АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

САХНОВИЧ Александр Львович

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Отделении гидроакустики Морского гидрофизического института Академии наук Украины.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор НИЖНИК Л.П.

чл.-кор. АН Армении, доктор физико-математических наук, профессор НЕРСЕСЯН А.Б.

доктор физико-математических наук МИХАЙЛЕЦ В.А.

Ведущая организация: Физико-технический институт низких температур АН Украины.

Защита состоится "23" 02 1993 г. в 15 часов на заседании ученого специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601, Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "28" 12 1992 г.

Ученый секретарь ученого специализированного совета ГУСАК Д.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и цель работы. Одним из крупнейших достижений математики XX века является создание спектральной теории самосопряженных операторов. Основы этой теории закладывались такими выдающимися математиками, как Д.Гильберт (спектральное разложение ограниченного оператора), Дж.Нейман и М.Стоун (спектральное разложение неограниченного оператора). С самого начала спектральная теория разрабатывалась в тесной связи с различными ее приложениями, - в первую очередь, приложениями к проблемам квантовой механики и математической физики.

Важным объектом изучения спектральной теории являются канонические системы

$$\frac{dW(x,\lambda)}{dx} = i\lambda J H(x) W(x,\lambda), \quad 0 < x < l, \tag{I}$$

где $J = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$, $H(x) = H^*(x) \geq 0$, $E_n = \{\delta_{kj}\}_{k,j=1}^{n}$.

К ним сводятся многие классические уравнения (матричное уравнение струны, уравнение Штурма-Лиувилля, уравнение Шредингера), спектральная теория которых была построена ранее усилиями целого ряда замечательных математиков. Каноническими уравнениями вида (I) описываются механические системы, гамильтонианы которых являются квадратичной формой аргументов. Исследованию канонических систем и родственным вопросам посвящены работы М.Г.Крейна, И.М.Гельфанда, Б.М.Левитана, В.Б.Лидского, В.П.Потапова, С.А.Орлова, В.А. Якубовича, Л. де Бранжа, И.С.Каца, Ф.С.Рофе-Бекетова и др.

К каноническим системам близки системы

$$\frac{dW(x,\lambda)}{dx} = i\lambda H(x) W(x,\lambda), \quad 0 < x < l. \tag{2}$$

Системы (2) исследовались В.П.Потаповым, М.С.Бродским, З.Л.Лейбензоном, Л.А.Сахновичем и др. К виду (I), (2) сводятся вспомогательные системы для многих интегрируемых методом обратной задачи нелинейных уравнений. Обратная задача рассеяния для вспомогательных систем на оси изучается в важных работах В.Е.Захарова, С.В.Манакова, А.Б.Шабата, Л.Д.Фаддеева, М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла, Х.Сигура, Р.Билса и Р.Кауфмана. Нестационарной задаче рассеяния для уравнений Дирака на оси и полуоси посвящены интересные работы Л.П.Нижника. Спектральной теории систем (I), (2) посвящены первые три главы диссертации.

Широко известны результаты по решению нелинейных уравнений на оси методом обратной задачи рассеяния (ОЗР). После пионерских работ С.Гарднера, И.Грина, М.Крускала и К.Миуры, а затем П.Лакса огромный вклад в эту тематику внесли В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, С.П.Новиков, С.В.Манаков, Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян, Б.А.Дубровин, И.М.Кричевер и их сотрудники, а также представители "потсдамской" группы. В течение последнего десятилетия активизировался интерес к учету граничных условий, к решению смешанных задач для нелинейных уравнений (см. работы Д.Каупа, А.Фокаса, И.М.Кричевера, Ю.М.Березанского, Л.А.Сахновича, Е.К.Склянина и др.). В диссертации результаты по спектральной теории применяются к исследованию интегрируемых нелинейных уравнений на полуоси.

Методика исследования. Вопрос описания множества спектральных функций системы (I) при $\det H(x) \neq 0$ допускает переформулировку в терминах теории симметрического оператора. Сложнее свести к теории симметрического оператора случай, когда $\det H(x)$ может обращаться в 0. (Сошлемся здесь на свидетельство И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна[I].) Поэтому имеет смысл непосредственно строить спектральную теорию системы (I). При $\det H(x) \neq 0$, как и

[I] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. - М.: Наука, 1967.

в ряде других классических задач, множество спектральных функций описывается в терминах функций Неванлинны $\varphi(\lambda)$, задаваемых дробно-линейным преобразованием пар, обладающих J-свойством. Если отказаться от требования $\det H \neq 0$, то для того, чтобы функция обложения τ, соответствующая $\varphi(\lambda)$, была спектральной (или псевдоспектральной), должны выполняться дополнительные условия. При $n=1$ описание множества спектральных функций вытекает из книги Л. де Бранжа (1968). Несколько позже В.П.Потапов разработал новый метод решения интерполяционных задач с помощью основного матричного неравенства (ОМН). Его учениками Л.Б.Голинским и И.В.Михайловой была предпринята интересная попытка исследовать связь между ОМН и теорией де Бранжа (препринт ФТИНТ АН УССР под ред. В.П.Потапова). В то же время наряду с ОМН было введено преобразованное ОМН (ПОМН) (см. работы В.П.Потапова, В.Э.Кацнельсона, И.В.Ковалишиной, Л.А.Сахновича, Т.С.Иванченко). Используя аналог ПОМН, нам удалось описать спектральные (или псевдоспектральные) функции канонической системы при $n \geq 1$. Далее в работе существенно используется метод операторных тождеств: $AS-SB=\Pi_1\Pi_2^*$ [1]. Операторное тождество обобщает коммутационные соотношения и лежит в основе понятия S-узла, которое, в свою очередь, обобщает понятие узла. Канонические системы, связанные с S-узлами, детально исследовались в обзоре Л.А.Сахновича[2], где даны описание множества спектральных функций этих систем и метод решения обратной спектральной задачи. В диссертации выражается в терминах S-узлов максимальный скачок спектральной функции, асим-

---

[1] Сахнович Л.А. Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат.наук. 1986. Т.41. Вып.I. С.3-55.

