$ называется неограниченно делимым, если $\forall M \in N\ \exists m \in N,\ m > M,\ \exists \bar{x} \in X : m\bar{x} = x$

Обозначим через c_X компоненту нуля группы X .

ГЛАВА I.

В § I вводится определение распределения Коши.

Пусть $X = T$ - одномерный тор, тогда $Y \simeq Z$. Распределением Коши μ на торе будем называть образ распределения Коши на R при естественном гомоморфизме $\tau : R \to R/Z = T$, т.е. распределение μ с характеристической функцией

$$\hat{\mu}(n) = \exp\{-\alpha|n| + int\},\ \alpha \geq 0,\ t \in R,\ n \in Z$$

Множество распределений Коши на торе обозначим через $K(T)$

Определение. Распределение μ на группе X называется распределением Коши, если

I. $y(\mu) \in K(T)$, $\forall y \in Y$.

2. μ - безгранично делимо.

Множество распределений Коши на группе X обозначим через $K(X)$.

Класс распределений Коши в R^n совпадает с классом распределений характеристическая функция которых представима в виде (I)

Рассмотрим топологическую группу R^∞, тогда определение распределения Коши сохраняет силу множество которых обозначим через $K(R^\infty)$. Имеет место разложение: если $\mu \in K(R^\infty)$,то $\mu = E_x * \mu_0$, где μ_0 таково, что $\hat{\mu}_0(s) > 0\ \ \forall s \in (R^\infty)^*$
Пусть $\mu \in K(R^\tau)$, $\tau \leq \infty$, если μ таково, что $\hat{\mu}(s) > 0\ \ \forall s \in (R^\tau)^*$ то μ назовём симметричным. Через $K^s(R^\tau)$, $\tau \leq \infty$, обозначим множество симметричных распределений Коши в R^τ , тогда

$$K(R^\tau) = D(R^\tau) * K^s(R^\tau)\ ,\quad \tau \leq \infty \tag{2}$$

Отметим, что $y(\mu) \in K(T)$, $\forall y \in Y$, если и только если, характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ не обращается в ноль при $y\in Y$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\hat{\mu}(ny) = [\hat{\mu}(y)]^n, \quad n\in N,\ y\in Y$$

Введем обозначения:

$$K_n(X) = \{\mu\in M_s(X): \hat{\mu}(ny) = [\hat{\mu}(y)]^n, \forall y\in Y\}, \quad K_\infty(X) = \bigcap_{n\in N} K_n(X)$$

$$K_n^+(X) = \{\mu\in K_n(X): \hat{\mu}(y)\neq 0, \forall y\in Y\}, \quad K_\infty^+(X) = \bigcap_{n\in N} K_n^+(X)$$

Основными результатами § I являются следующие утверждения.

П р е д л о ж е н и е I. Пусть H - открытая подгруппа в Y и $\mu_0\in K(H^*)$. Тогда $\exists \mu\in K(X): \hat{\mu}(y)|_H = \hat{\mu}_0(y)$

Т е о р е м а I. ("о линеаризации"). Пусть X - группа, $\dim C_X = \eta \leq \infty$. Тогда существует непрерывный гомоморфизм $p: \mathbb{R}^\eta \to C_X$ обладающий свойством: $\forall \mu\in K(X)\ \exists x_\mu\in X\ \ \exists M\in K(\mathbb{R}^\eta)$:

$$E_{x_\mu} * p(M) = \mu$$

Следующая теорема полностью описывает те группы, для которых условие 2 (безграничная делимость) в определении распределения Коши вытекает из первого условия.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения эквивалентны:

I. $K_\infty^+(X) = K(X)$

2. Группа X удовлетворяет одному из условий:

(i) любая ненулевая фактор-группа группы Y содержит неограниченно делимый элемент.

(ii) $C_X \simeq T$

Из Теоремы I и (2) вытекает, что если $\mu\in K(X)$, то $\mu = E_{x'_\mu} * p(M')$, где $M'\in K^s(\mathbb{R}^\eta)$. Распределение $p(M')$ назовём симметричным, а их множество обозначим через $K^s(X)$, тогда

$$K(X) = D(X) * K^s(X)$$

В § 2 изучается распределение Коши-Феллера на группах, введенное Г.М.Фельдманом [1] .

О п р е д е л е н и е. Распределение μ на группе X называется распределением Коши-Феллера, если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \cdot \exp\{-\sqrt{\varphi(y)}\}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)]$$

Множество распределений Коши-Феллера обозначим через $K_\varphi(X)$ Тогда $K_\varphi(X) \subset K(X)$. Отметим, что, как показал Г.М.Фельдман [1], $K_\varphi(X) = K(X)$ тогда и только тогда, когда $\dim C_X \le 1$

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть группа X связна, $\dim X = \ell < \infty$ Пусть $\mu, \nu \in K_\varphi(X)$, тогда μ и ν либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны.

