Академія наук України

Ордена Трудового Червоного Прапора Інститут математики

На правах рукопису

КІНАШ Орест Михайлович

ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА ДЛЯ МАРКІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ СКІНЧЕНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ

01.01.05 - теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико- математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ШУРЕНКОВ В.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор АНІСІМОВ В.В., доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник СВІЩУК А.В.

Ведуча організація: Інститут прикладної математики і механіки АН України, м. Донецьк

Захист дисертації відбудеться 26 січня 1993 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ-4, ГСП, вул Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано 29 листопада 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки перехідних імовірностей однорідного марківського процесу. Це питання має досить багату історію, що бере початок в роботах А.А.Маркова, А.Н.Колмогорова, В.Дьобліна. У випадку ергодичних процесів успіхи у вивченні проблеми збіжності перехідних імовірностей до стаціонарного розподілу зв"язані з роботами П.Леві, Т.Е.Харріса, С.Орі. Значних результатів в розглядуваному питанні вдалося досягнути завдяки використанню методів теорії відновлення, а конкретніше застосуванню теорем, що належать Феллеру, Ердешу, Поллярду і відомих також під назвою теорем відновлення. Дані теореми встановлюють існування границі так званого рівняння відновлення. Вивченню перехідних явищ для рівняння відновлення приділено багато уваги в роботах Д.С.Сільвестрова, В.М.Шуренкова, О.В.В"югіна.

В даній роботі перехідні явища для теорем відновлення застосовуються до вивчення поведінки марківських процесів, що залежать від малого параметра таким чином, що коли цей малий параметр прямує до нуля, то даний процес прямує до деякого процесу з відомою асимптотичною поведінкою перехідних імовірностей. Ця задача в свій час досить плідно розв"язувалась, у досить загальній ситуації, А.А.Анісімовим, А.Ф.Турбіним і їх учнями.

Мета роботи. Вивчення асимптотичної поведінки перехідної імовірності $P_{ij}^{n}(t)$ однорідного марківського процесу $X_n(t)$ зі скінченою множиною станів, коли $n \to \infty$, $t \to \infty$, а саме :
I. Знаходження такого $\varepsilon_n \to 0$, що в асимптотиці $P_{ij}^{n}(t/\varepsilon_n)$ виключено тривіальний випадок ;

2. Дослідження структури ε_n .

Методика досліджень. В дисертації використовуються методи, розвинуті при вивченні багатомірного рівняння відновлення. Крім цього, використовуються спеціальні методи і дані матричного аналізу.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі отримано наступні основні результати :

- методами теорії відновлення встановлена асимптотика перехідних імовірностей однорідного марківського процесу зі скінченою кількістю станів ;

- показано існування такого малого параметра при якому в асимптотиці перехідних імовірностей відсутній тривіальний випадок ;

- показано, що в якості такого малого параметра можна взяти перронів корінь певної матриці ;

- детально досліджено асимптотику перронового кореня у загальному (не обов"язково стохастичному) випадку.

Теоретична і практична цінність. Результати дисертаційної роботи представляють інтерес при вивченні марківських процесів, гіллястих процесів, адитивних функціоналів. Також результати дисертації можуть бути використані в теорії збурення матриць.

Апробація роботи і публікації. Основні результати дисертації доповідались на семінарах теорії ймовірностей і математичної статистики Інституту математики АН України, на семінарах по теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів Львівського держуніверситету, на міжнародній математичній конференції присвяченій 100-річчю народження С.Банаха (Львів, 1992 р.) , на 2-у Українсько - Угорському симпозиумі "Нові напрямки теорії ймовірностей і математичної статистики" (Мукачево, 1992 р.) і опубліковані в роботах [I - 5].

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається зі вступу і основної частини, яка розбита на вісім параграфів. Загальний об"єм роботи 77 стор. машинописного тексту. Бібліографія складає 30 назв.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подається короткий огляд досліджень, що зв"язані з темою дисертації, викладені її основні результати.

В §I наведено ряд відомих результатів, на які спираються використані в роботі методи.

В §2 досліджується гранична поведінка перехідних імовірностей однорідного марківського процесу $X_\varepsilon(t)$ зі скінченою множиною станів.

Розглядається, для кожного $\varepsilon > 0$, однорідний марківський процес $X_\varepsilon(t)$ зі скінченою множиною станів E і з перехідною імовірністю $P^\varepsilon_{ij}(t)$ за час t, де $i, j \in E$. Будемо вважати, що

$$P_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} P^\varepsilon_{ij}(t)$$

є перехідною імовірністю деякого процесу $X(t)$, який будемо називати граничним для процесу $X_\varepsilon(t)$.