[2] Там же.

птотика спектральных функций и функций Вейля-Титчмарша.

Обратные спектральные задачи (ОСЗ), с исчерпывающей полнотой исследованные в знаменитых работах И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана, М.Г.Крейна, В.А.Марченко, сводятся к системе (I) с гамильтонианом вида $H(x)=V^*(x)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}V(x) \quad (n=1)$. В работе Л.А.Сахновича[I)] процедура решения обратной задачи для системы (I) обобщается на случай гамильтонианов, которым соответствуют S-узлы. В случае системы (2) рассматривалась задача восстановления $H(x)$ по $W(l,\lambda)$ $(W(0,\lambda)=E_m\,,\ l<\infty)$. Теорема существования была доказана В.П.Потаповым в его классической работе[2)]. Теоремы единственности при различных дополнительных условиях получались в работах М.С.Бродского, З.Л.Лейбензона, Л.А.Сахновича. Имеется, наконец, (Л.А.Сахнович, I968) процедура решения по $W(l,\lambda)$ ($l<\infty$) обратной задачи для (2) при

$$H(x)=V^*(x)\begin{bmatrix}E_n&0\\0&0\end{bmatrix}V(x)\,,\qquad VV^*=E_m\,. \tag{3}$$

В диссертации система (2) рассматривается на полуоси ($l=\infty$). В случае гамильтонианов вида (3) и вида

$$H(x)=V^*(x)DV(x),\ D=diag\{d_1,d_2,\dots,d_m\},\ VV^*=E_m \tag{4}$$

для системы (2) вводится понятие функции Вейля-Титчмарша (и ее обобщение). Благодаря связи между функцией Вейля-Титчмарша $\varphi(\lambda)$ и функциями $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ в работе строится S-узел. После чего с помощью результатов Л.А.Сахновича[I)] легко восстанавливается

[I)] Сахнович Л.А. Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат.наук. I986. Т.4I. Вып.I. С.3-55.

[2)] Потапов В.П. Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций //Труды ММС. I955. Т.4. С.I25-236.

$H(x)$. Ю.М.Березанский и Л.А.Сахнович плодотворно применили к решению нелинейных уравнений на полуоси метод обратной спектральной задачи (ОСЗ). Они рассматривали уравнения, для которых вспомогательная линейная система приводится к виду (I). В настоящей диссертации метод ОСЗ применяется к нелинейному уравнению Шредингера "с притяжением", уравнению синус-Гордон и задаче N-волн на полуоси, которым соответствуют несамосопряженные вспомогательные системы (2).

Основные результаты, их научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Среди основных результатов диссертации назовём решение задачи о максимальном скачке спектральной функции. Задача о максимальном скачке восходит еще к знаменитой работе П.Л.Чебышева[I]. Наш интерес к этой проблеме был инициирован вопросом, сформулированным В.С.Владимировым и И.В.Воловичем в их статье[2]. Вопрос связан с вычислением свободной энергии гауссовой модели на полуоси, и ответ на него вытекает из решения задачи о максимальном скачке. Дальнейшее развитие результаты по максимальному скачку нашли в работах Д.З.Арова и В.М.Адамяна.

Существенным для характеристики операторов является вопрос об асимптотике спектральных функций. Обращаясь к истории вопроса, необходимо назвать Т.Карлемана, Б.М.Левитана, В.А.Марченко, А.Г. Костюченко. Среди различных методов изучения асимптотики упомянем метод волнового уравнения, позволивший Б.М.Левитану, ряду его учеников и соавторов получить важные результаты в этом направлении.

[I] Chebyshev P.L. Sur les valeurs limites des integrales // J. Math.Pures et Appl. Ser II. 1874. V.19.

[2] Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems // Lect.Notes in Math.-Berlin: Springer Verlag, 1984. V.1043.

Наш подход к асимптотике спектральных функций и функций Вейля-Титчмарша основывается на наличии простой связи между определяющими S-узел матрицами-функциями $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ и функцией Вейля-Титчмарша $\varphi(\lambda)$. К основным результатам диссертации относятся также формулировка и решение обратной спектральной задачи для систем (2) с гамильтонианами вида (3), (4). В отличие от результатов для системы (I) процедура восстановления $H(x)$ здесь идет непосредственно по функции Вейля-Титчмарша $\varphi(\lambda)$, а не по спектральной функции. Решение обратных задач (рассеяния и спектральных) сводится, обычно, к операторному уравнению. В интересных работах Р.Билса и Р.Кауфмана, В.А.Юрко и ряде других возникает вопрос обратимости соответствующего оператора. Предлагаемая нами процедура такую обратимость гарантирует.

При исследовании соответствующих системе (2) интегрируемых уравнений описание эволюции функций Вейля-Титчмарша оказывается близким к результату Л.А.Сахновича[I)]. Для уравнения синус-Гордон удается решить задачу Гурса в области $x \geqslant 0$, $0 \leq t \leq t_0$. Локальное решение этой задачи содержится в работе И.М.Кричевера (ДАН СССР. - 1980). Доказывается существование решения $\xi(x,t)$ задачи N-волн ($x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\xi = -\xi^*$) с заданной в начальный момент функцией Вейля-Титчмарша $\varphi_0(\lambda)$. В работе приводятся условия, при которых $\varphi_0(\lambda)$ соответствует не более одного ограниченного решения, что свидетельствует о естественности постановки задачи N-волн на полуоси. Методом обратной спектральной задачи мы строим явные решения нелинейных уравнений и соответствующих вспомогательных линейных систем. На этом пути выясняется, что ме-

---

I) Сахнович Л.А. Эволюция спектральных данных и нелинейные уравнения // Укр.мат.журн. 1988. Т.40, № 4. С.533-535.

тод операторных тождеств (теория S-узлов) применим для непосредственного построения явных решений нелинейных уравнений.