Распределение ν называется собственным делителем распределения μ, если $\nu \notin D(X)$ и существует распределение $\gamma \notin D(X)$ такое, что $\mu = \nu * \gamma$. Распределение α называется неразложимым, если оно не имеет собственных делителей.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть группа X связна, $\dim X = \ell < \infty$ тогда любое $\mu \in K_\varphi(X)$ содержит неразложимый делитель.

Предложение 3 опирается, в частности, на следующую теорему

Т е о р е м а 3. Пусть $\rho: X_1 \to X_2$ – непрерывный гомоморфизм, а μ безгранично делимое распределение с мерой Леви F, тогда $\rho(\mu)$ – безгранично делимо с мерой Леви $\rho(F)$.

В § 3 исследована структура распределения Коши (предполагаем что оно не вырождено).

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть группа X связна, $\mu \in K(X)$ Тогда разложение Лебега меры μ не имеет дискретной компоненты.

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть группа X связна, но не локально связна. Если $\mu \in K(X)$, то μ сингулярно.

Пусть X связна и локально связна, тогда если $\dim X < \infty$ то любое $\mu \in K(X)$ либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно.

Если $\dim X = \infty$, то $X \approx \mathbb{R}^n \oplus T^\infty$, и построены абсолютно непрерывное распределение $\mu \in K_\varphi(X)$ на T^∞, и сингулярное распределение $\nu \in K_\varphi(X)$ такое, что $\sigma(\nu) = T^\infty$ ($\sigma(\nu)$ - носитель ν).

Так как $K(X)$ подполугруппа, то естественно возникает вопрос: замкнута ли она, а если нет, то что является замыканием $K(X)$ в $M_1(X)$? Ответу на этот вопрос, а также анализу связи между $K_\varphi(X)$ и $K(X)$ посвящен § 4.

Обозначим через $K_0(X)$ подполугруппу в $K(X)$ состоящую из распределений вида

$$\mu \in K_0(X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mu = E_x * \mu_1 * \dots * \mu_n$$

где $\mu_i = p_i(M_i)$, $M_i \in K(\mathbb{R})$, $p_i : \mathbb{R} \to C_X$ - непрерывные гомоморфизмы, $i = \overline{1,n}$.

Т е о р е м а 4. Класс $K_0(X)$ плотен, в топологии слабой сходимости, в $K(X)$.

Если $\dim C_X \geq 2$, то класс $K_\varphi(X)$ не является базисом в $K(X)$, т.е. существует $\mu \in K(X)$ такое, что μ не представима в виде конечной или бесконечной свёртки распределений $\mu_i \in K_\varphi(X)$

Обозначим через $I_\infty(X) = I(X) \cap K_\infty(X)$. Тогда $m_K \in I_\infty(X)$ если и только если подгруппа K связна.

Т е о р е м а 5. Для произвольной группы X верно равенство

$$\overline{K(X)} = I_\infty(X) * K(X)$$

<u>Следствие.</u> Класс $K(X)$ замкнут в топологии слабой сходимости тогда и только тогда, когда $C_X \approx \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 6. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\overline{K(X)} = K_\infty(X)$
2. В группе C_X^* любые два не неограниченно делимых элемента зависимы.

ГЛАВА 2.

В § 5 доказаны групповые аналоги основной характеризационной теоремы для распределения Коши на $\mathbb{R}$. Прежде чем её сформулировать введём обозначения:

$$K_{n_1 n_2}(X) = K_{n_1}(X) \cap K_{n_2}(X), \quad I_{n_1 n_2}(X) = I(X) \cap K_{n_1 n_2}(X)$$

$$K^{+}_{n_1 n_2}(X) = K^{+}_{n_1}(X) \cap K^{+}_{n_2}(X), \quad K^{\delta}_{n_1 n_2}(X) = \{\mu \in K_{n_1 n_2}(X) : \mu \text{ – безгранично делимо}\}$$

$$K^{+\delta}_{n_1 n_2}(X) = K^{+}_{n_1 n_2}(X) \cap K^{\delta}_{n_1 n_2}(X)$$

Тогда верны включения

$$K(X) \subset K^{+\delta}_{n_1 n_2}(X) \subset K^{+}_{n_1 n_2}(X)$$

$$I_{n_1 n_2}(X) * K(X) \subset K^{\delta}_{n_1 n_2}(X) \subset K_{n_1 n_2}(X)$$

Пусть P - множество простых чисел. Обозначим через $P(X)$ множество таких чисел $p \in P$, что группа C_X не содержит элемента порядка p. Обозначим через

$$\varphi(X) = \left\{ \frac{n}{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_e^{k_e}} ;\ n, k_1, \ldots, k_e \in \mathbb{Z},\ p_i \in P(X) \right\}$$

Пусть $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Пару (n_1, n_2) назовём допустимой, если $\ln n_1 / \ln n_2$ - иррационально. Множество допустимых пар обозначим через $\mathfrak{M}$.