Будемо вважати також, що виконуються наступні умови (A):

(AI) $\quad P^\varepsilon_{ij}(t) = \delta_{ij} + t\lambda^\varepsilon_{ij} + o(t)$, при $t \to 0$,

де $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$ і $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$. λ^ε_{ij} - інтенсивність переходу зі стану i в стан j ;

(A2) $\lambda^{\varepsilon}_{ij} = \lambda_{ij} + \varepsilon c_{ij} + o(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$,

де λ_{ij} - інтенсивність переходу для граничного процесу $X(t)$;

Множина станів E складається з підмножин E_k, $k=1,\dots,r$, таких, що $E = E_1 \cup \dots \cup E_r$, $E_k \cap E_m = \emptyset$ для $k \neq m$;

(A3) $\sum\limits_{j \in E_k} p_{ij}(t) = 1$, $i \in E_k$, $k = 1,\dots,r$;

A4 Обмеження $X(t)$ на кожну з множин E_k , $k=1,\dots,r$ є ергодичним процесом зі стаціонарними розподілами $\pi_i^1,\dots,\pi_i^r$ відповідно на $E_1,\dots,E_r$, де $\pi_i^k > 0$, $k=1,\dots,r$

Доведено наступну теорему.

<u>Теорема 2.2</u>. Нехай виконуються всі умови (А) , тоді

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to \infty}} \mathbb{P}_i \{ X_\varepsilon(t/\varepsilon) = j \} = q_{lk}(t)\, \pi_j^k ,$$

при $i \in E_l$, $j \in E_k$, де $\| q_{lk}(t) \|_{l,k=1}^{r} = e^{t\mathcal{D}^*}$,

$$\mathcal{D}^* = \| d^*_{lk} \| , \quad d^*_{lk} = \sum_{\substack{j \in E_l \\ s \in E_k}} \pi_j^l c_{js}$$

Потрібно відмітити, що останній результат не новий (див. [I]), але отриманий іншим шляхом.

<u>В §3</u> продовжено дослідження асимптотики перехідних імовірностей введеного процесу $X_\varepsilon(t)$ у більш загальній ситуації, коли присутні ще неістотні стани.

Зауважимо, що в теоремі 2.2 можливий випадок, коли $q_{lk}(t) = \delta_{lk}$, де $\delta_{lk} = 1$ при $l = k$ і $\delta_{lk} = 0$, при $l \neq k$. Такий випадок назвемо тривіальним, і в цьому випадку $\mathcal{D}^* = 0$, а значить і $c_{ij} = 0$, при $i \in E_l$, $j \in E_k$, $l \neq k$. Таким чином наявність асимптотичного розкладу (A2) ще не визначає істинну швидкість росту параметра t (по відношенню до $\varepsilon \downarrow 0$) при якій існує нетривіаль-

I. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем.- Киев : Наук. думка, 1978.- 220 с.

на границя для $P^{\varepsilon}_{ij}(t/\varepsilon)$. Перед нами постає задача знаходження такого $\delta = \delta(\varepsilon)$, при якому існує нетривіальна границя для $P^{\varepsilon}_{ij}(t/\delta(\varepsilon))$.

Цій задачі присвячено §4 . В ньому приймаються нові позначення. Розглядаємо для кожного n , $n \in N$ однорідний марківський процес $X_n(t)$ зі скінченою множиною станів E і перехідною імовірністю $P^n_{ij}(t)$ за час t . Будемо вважати, що для $X_n(t)$ виконуються наступні умови :

(A0) $\quad P^n_{ij}(t) \to P_{ij}(t)$, при $n \to \infty$;

(AI) $\quad P^n_{ij}(t) = \delta_{ij} + \lambda^n_{ij}(t) + o(t)$, при $t \to 0$;

Умови (A3) і (A4) зберігаються.

Ми відмовляємось лише від умови (A2) .

При виконанні згаданих умов справедлива наступна теорема.