В теории интегрируемых уравнений разработан целый ряд важных прямых методов построения явных решений и решений, выражаемых через θ-функцию Римана. Одним из интересных подходов является подход, предложенный В.А.Марченко[I)]. Объединяя линейные уравнения в частных производных из его работы[I)] с методом операторных тождеств, мы получаем унифицированную и простую процедуру построения явных решений группы важных нелинейных уравнений. В частности, строятся содержащие сингулярности явные решения ξ матричных уравнений: НУШ, МКдФ, задачи N-волн с редукцией $\xi^*=-B\xi B$ $(B\neq E_m)$, уравнения главного кирального поля. Получение этих явных формул представляется существенным в связи с тем, что сингулярности решений физически интерпретируются как коллапсы, частицеподобность, неустойчивость и т.д. и исследуются в целом ряде работ В.Е.Захарова и С.В.Манакова, В.А.Аркадьева, А.К.Погребкова, М.К.Поливанова, Д.Каупа, М.Яворского, Л.А.Сахновича, И.Ф.Тиднюка.

В статьях Л.А.Сахновича, Г.Калиша, М.М.Маламуда и некоторых других рассматривался вопрос подобия вольтерровских операторов оператору интегрирования $i\int_0^x \cdot\, du$. Из результатов по обратной задаче для системы (2), (4) вытекает одна теорема о подобии оператору $D\int_0^x \cdot\, du$. Методом операторных тождеств выводятся также новые результаты по дифракции в волноводах.

<u>Апробация работы</u>. Результаты диссертации докладывались на У-УП конференциях "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" (Черноголовка), на ХУ и ХУI Всесоюзных школах по теории опе-

---

I) Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. Киев: Наукова думка, 1986.

раторов в функциональных пространствах, на IУ школе-семинаре "Акустика океана" (Москва, 1986 г.), на 3-ей региональной школе-семинаре по гидроакустике (Цимлянск, 1987 г.), на I-ом республиканском семинаре по теории целых и субгармонических функций и её приложениям (Харьков, 1990 г.), на Крымской осенней математической школе по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-I), на республиканской конференции "Функциональный анализ и его приложения" (Одесса, 1990 г.), на семинаре по спектральной теории дифференциальных операторов под руководством проф. А.Г.Костюченко и проф. Б.М.Левитана в МГУ (1989, 1990, 1991 гг.), на семинаре при Институте математики АН Украины под руководством акад. Ю.М.Березанского (1991, 1992 гг.), на семинаре при Харьковском госуниверситете под руководством акад. В.А.Марченко, на семинаре по уравнениям математической физики при Московском физико-техническом институте под руководством проф. В.Б.Лидского, на семинаре при Институте математики АН Армении под руководством чл.-кор. АН Армении А.Б.Нерсесяна, на городских семинарах г.Одессы под руководством чл.-кор. АН УССР М.Г.Крейна, проф. Д.З.Арова, проф. Л.А.Сахновича, проф. Г.С.Литвинчука.

Публикации. Публикации автора по тематике диссертации приведены в конце автореферата. Содержащиеся в диссертации результаты принадлежат автору.

Структура и объем работы. Диссертация содержит введение и шестнадцать параграфов, которые разбиты на пять глав.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

I. В главе I рассматривается система (I) с суммируемым на $(0,\ell)$ гамильтонианом $H(x)$. Через $L^2(H)$ обозначается пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_0^\ell g^*(x)H(x)f(x)\,dx .$$

Вводится матрица-функция $\mathfrak{A}(x,\lambda)=W^*(x,\bar\lambda)$, где $W(0,\lambda)=E_{2n}$, $W(x,\lambda)$ удовлетворяет (I). Пространство де Бранжа состоит из функций

$$F(\lambda)=Uf=\int_0^l \mathfrak{A}(x,\lambda)H(x)f(x)dx,\quad f\in L^2(H),\quad F=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}$$

со скалярным произведением $(Uf,Ug)_B=(f,g)$. (Здесь F_1, F_2 - блоки порядка n вектора F.) Равенством $Vf=F_2$ задается оператор V. Через L^2_τ обозначается пространство n-мерных вектор-функций со скалярным произведением

$$\langle \mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle_\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{Z}^*(t)\,d\tau(t)\,\mathcal{Z}(t).$$

Определение I.I. Неубывающая матрица-функция $\tau(t)$ называется спектральной матрицей-функцией системы (I), если V изометрично отображает $L^2(H)$ в L^2_τ.

Определение I.2. Неубывающая матрица-функция $\tau(t)$ называется псевдоспектральной, если V изометрично отображает $L_1=L^2(H)\ominus\operatorname{Ker}V$ в L^2_τ.

Существенную роль в описании спектральных функций играет дробно-линейное преобразование

$$\varphi(\lambda)=i[a(\lambda)P(\lambda)+b(\lambda)Q(\lambda)][c(\lambda)P(\lambda)+d(\lambda)Q(\lambda)]^{-1}, \tag{5}$$

где a, b, c, d - блоки порядка n матрицы $\mathfrak{A}(\lambda)=\mathfrak{A}(l,\lambda)$:

$$\mathfrak{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}a(\lambda) & b(\lambda)\\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Определение I.3. Пара мероморфных в верхней полуплоскости матриц-функций $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ называется неособенной и обладающей J-свойством, если почти всюду

$$P^*(\lambda)P(\lambda)+Q^*(\lambda)Q(\lambda)>0,\quad P^*(\lambda)Q(\lambda)+Q^*(\lambda)P(\lambda)\geq 0.$$

Множество матриц-функций $\varphi(\lambda)$, получаемых преобразованием (5) неособенных, обладающих $\mathcal{J}$-свойством пар P, Q, обозначим через $\mathcal{N}(\alpha)$. Функции $\varphi(\lambda)\in\mathcal{N}(\alpha)$ допускают представление Неванлинны

$$\varphi(\lambda)=\mu\lambda+\nu+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\,\tau(t). \tag{7}$$

При этом матрицы, задаваемые парой $P(\lambda)\equiv E_n$, $Q(\lambda)\equiv E_n$, будем обозначать через φ_0, τ_0, μ_0, ν_0 соответственно. Как показал Л. де Бранж, $\tau_0(t)$ псевдоспектральна, т.е. $(F,G)_B=$ $=\langle F_2,G_2\rangle_{\tau_0}$ при $F=Vf$, $G=Vg$; $f,g\in L_1$.