Как доказал Ю.В.Линник, на числовой прямой $\mathbb{R}$ справедлива следующая основная характеризационная теорема для распределения Коши.

Т е о р е м а A. $\forall (n_1, n_2) \in \mathfrak{M} \quad K_{n_1 n_2}(\mathbb{R}) = K(\mathbb{R})$

<u>Замечание.</u> Теорему A можно сформулировать в терминах случайных величин следующим образом: пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением μ, тогда, если $n\xi_1$ и $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ равнораспределены при двух значениях n, $n = n_1$ и $n = n_2$, таких, что $\ln n_1 / \ln n_2$ иррационально, то μ - распределение Коши.

Основными результатами § 5 являются следующие теоремы.

Т е о р е м а 7. Пусть $(n_1, n_2) \in \mathfrak{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:

I. $K_{n_1 n_2}(X) = I_{n_1 n_2}(X) * K(X)$

2. $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$: а) $n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \in \varphi(X)$

б) $n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} < 1$

Пусть $M(y)$ - группа линейно зависимых (над $\mathbb{Z}$) от y элементов в Y, рассматриваемая в дискретной топологии.

Т е о р е м а 8. Пусть $(n_1, n_2) \in \mathfrak{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:

I. $K^{+}_{n_1 n_2}(X) = K(X)$

2. Для любой связной подгруппы $X_1 \subset X$ существует $y_1 \in X_1^*$ такой, что $M^*(y_1)$ удовлетворяет условию 2 Теоремы 7.

Т е о р е м а 9. Для произвольной группы X верны равенства

$$K^{S}_{n_1 n_2}(X) = I_{n_1 n_2}(X) * K(X) \qquad (n_1, n_2) \in \mathfrak{M}$$
$$K^{+S}_{n_1 n_2}(X) = K(X)$$

В § 6 доказаны некоторые групповые аналоги характеризации распределения Коши на числовой прямой равнораспределенностью одночлена и линейной статистики.

Множество $A = \{a_i\}_{i=0}^{s}$ целых чисел называется допустимым для группы X, если $X^{(a_j)} \neq \{0\}$, $j = \overline{0,s}$ $\left(X^{(n)} = f_n(X)\right.$, где $\left.f_n(x) = nx\right)$

Обозначим через $\mathcal{R}(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s \geq 2$, удовлетворяющих условию:

$a_1, \dots, a_s$ - взаимно просты и

$$\sum_{i=1}^{s} |a_i| = a_0$$

где, по крайней мере, одна пара чисел $-\ln\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \dots, -\ln\left|\frac{a_s}{a_0}\right|$ несоизмерима.

Положим $\bar{a} = \text{НОК}\left\{\left\{\text{НОД}\left\{|a_i|\right\}_{i=1}^{s}, i \neq j\right\}_{j=1}^{s}\right\}$, т.е. если $A \in \mathcal{R}(X)$ и $\bar{a}$ делится на p^k, $p \in P$, то на p^k делятся $s-1$ число $a_i \in A$, при этом a_0 и $\bar{a}$ взаимно просты. Обозначим через $\Delta(\bar{a})$ множество простых делителей числа $\bar{a}$.

Пусть $A \in \mathcal{R}(X)$. Обозначим через $K_A(X)$ множество распределений удовлетворяющих уравнению

$$\hat{\mu}(a_0 y) = \prod_{i=1}^{s} \hat{\mu}(a_i y)$$

Положим: $I_A(X) = I(X) \cap K_A(X)$, $D_A(X) = D(X) \cap K_A(X)$

$$K_A^+(X)=\{\mu\in K_A(X): \hat{\mu}(y)\neq 0,\ \forall y\in Y\}$$

Очевидно, верны включения

$$I_A(X) * K^s(X)\subset K_A(X)$$

$$D_A(X) * K^s(X)\subset K_A^+(X)$$

Основной вопрос: когда верны равенства

$$K_A(X)=I_A(X) * K^s(X) \qquad (3)$$

$$K_A^+(X)=D_A(X) * K^s(X) \qquad (4)$$

Как доказал Ю.В.Линник, если $X=\mathbb{R}$, то $\forall A\in\mathcal{N}(\mathbb{R})$ верны равенства (3) и (4) (в терминах случайных величин этот результат можно сформулировать следующим образом: пусть $\xi_1,\dots,\xi_s$, $s\geqslant 2$, – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением μ, тогда, если линейные формы $a_0\xi_1$ и $a_1\xi_1+\dots+a_s\xi_s$, где $A=\{a_i\}_{i=0}^{s}\in\mathcal{N}(\mathbb{R})$, одинаково распределены, то μ – распределение Коши).