Теорема I.4. Існує така послідовність $\varepsilon_n \downarrow 0$ і така послідовність $r \times r$ - матриць

$$C_n = \left(c^n_{k\ell}\right)^{r}_{k,\ell=1} ,$$

що $c^n_{k\ell} \geqslant 0$ при $k \neq \ell$,

$$\sum_{\ell=1}^{r} c^n_{k\ell} = 0 \ , \ \sum_{k=1}^{r} c^n_{kk} = -1 \ , \ k,\ell = 1,\dots,r$$

і

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ t\to\infty}} \left\{ P^n_{ij}(t/\varepsilon_n) - q^n_{\alpha\beta}(t)\,\pi^{\beta}_{j} \right\} = 0 ,$$

при $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, $q^n_{\alpha\beta}(t)$ – (α,β) - ий елемент матриці $\exp\{tC_n\}$.

В §5 уточнено структуру послідовностей ε_n і C_n.

Доведено наступну теорему.

<u>Теорема I.5</u>. Послідовності ε_n і $C_n = \left(c_{kl}^n\right)_{k,l=1}^r$ з теореми I.4 можна вибрати таким чином, що вони будуть задовільняти наступні асимптотичні співвідношення при $n \to \infty$:

$$\varepsilon_n \sim -\sum_{k=1}^{r} \rho_n^k \;;$$

$$c_{kl}^n \sim \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i \in E_k} \sum_{j \in E_l} \pi_i^k \lambda_{ij}^n ,\; k \neq l ,$$

де ρ_n^k - перронів корінь, тобто дійсне власне число з максимальною (серед усіх власних чисел) дійсною частиною, матриці Λ_n^k, що є обмеженням матриці інтенсивностей переходів Λ_n на множину E_k , $k=1,\ldots,r$.

В наступних трьох параграфах уточнюється структура перронового кореня. Зауважимо, що розглядається матриця інтенсивностей переходів $\Lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n$, що відповідає одному класу станів зі стаціонарним розподілом π_j . Це не зменшує загальність, оскільки, розглядаючи асимптотику ε_n в теоремі I.5, ми вибирали перронів корінь ρ_n^k з одного класу E_k .

<u>В §6</u> розглядається асимптотичний розклад при $n \to \infty$

$$\Lambda_n \approx \Lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k B_k ,$$

де $\delta_k = \delta_k(n) \to 0$ і $\delta_{k+1} = o(\delta_k)$, при $n \to \infty$, B_k - сталі матричні коефіцієнти.

Вводимо : - $\vec{1}$ і $\vec{\pi}$ - правий і лівий анулюючі вектори матриці Λ , $\langle \vec{\pi}, \vec{1} \rangle = 1$;

- $\vec{e}_n$ і $\vec{\pi}_n$ - правий і лівий власні вектори матриці Λ_n , що відповідають ρ_n , де ρ_n - перронів корінь матриці Λ_n .

Основним результатом §6 є наступна теорема.

Теорема I.6. Нехай

$$<\vec{\pi}, B_1 \vec{1}> = \dots = <\vec{\pi}, B_{l-1} \vec{1}> = 0,$$

$$<\vec{\pi}, B_l \vec{1}> \neq 0.$$

Тоді, при $n \to \infty$, маємо :

$$\rho_n \sim \delta_l <\vec{\pi}, B_l \vec{1}>.$$

В §7 узагальнюється результат попереднього параграфа на випадок нестохастичної матриці.

Вводимо наступне означення.

Означення I.7. Матрицю $\Lambda^{(-1)}$ будемо називати оберненою узагальненою до Λ, якщо $\Lambda \Lambda^{(-1)} = \Lambda^{(-1)} \Lambda = I - \Pi$, де $\Pi = \vec{1} \otimes \vec{\pi}$; $\Lambda^{(-1)} \vec{1} = \vec{0}$, $\vec{\pi} \Lambda^{(-1)} = \vec{0}$.

Позначимо $V = -\Lambda^{(-1)}$.

Доведено наступну теорему.

Теорема I.7. Нехай $<\vec{\pi}, B_j \vec{1}> = 0$, $j = 1, \dots, l-1$, $<\vec{\pi}, B_l \vec{1}> \neq 0$, $<\vec{\pi}, B_1 V B_1 \vec{1}> \neq 0$.

Тоді

(I) $\rho_n \sim \delta_l <\vec{\pi}, B_l \vec{1}>$, при $\delta_1^2 = o(\delta_l)$;

(II) $\rho_n \sim \delta_l [c <\vec{\pi}, B_1 V B_1 \vec{1}> + <\vec{\pi}, B_l \vec{1}>]$,

або

$$\rho_n \sim \delta_1^2 [<\vec{\pi}, B_1 V B_1 \vec{1}> + \frac{1}{c} <\vec{\pi}, B_l \vec{1}>],$$

при $\delta_1^2 \sim c \delta_l$;

(III) $\rho_n \sim \delta_1^2 <\vec{\pi}, B_1 V B_1 \vec{1}>$, при $\delta_l = o(\delta_1^2$

Послідовно, накладаючи умови на скалярні добутки ми приходимо до наступного твердження.