Теорема 2.I. Если $\varphi(\lambda)\in\mathcal{N}(\alpha)$, то для функции обложения $\tau(t)$ при всех $F\in B$ справедливо неравенство

$$\langle F_2,F_2\rangle_{\tau}\le\langle F_2,F_2\rangle_{\tau_0}. \tag{8}$$

Теорема 2.2. а) Пусть $\varphi(\lambda)\in\mathcal{N}(\alpha)$ и

$$\lim_{\eta\to\infty}\eta^{-1}[C^*(-i\eta)-d^*(-i\eta)](\varphi(i\eta)-\varphi_0(i\eta))[C(i\eta)-d(i\eta)]=0. \tag{9}$$

Тогда $\tau(t)$, соответствующая $\varphi(\lambda)$ в представлении (7), псевдоспектральна.

б) Пусть $\tau(t)$ псевдоспектральна, $\mu_0=0$ и из $C(\lambda)h\equiv 0$ вытекает, что $h=0$. Тогда существует $\varphi(\lambda)\in\mathcal{N}(\alpha)$ с функцией обложения $\tau(t)$. Для этой функции $\varphi(\lambda)$ справедливо соотношение (9).

В § 3 главы I требования теоремы 2.2 переформулируются в терминах гамильтонианов.

2. В § 4 (глава 2) рассматриваются матрицы-функции

$$\theta(\ell,\lambda,\mu)=C(\ell,\lambda)d^*(\ell,\mu)+d(\ell,\lambda)C^*(\ell,\mu),$$

являющиеся аналогами полиномиальных ядер. Предполагается, что гамильтониан $H(x) \geq 0$ задан на полуоси $x \geq 0$, $\varphi(\lambda) = \bigcap\limits_{l<\infty} \mathcal{N}[\mathfrak{A}(l,\lambda)]$ и выполнено условие Сегё

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} \tau'(t)\, dt < \infty.$$

По теореме Крейна-Засухина имеет место факторизация $\tau'(t) = \alpha^*(t)\alpha(t)$. С помощью теоремы 2.I выводится (при дополнительном условии) соотношение

$$\lim_{l\to\infty} \theta(l,\lambda,\mu) = (2\pi)^{-1} \alpha^{-1}(\lambda)[\alpha^*(\mu)]^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda>0, \operatorname{Im}\mu>0).$$

(Случай $\lambda=\mu$ рассматривается в работах Д.З.Арова, М.Г.Крейна[I]; [9])

В §§ 5-I6 активно применяется понятие S-узла[2]). Пусть заданы гильбертовы пространства $G = G_1 \oplus G_1$ $(\dim G_1 = n < \infty)$ и $\mathcal{H}$. Через $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ обозначается класс ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Симметричным S-узлом называется набор операторов $A \in \{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$, $S = S^* \in \{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$, $\Pi = [\Phi_1, \Phi_2] \in \{G, \mathcal{H}\}$, удовлетворяющих операторному тождеству

$$AS - SA^* = i\Pi J \Pi^*. \tag{I0}$$

(Здесь $\Phi_1, \Phi_2 \in \{G_1, \mathcal{H}\}$.) Если $S^{-1} \in \{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$, то S-узлу соответствует передаточная матрица-функция

I) Аров Д.З., Крейн М.Г. Задача об отыскании минимума энтропии в неопределенных проблемах продолжения // Функцион.анализ и его прил. I98I. Т.I5, № 2. С.73-75.

2) Сахнович Л.А. Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат.наук. I986. Т.4I. Вып.I. С.3-55.

$$w_A(\lambda) = E_{2n} + i\lambda J \Pi^* S^{-1}(E-\lambda A)^{-1}\Pi. \tag{II}$$

Важными примерами операторов S являются интегральные операторы

$$S = \frac{d}{dx}\int_0^r s(x,u)\cdot du \in \{\mathcal{H},\mathcal{H}\} \qquad (\mathcal{H} = L_n^2(0,r)) \tag{I2}$$

с разностными, суммарно-разностными и $\mathcal{D}$-разностными ядрами. При

$$s(x,u) = s(x-u) = -s^*(u-x),\ A = i\int_0^x \cdot du,\ \Phi_1 g = s(x)g,\ \Phi_2 g \equiv g \tag{I3}$$

и $S \in \{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$ имеет место тождество (I0), а $S = S^*$ [I)].
Матрица-функция $s(x) \in L^2_{n\times n}(-l,l)$ $(s(x) = -s^*(-x))$ задает семейство S-узлов в пространствах $\mathcal{H}_r = L_n^2(0,r)$, $0 < r \le l$. Элементы этих S-узлов мы будем обозначать через S_r, Π_r, $w_A(r,\lambda)$ и т.д. Когда $S_l \in \{\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_l\}$, $\|S_r^{-1}\| \le M$ $(r \le l)$ то имеет место представление[I)]

$$w_A(r,\lambda) = \int_0^{\overset{r}{\curvearrowleft}} \exp(i\lambda J\, d\sigma_1(u)),\quad \sigma_1(r) = \Pi_r^* S_r^{-1} \Pi_r. \tag{I4}$$

Таким образом, в случае дифференцируемости $\sigma_1(x)$ семейству S-узлов соответствует каноническая система (I), где $H(x) = \sigma_1'(x)$. Причем, $w_A(x,\lambda)$ удовлетворяет (I). Из общей теоремы о континуальном разложении[I)] справедливость (I4) следует и для многих других семейств операторов. Для решения спектральных задач важно выяснить, при каких $H(x)$ канонической системе соответствуют S-узлы.