Для произвольных групп получены следующие основные результаты.

Т е о р е м а 10. Для того чтобы на группе X выполнялось равенство (3) для $A\in\mathcal{N}(X)$, необходимо чтобы выполнялись условия:

1. Для любой компактной подгруппы $K\subset X$, для которой $K^{(a_0)}=K$, K^* не содержит элемента порядка $p\in Д(\bar{a})$.

2. $\frac{1}{a_0}\in\Phi(X)$, т.е. $\{x\in C_X: a_0x=0\}=\{0\}$

<u>Замечание.</u> Если группа X удовлетворяет условию 1 Теоремы 10, то для любой компактной подгруппы $K\subset X$, такой что $K^{(a_0)}=K$, гомоморфизм $f_{\bar{a}}: K\to K$, $f_{\bar{a}}(x)=\bar{a}x$, является автоморфизмом группы K и, в частности, группа X не содержит элементов порядка $p\in Д(\bar{a})$

Т е о р е м а 11. Для того чтобы на группе X имело место равенство (4) для $A\in\mathcal{N}(X)$, необходимо чтобы выполнялись условия:

1. X не содержит элементов порядка $p\in Д(\bar{a})$.

2. Для любой связной подгруппы X_1 группы X, группа X_1^* содержит элемент y_1 такой, что

$$\exists\, k_1,\dots,k_s\in\mathbb{N}\cup\{0\}: \frac{a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_s^{k_s}}{a_0^{k_1+\dots+k_s}}\in\Phi(M^*(y_1)) \quad (k_1+\dots+k_s>0)$$

Т е о р е м а 12. Для того чтобы при некотором $A \in \mathcal{D}(X)$ имело место равенство (3), необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла условию:

1. $P(X) \neq \emptyset$

Т е о р е м а 13. Для того чтобы на группе X имело место равенство (3) при любом $A \in \mathcal{D}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла одному из условий:

1. $X \approx \mathbb{R}^n \oplus D$, $n \geq 0$, D – дискретная группа без кручения.
2. $X^{(p)} = \{0\}$, где p – простое число.

Отметим, что Теорема 12, в случае когда $\dim C_X \leq 1$, доказана Г.М.Фельдманом [1], а сами Теоремы 12 и 13 аналогичны соответствующим теоремам для гауссовского распределения (см. вышеупомянутую монографию Г.М.Фельдмана).

Положим: $K_{A\infty}(X) = \bigcap_{A \in \mathcal{D}(X)} K_A(X)$, $I_{A\infty}(X) = I(X) \cap K_{A\infty}(X)$

Отметим, что если группа X не конечного порядка, то $m_K \in I_{A\infty}(X)$ если и только если, группа K связна.

Т е о р е м а 14. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $K_{A\infty}(X) = I_{A\infty}(X) * K^s(X)$
2. C_X^* состоит из неограниченно делимых элементов.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

1. Габриелян С.С. О распределении Коши на абелевых группах.- ДоповІдІ АН УкраЇни, 9(1990), с. 12-13.
2. Габриелян С.С. О распределении Коши на абелевых группах.- деп. в ВИНИТИ, 1991, № 3779-В91, с. 1-21.
3. Габриелян С.С. О характеризации распределения Коши на абелевых группах.- ДоповІдІ АН УкраЇни, 10(1991), с. 43-45.
4. Габриелян С.С. О характеризации распределения Коши на абелевых группах.- деп. В ВИНИТИ, 1991, № 4140-В91, с. 1-21.
5. Габриелян С.С. О распределении Коши, в смысле Урбаника, на абелевых группах.- деп. в ВИНИТИ, 1991, № 4641-В91, с. 1-16.
6. Габриелян С.С. К характеризации распределения Коши на абеле-

вых группах.- Динамические системы и комплексный анализ, Киев, Наукова Думка, 1992 г. , с. 163- 168.

Е.Габриел-

ГАБРИЕЛЯН СААК САРКИСОВИЧ

Ответственный за выпуск и.о. руководителя отдела № 25 доктор физико-математических наук Г.М.Фельдман

Подписано к печати 8.12.92 г., заказ № 167.Объём - I усл.п.л.
Тираж I00 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины, 3I0 I64, Харьков-I64,пр.Ленина, 47