Твердження. Нехай $\langle \vec{\pi}, B_j \vec{1} \rangle = 0$, $j = 1, \dots, l-1$, $\langle \vec{\pi}, B_1 \vec{1} \rangle \neq 0$, $\langle \vec{\pi}, B_1 V B_1 \vec{1} \rangle = 0$, $\langle \vec{\pi}, B_1 (V B_1)^2 \vec{1} \rangle \neq 0$, $\langle \vec{\pi}, B_1 V B_2 \vec{1} \rangle + \langle \vec{\pi}, B_2 V B_1 \vec{1} \rangle \neq 0$.

Тоді

$$\rho_n \sim \delta_l \left[c_1 \langle \vec{\pi}, B_1 (V B_1)^2 \vec{1} \rangle + c_2 \langle \vec{\pi}, B_1 V B_2 \vec{1} \rangle + c_2 \langle \vec{\pi}, B_2 V B_1 \vec{1} \rangle + \langle \vec{\pi}, B_l \vec{1} \rangle \right],$$

при $\delta_1^3 \sim c_1 \delta_l$ і $c_2 \delta_l \sim \delta_1 \delta_2$.

Зауважимо, що при інших співвідношеннях між $\delta_1^3, \delta_1 \delta_2, \delta_l$ ми отримаємо іншу асимптотику для ρ_n. В даному випадку наведено лише один із прикладів асимптотики для ρ_n.

Рухаючись далі і накладаючи послідовно умови на скалярні добутки ми будемо йти до загального випадку, вивченню якого присвячено §8.

Введемо $\mathcal{D}_n = \Lambda_n - \Lambda$. Тоді $\Lambda_n = \Lambda + \mathcal{D}_n$ і $\mathcal{D}_n \to 0$, при $n \to \infty$.

Виводиться наступна формула, яку названо основною формулою:

$$\rho_n + o(\rho_n) = \sum_{k=0}^{m-1} \langle \vec{\pi}, \mathcal{D}_n (V \mathcal{D}_n)^k \vec{1} \rangle + \langle \vec{\pi}_n, \mathcal{D}_n (V \mathcal{D}_n)^m \vec{1} \rangle, \tag{1}$$

де m - довільне натуральне число.

Для роботи з основною формулою використовується наступна лема.

Лема I.8. Нехай $\mathcal{D}_n \to 0$, тоді існують послідовність $n' \to \infty$, скінчена шкала $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$, тобто $\delta_k \to 0$ і $\delta_{k+1} = o(\delta_k)$, при $n = n' \to \infty$, і скінчений набір матриць $B_1, B_2, \ldots, B_N$ таких, що

$$\mathcal{D}_{n'} = \delta_1 B_1 + \cdots + \delta_N B_N .$$

Ця лема показує природність припущення, що матриця $\mathcal{D}_n$ має асимптотичний розклад по деякій шкалі $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N, \ldots$, не обов"язково скінченій. А саме

$$\mathcal{D}_n = \delta_1 B_1 + \cdots + \delta_j B_j + o(\delta_j).$$

Позначимо : $c_i = \langle \vec{\pi}, B_i \vec{1} \rangle$; $c_1^j = \langle \vec{\pi}, B_1 (VB_1)^{j-1} \vec{1} \rangle$.

Розглянемо можливі ситуації.

Ситуація I. Нехай існує такий номер j , що $c_1^j \neq 0$, і нехай

$$L = \min \{ j \geq 1 : \langle \vec{\pi}, B_1 (VB_1)^{j-1} \vec{1} \rangle \neq 0 \} .$$

Тоді

$$\rho_n \sim \sum_{k=0}^{L-1} \langle \vec{\pi}, \mathcal{D}_n (V\mathcal{D}_n)^k \vec{1} \rangle .$$

В останньому співвідношенні символ "$\sim$" розуміємо таким чином, що $\mathcal{D}_n$ потрібно замінити на асимптотичний розклад, розкрити дужки і вибрати мінімальні по порядку, ненульові, апріорі незрівнимі між собою доданки.