Теорема 5.I. Пусть $H(x) = \beta^*(x)\beta(x)$, где $n\times 2n$ матрица-функция $\beta(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет соот-

---

[I)] Сахнович Л.А. Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат.наук. 1986. Т.41. Вып.I. С.3-55.

ношениям $\beta(x) J \beta^*(x) \equiv E_n$, $\sup\limits_{0<x<l} \|\beta'(x)\| < \infty$.

Тогда существует такое семейство S-узлов вида (I2), (I3), что

$$S_l > 0, \quad S_l^{-1} \in \{\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_l\}, \quad \sigma_1'(x) = H(x).$$

Семейство S-узлов задается также равенствами

$$s(x,u) = \frac{d}{dx}[s(x-u)+s(x+u)]; \quad s(x) = s(-x) = s^*(x) \text{ при } 0<x<l,$$

$$Af = \int_0^x (u-x) f(u)\,du, \quad \Phi_1 g = 2i\,s(x) g, \quad \Phi_2 g = g. \qquad \text{(I5)}$$

Теорема 5.2. Пусть $H(x) = \beta^*(x)\beta(x)$, где $n \times 2n$ матрица-функция $\beta(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет соотношениям $\beta(x) J \beta^*(x) \equiv 0$, $\beta'(x) J \beta^*(x) \equiv iE_n$, $\sup \|\beta''(x)\| < \infty$, а $n \times n$ блок $\beta_2(x)$ матрицы $\beta(x) = [\beta_1(x), \beta_2(x)]$ невырожден в нуле. Тогда существует такое семейство S-узлов вида (I2), (I5), что выполнено $S_l > 0, \sigma_1'(x) = H(x)$.

(Заметим, что каноническая система, рассматриваемая в теореме 5.I, сводится к системе типа Дирака, а в теореме 5.2 - к матричному уравнению струны.)

Чтобы пояснить постановку задачи о максимальном скачке (§ 6), приведем некоторые факты по теории интерполяции (Т.С.Иванченко, Л.А.Сахнович, I987). Пусть задан S-узел и оператор A удовлетворяет одной из двух групп условий: I. A обратим;
П. $A\mathcal{H} \cap \Phi_2 G_1 = 0$ и нуль не является собственным числом A .
Положим

$$\tilde{S} = \begin{cases} S_\tau + A^{-1}\Phi_2 \mu \Phi_2^* (A^*)^{-1} & \text{сл.I} \\ S_\tau & \text{сл.П} \end{cases}, \quad S_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (E-At)^{-1} \Phi_2\, d\tau(t)\, \Phi_2^* (E-A^*t)^{-1}. \quad \text{(I6)}$$

Через $\mathcal{E}$ обозначается класс неубывающих матриц-функций $\tau(t)$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-1}d\tau(t)<\infty$ и интеграл в (I6) слабо сходится. Множество наборов μ, $\tau\in\mathcal{E}$, дающих представление $S=\tilde{S}$, обозначим через $\mathcal{N}(S)$.

Интерполяционная теорема (Т.С.Иванченко, Л.А.Сахнович). Пусть $S>0$ обратим, выполнено операторное тождество (I0), $Ker\,\Phi_2=0$, $A\in N_0$ и удовлетворяются условия I или П. Тогда для того, чтобы μ, τ принадлежали $\mathcal{N}(S)$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой матрице $V=V^*$ матрица-функция $\varphi(\lambda)$ вида (7) принадлежала $\mathcal{N}(w_A^*(\bar{\lambda}))$.

(Класс N_0 включает как операторы $A=iD\int\limits_0^x\cdot\,du$, $A=\int\limits_0^x(u-x)\cdot\,du$, так и операторы $A\in\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$, у которых спектр (обозначаемый SpA) недействителен, а $dim\,\mathcal{H}<\infty$. Подробнее см. определение 6.2.) Разбивая в соответствии с (6) матрицу $\mathfrak{A}(\lambda)=w_A^*(\bar{\lambda})$ на блоки, введем

$$\rho(\lambda_1,\lambda_2)=i(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}[d(\lambda_1)c^*(\bar{\lambda}_2)+c(\lambda_1)d^*(\bar{\lambda}_2)].$$

Как показал Л.А.Сахнович (I986), верно

$$\rho(\lambda_1,\lambda_2)=\Phi_2^*(E-\lambda_1A^*)^{-1}S^{-1}(E-\lambda_2A)^{-1}\Phi_2. \tag{I7}$$

С помощью (I7) доказывается теорема о максимальном скачке.

Теорема 6.I. Пусть выполнены требования интерполяционной теоремы, $z=\bar{z}$ и $z^{-1}\bar{\in}SpA$. Тогда для $\tau(t)\in\mathcal{N}(S)$ имеет место неравенство

$$\rho^{-1}(z,z)\geqslant\tau(z+0)-\tau(z-0),$$

причем существует такая $\tau_z(t)\in\mathcal{N}(S)$, что

$$\tau_z(z+0)-\tau_z(z-0)=\rho^{-1}(z,z).$$

В случае выполнения условий I справедливо неравенство

$$[\Phi_2^*(A^*)^{-1}S^{-1}A^{-1}\Phi_2]^{-1}\geqslant\mu$$

и существует такая матрица $\mu_{\infty} \in \mathcal{N}(S)$, что

$$\mu_{\infty} = [\Phi_2^*(A^*)^{-1}S^{-1}(A)^{-1}\Phi_2]^{-1}.$$

П.Л.Чебышев и А.А.Марков исследовали задачу о нахождении экстремальных значений $\int_a^{\ell} Q(t)\,d\tau(t)$ на множестве $\tau(t)$, дающих решение усеченной степенной проблемы моментов. Частным случаем этой задачи является вопрос о наибольшем значении $\tau(z+0)-\tau(z-0)$. Задачу о максимальном скачке спектральных функций струны решил М.Г.Крейн (1970). Теорема 6.I устанавливает неравенства типа Чебышева-Маркова, Крейна для $\tau(t) \in \mathcal{E}$.

Обобщением S-узла (I2), (I3) является S-узел, где S-оператор с $\mathcal{D}$-разностным ядром ($\mathcal{D} = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}, d_k > 0$):

$$s(x,u) = \{s_{kj}(d_k x - d_j u)\}_{k,j=1}^{n}, \quad s_{kj}(x) \in L^2(-d_j \tau, d_k \tau),$$

$$A = i\mathcal{D}\int_0^x \cdot\, du, \quad \Phi_1 g = \mathcal{D}s(x,0)g, \quad \Phi_2 g \equiv g. \tag{I8}$$

Теорема 7.I. Пусть задан S-узел (I2), (I8), $S \geq 0$ и матрица-функция $\tau(t)$ удовлетворяет соотношению $S = S_\tau$. Асимптотика функции $\varphi(\lambda)$, определяемой формулой (7) при $\mu = 0$ и некотором $\nu = \nu^*$, задается соотношением

$$\varphi(\lambda) = \lambda \mathcal{D}^2 \int_0^{\tau} e^{-i\lambda\mathcal{D}x} s(x,0)dx + o(1)e^{-i\lambda(\tau-\varepsilon)d}, \tag{I9}$$

где $d = \min d_k$, ε - любое положительное число, $|\lambda| \to \infty$,

$$\operatorname{Im}\lambda / |\operatorname{Re}\lambda| \leq -\delta < 0. \tag{20}$$

Теорема 7.5. Пусть задан S-узел (I2), (I5), $S > 0$ и $S = S_\tau$. Асимптотика $\varphi(\lambda)$, определяемой (7), задается тогда в области (20) формулой

$$\varphi(\lambda)=2i\sqrt{\lambda}\int_0^{\tau}e^{-i\sqrt{\lambda}x}s(x)dx+o(1)e^{-i\sqrt{\lambda}(\tau-\varepsilon)}, \tag{2I}$$

$$\varepsilon>0\ ,\ |\lambda|\to\infty .$$

С помощью тауберовых теорем из соотношений (I9), (2I) и аналогичных им выводится в § 7 асимптотика спектральных функций S - узла, как, например,

Теорема 7.4. Пусть выполнены условия теоремы 7.I. Если матрица-функция $q(x)=(1/2)\{d_K s_{Kj}(x)+d_j\overline{s_{jK}(x)}\}_{K,j=1}^{n}$ абсолютно непрерывна на $[0,\tau]$, а $q'(x)$ непрерывна в нуле и имеет ограниченную вариацию в окрестности нуля, то для любого вектора $g\in G_1$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |g^*[\tau(t)-\tau(-t)-(2/\pi)t\,q(0)-q'(0)]g|\leq$$

$$\leq(24/\tau)g^*q(0)g .$$

Отсюда получается асимптотика спектральных функций системы (I) с гамильтонианом, удовлетворяющим условиям теоремы 5.I.

Асимптотические формулы (I9), (2I) могут переходить в точные равенства.

Теорема 7.3. Пусть функции $s_{Kj}(x)$ заданы на всей оси и соотношения (I2), (I8) при всех $\tau\in(0,\infty)$ определяют ограниченные операторы $S_\tau\geqslant 0$. Тогда существует $\tau(t)$, дающая при всех τ представления $S_\tau=S_{\tau}$, а соответствующая ей по формуле (7) матрица-функция $\varphi(\lambda)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda)=\lambda D^2\int_0^{\infty}e^{-i\lambda Dx}s(x,0)dx .$$

3. Глава 3 посвящена обратным задачам для несамосопряженных систем на полуоси. В § 8 рассматривается эквивалентная (2), (3) система

$$\frac{d\,w(x,\lambda)}{d\,x}=[i\lambda j-j\,\xi(x)]\,w(x,\lambda), \tag{22}$$

где $j=\begin{bmatrix}E_n & 0\\ 0 & -E_n\end{bmatrix}$, $\quad \xi(x)=\begin{bmatrix}0 & \psi(x)\\ \psi^*(x) & 0\end{bmatrix}.$

Система (22) является вспомогательной линейной системой для нелинейного уравнения Шредингера с "притяжением" и уравнения синус-Гордон. Зададим $w(x,\lambda)$ формулой (22) и равенством

$$w(0,\lambda)=E_{2n}.$$

Лемма 8.I. Если

$$\sup\|\psi(x)\|\leq M \qquad (0<x<\infty),$$

то при $\operatorname{Im}\lambda<-M$ существует единственная функция $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty [\varphi^*(\lambda),E_n]\,w^*(x,\lambda)\,w(x,\lambda)\begin{bmatrix}\varphi(\lambda)\\ E_n\end{bmatrix}dx<\infty.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ называется функцией Вейля-Титчмарша системы (22) и удовлетворяет соотношению

$$\sup\left\|w(x,\lambda)\begin{bmatrix}\varphi(\lambda)\\ E_n\end{bmatrix}e^{ix\lambda}\right\|<\infty\ (x\leq l<\infty,\ \operatorname{Im}\lambda<-M). \tag{23}$$

Матрице-функции $\varphi(\lambda)$ удается поставить в соответствие семейство S-узлов, где $G=G_1\oplus G_1$ $(\dim G_1=n)$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_r=L_n^2(0,r)$,

$$A=i\int_0^x\cdot\,du,\quad \Pi=[\Phi_1,\Phi_2],\quad \Phi_1 g\equiv g,\quad \Phi_2 g\equiv\Phi_2(x)g,$$

$$\Phi_2(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-1}\exp(ix\lambda)\,\varphi(\lambda/2)\,dz \tag{24}$$

$$(\lambda=z-2i\eta,\quad \eta>M).$$

Аналогом оператора из уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко является оператор

$$S = E + \frac{1}{2}\int\limits_0^{r}\int\limits_{|x-u|}^{x+u} \varphi_2'\left(\frac{v+x-u}{2}\right)\left[\varphi_2'\left(\frac{v+u-x}{2}\right)\right]^* dv\cdot du, \quad (25)$$

который удовлетворяет операторному тождеству

$$AS - SA^* = i\Pi\Pi^*. \quad (26)$$

В силу (26) $S \geq E$. Через элементы S-узла выражается $n\times 2n$ матрица-функция

$$\tilde{\beta}(r) = [0, E_n] - \int\limits_0^{r} [S_r^{-1}\varphi_2'(x)]^*[E_n, \varphi_2(x)]\,dx. \quad (27)$$

Определение 8.2. Обратной спектральной задачей (ОСЗ) для системы (22) называется задача восстановления по аналитической матрице-функции $\varphi(\lambda)$ такой матрицы-функции $\Psi(x)$, что при всех $l<\infty$ выполнено (23) и $\sup\limits_{0<x<l}\|\Psi(x)\|<\infty$.