В цій ситуації розглядаються два випадки :

I.I. Існує i таке, що $\delta_i = o(\delta_1^L)$ і позначимо

$$K = \min \{ i : \delta_{i+1} = o(\delta_1^L) \} .$$

Тоді

$$\rho_n \sim \sum_{k=0}^{L-1} \langle \vec{\pi}, \widetilde{\mathcal{D}}_n (V \widetilde{\mathcal{D}}_n)^k \vec{1} \rangle ,$$

де $\widetilde{\mathcal{D}}_n = \delta_1 B_1 + \cdots + \delta_K B_K$;

<u>1.2.</u> Нехай $\delta_1^L = o(\delta_i)$, для всіх $i \geq 1$. В цьому випадку будемо вважати, що асимптотичний розклад являється точною рівністю

$$\mathcal{D}_n = \sum_{i \geq 1} \delta_i B_i$$

і

$$\sum_{i \geq 1} \delta_i \| B_i \| < \infty .$$

Нехай

$$\langle \vec{\pi}, B_1 (V B_1)^m \vec{1} \rangle = 0 \qquad (2)$$

для всіх $m \geq 0$. В цьому випадку залишається відкритим питання : Чи слідує тоді з (2) те, що $B_1 \vec{1} = \vec{0}$ або $\vec{\pi} B_1 = \vec{0}$?

<u>Ситуація 2</u>. Будемо вважати, що існує такий номер j, що $\langle \vec{\pi}, B_j \vec{1} \rangle \neq 0$ і позначимо :

$$M = \min \{ j \geq 1 : \langle \vec{\pi}, B_j \vec{1} \rangle \neq 0 \} ;$$

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_n = \delta_1 B_1 + \cdots + \delta_M B_M .$$

Розглядаються три випадки :

<u>2.1.</u> Існує $j \geq 1$, що $\delta_1^{j+1} = o(\delta_M)$. Позначимо

$$N = \min \{ j \geq 1 : \delta_1^{j+1} = o(\delta_M) \} .$$

Тоді

$$\varrho_n \sim \sum_{k=0}^{N-1} \langle \vec{\pi}, \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_n (V \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_n)^k \vec{1} \rangle . \qquad (3)$$

<u>2.2.</u> Нехай для всіх $j \geq 1$ виконується $\delta_M = o(\delta_1^j)$ і існує $L < \infty$ (L те саме, що в ситуації 1) . Приймемо $N = L$, $\mathcal{D}_n = \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_n$ і тоді справедлива формула (3) .

<u>2.3.</u> Виконуються умови :

i) $\delta_M = o(\delta_1^j)$, для всіх $j \geq 1$;

ii) $\langle \bar{\pi}, B_1 (VB_1)^{j-1} \bar{1} \rangle = 0$, для всіх $j \geq 1$.

Тоді $\rho_n = o(\delta_1^j)$, для будь-якого $j \geq 1$. Формула (1) в цьому випадку практично безкорисна.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах :

1. Кинаш О.М. Одна предельная теорема для марковских прцессов с конечным числом состояний// Укр. мат. журн.- 1990.- 42, №10.- С. 1427 - 1431.
2. Шуренков В.М., Кинаш О.М. О существовании малого параметра// Бесконечномерный стохастический анализ.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 114 - 117.
3. Кинаш О.М. О переходных явлениях для марковских процессов с конечным числом состояний// Стохастические уравнения и граничные теоремы.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.- С. 73 - 79.
4. Кинаш О.М. Асимптотическое поведение переходной вероятности однородного марковского процесса с конечным числом состояний в схеме серий// Укр. мат. журн.- 1992.- 44, №4.- С. 574 - 576.
5. Kinash O.M. The limit theorem for transition probability of the homogeneous markov process with finite numbers of states. The case of unesential states// Міжнародна математична конференція присвячена 100-річчю народження С.Банаха, Львів, 6 - 8 травня 1992 р.: Тези доповідей.- Львів, 1992.- С. 17 - 18.

КІНАШ ОРЕСТ МИХАЙЛОВИЧ

ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА ДЛЯ МАРКІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ СКІНЧЕНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ

01.01.05 - теорія ймовірностей і математична статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико - математичних наук

Підписано до друку 23.11.92. Формат 60х84/16. Папір друк. № 1.
Друк. офсет. Умовн. друк. арк.1,2. Умовн. фарб. відб.1,3.
Обл-вид. арк.1,2. Тираж 100. Зам. 421.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету ім. І.Франка. 290602. Львів, вул. Університетська, 1.

469828