Теорема 8.2. Пусть аналитическая матрица-функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет соотношению $\sup\limits_{\operatorname{Im}\lambda<-M}\|[\varphi(\lambda)-\alpha/\lambda]\lambda^2\|<\infty$.

Тогда решение ОСЗ существует и единственно. Оно выражается по формуле

$$\Psi(x) = \beta(x)[\tilde{\beta}'(x)]^* \qquad (\Psi(0) = [\tilde{\beta}_1'(0)]^*),$$

где $\tilde{\beta}$ задается равенствами (24), (25), (27), а $\beta(x)$ задается равенствами $\beta(x)\tilde{\beta}^*(x) = \beta'(x)\beta^*(x) = 0$, $\beta(x)\beta^*(x) \equiv E_n$, $\beta(0) = [E_n, 0]$.

В § 9 рассматривается система, эквивалентная (2), (4)

$$\frac{dw}{dx} = (i\lambda D - \xi(x))\, w(x,\lambda), \quad (28)$$

где $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$, $d_1 > d_2 > \ldots > d_m > 0$, $\xi = -\xi^* = \{\xi_{kj}\}_{k,j=1}^m$, $\xi_{kk} \equiv 0$. Пусть $w(0,\lambda) \equiv E_m$.

Определение 9.1. Обобщенной функцией Вейля-Титчмарша (ОВТ-функцией) системы (28) называется аналитическая матрица-функция $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющая при некоторых $M>0$, $C>0$ и всех λ из области $\operatorname{Im}\lambda<-M$ соотношениям

$$\int_0^\infty \exp(i\bar{\lambda}Dx)\varphi^*(\lambda)w^*(x,\lambda)w(x,\lambda)\varphi(\lambda)\exp[-ix\lambda D - cxE_m]\,dx<\infty$$

. Причем должны выполняться условия нормировки $\varphi_{kk}(\lambda)\equiv 1$, $\varphi_{kj}(\lambda)\equiv 0$ при $k>j$.

Теорема 9.1. Пусть $\sup\limits_{0<x<\infty}\|f(x)\|\le M_0$. Тогда ОВТ-функция системы (28) существует и единственна.

ОВТ-функция $\varphi(\lambda)$ при всех $l<\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{x\le l,\ \operatorname{Im}\lambda<-M}\|w(x,\lambda)\varphi(\lambda)\exp(-i\lambda Dx)\|<\infty. \tag{29}$$

Определение 9.2. ОСЗ для системы (28) называется задача восстановления по аналитической матрице-функции $\varphi(\lambda)$ такой матрицы-функции $f(x)=-f^*(x)$ $(f_{kk}\equiv 0)$, что при всех $l<\infty$ выполнено (29) и $\sup\limits_{0<x<l}\|f(x)\|<\infty$.

Пусть задана такая аналитическая $\varphi(\lambda)$, что

$$\sup\|\lambda(\varphi(\lambda)-E_m)\|<\infty \quad (\operatorname{Im}\lambda<-M),$$

$$[\varphi(\lambda)-E_m-\alpha/\lambda]\lambda\in L^2_{m\times m}(-\infty,\infty) \tag{30}$$

$$(\lambda=z-i\eta,\ \eta>M,\ -\infty<z<\infty).$$

Тогда определена матрица-функция

$$\Pi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(i\lambda Dx)][\lambda\varphi(\lambda)]^{-1}dz$$

$$(\lambda=z-i\eta,\ \eta>M,\ x\ge 0). \tag{31}$$

Оператор $S = D^{-1} + \int_0^r s(x,u)\cdot du$ (и соответствующий S-узел) определяется формулами (26), (3I) и

$$A = iD\int_0^x \cdot du, \quad \Pi g = \Pi(x) g, \quad \mathcal{H}_r = L_m^2(0,r). \tag{32}$$

В силу (26) получаем, что $S > 0$ и определена функция

$$\Gamma(r,r) = D^{-1}[S_r^{-1} s(x,r)](r) D^{1/2} .$$

Теорема 9.3. Пусть аналитическая функция $\varphi(\Lambda)$ удовлетворяет (30). Тогда решение ОСЗ существует и единственно. Оно выражается по формуле

$$\xi(r) = \Gamma(r,r) D^{1/2} - D\Gamma(r,r) D^{-1/2}.$$

Заметим, что много интересных работ посвящено задаче рассеяния для систем (22) и (28) на всей оси. Тем не менее, даже в случае всей оси остается много важных открытых вопросов и, в частности, вопрос о том, при каких данных рассеяния процедура решения ОЗР идет до конца.

4. Глава 4 посвящена приложению результатов главы 3 к теории нелинейных интегрируемых уравнений на полуоси. В § I0 формулируется общая схема и описывается эволюция спектральных данных. Приведем случай уравнения синус-Гордон $\omega_{xt}(x,t) = 2\sin\omega(x,t)$, где $\omega = \overline{\omega}$. Ему эквивалентна система

$$\Psi_t = \sin\omega, \qquad \omega_x = 2\Psi. \tag{33}$$

Теорема I0.2. Пусть в области $0 \le x < \infty$, $0 \le t < t_0$ существует решение ω, Ψ системы (33) с начально-краевым условием

$$\omega(x,0) = \omega_1(x), \quad \omega(0,t) = \omega_2(t), \quad \omega_1(0) = \omega_2(0). \tag{34}$$

Пусть при этом функции $\psi(x,t)$ и $\omega_2(t)$ непрерывны и $\sup|\psi(x,t)|\le M$. Тогда эволюция функции Вейля-Титчмарша вспомогательной системы (22) ($n=1$) выражается по формуле

$$\varphi(t,\lambda)=[R_{11}(t,\lambda)\varphi_0(\lambda)+R_{12}(t,\lambda)][R_{21}(t,\lambda)\varphi_0(\lambda)+R_{22}(t,\lambda)]^{-1}, \quad (35)$$

где $\varphi_0(\lambda)=\varphi(0,\lambda)$ - функция Вейля-Титчмарша системы (22), когда $\psi(x)=\psi(x,0)=\omega_1'(x)/2$, а $R(t,\lambda)=\{R_{kj}(t,\lambda)\}_{k,j=1}^{2}$ определяется уравнением

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2i\lambda}\begin{bmatrix}\cos\omega_2(t) & \sin\omega_2(t)\\ \sin\omega_2(t) & -\cos\omega_2(t)\end{bmatrix}R, \quad R(0,\lambda)=E_2. \quad (36)$$

Оператор, ставящий в соответствие функции $\varphi(\lambda)$ решение ОЗР, обозначим через $\Omega(\varphi)$. (Этот оператор построен в теоремах 8.2 и 9.3 для систем (22) и (28) соответственно.) Основной в § II является

Теорема II.I. Пусть заданы непрерывная функция $\omega_2(t)$ и аналитическая при $\operatorname{Im}\lambda<-M$ функция $\varphi_0(\lambda)=\overline{\varphi_0(-\bar\lambda)}$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{\operatorname{Im}\lambda<-M}\|\lambda^2[\varphi_0(\lambda)-\alpha_0/\lambda]\|<\infty.$$

Зададим $\omega_1(x)$ равенствами $\omega_1(0)=\omega_2(0)$ и $\omega_1'(x)=2\Omega(\varphi_0)$. Тогда решение ω , ψ системы (33), (34) существует и выражается по формуле $\psi(x,t)=\Omega(\varphi(t,\lambda))$, где $\varphi(t,\lambda)$ определяется равенствами (35), (36).

В § I2 рассматривается задача N-волн

$$\xi_t(x,t)-\tilde\xi_x(x,t)=\xi(x,t)\tilde\xi(x,t)-\tilde\xi(x,t)\xi(x,t), \quad (37)$$

где $\xi=-\xi^*$, $\xi_{kk}=\tilde\xi_{kk}=0$, $\tilde\xi_{kj}=(\hat d_k-\hat d_j)\xi_{kj}/(d_k-d_j)$.

Здесь $d_k \neq d_j$, $D = D^* > 0$, $\tilde{d}_k \neq \tilde{d}_j$, $\tilde{D} = \mathrm{diag}\{\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_m\} = \tilde{D}^* > 0$.

Теорема I2.I. Пусть $f_0(x) = \Omega(D, \varphi_0)$, где φ_0 удовлетворяет (30) и $\alpha = -\alpha^*$. Тогда определена и удовлетворяет (37) матрица-функция $f(x,t) = \Omega(D, \varphi(t,\lambda))$, где

$$\varphi(t,\lambda) = R(t,\lambda)\,\varphi_0(\lambda)\exp(-i\lambda\tilde{D}t),$$

$$\frac{dR(t,\lambda)}{dt} = (i\lambda\tilde{D} - \tilde{f}_1(t))R, \quad R(0,\lambda) = E_m, \quad \tilde{f}_1(t) = \Omega(\tilde{D}, \varphi_0).$$

5. Различные приложения рассматриваются в главе 5. В § I3 содержится ответ на вопрос В.С.Владимирова и И.В.Воловича (I984). Последовательность матриц s_p $(-\infty < p < \infty,\ s_p = s_{-p}^*)$ порядка n задает семейство блочных матриц Теплица $S_k = \{s_{j-p}\}_{p,j=1}^{k}$. Соотношениями $A_k = \{a_{pj}\}_{p,j=1}^{k}$; $a_{pj} = \{0$ при $p < j$, $(i/2)E_n$ при $p = j$, iE_n при $p > j\}$; $\Phi_{2,k} = \mathrm{col}[E_n, E_n, \dots, E_n]$ задаются S-узлы, удовлетворяющие (I0). В.С.Владимировым и И.В. Воловичем изучался случай наличия внешнего поля в гауссовой модели на отрезке с взаимодействием $S_k > 0$. В связи с этой моделью взаимодействия они поставили задачу описания асимптотики $\rho_k(0,0) = \Phi_{2,k}^* S_k^{-1} \Phi_{2,k}$ при $k \to \infty$ в терминах $\tau(t)$. Из теоремы 6.I следует для $T_k = S_k^{-1} = \{t_{pj}(k)\}_{p,j=1}^{k}$ формула

$$s_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt}\,d\tau(t), \quad \lim_{k\to\infty}\Big[\sum_{p,j=1}^{k} t_{pj}\, e^{i(p-j)z}\Big]^{-1} = \qquad (38)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\tau(z+0) - \tau(z-0)].$$

Равенство (38) дает ответ на поставленный В.С.Владимировым и И.В.Воловичем вопрос.

§ I4 содержит процедуру построения явных решений нелинейных уравнений методом операторных тождеств. Пусть теперь A - $n\times n$-матрица и $S_pA \cap S_pA^* = \emptyset$. Тогда однозначно разрешимо операторное тождество

$$AS - SA^* = i\Pi B \Pi^*. \tag{39}$$

Матрицу-функцию $\Pi(x,t)$ введем с помощью соотношений, близких к соотношениям В.А.Марченко (1986)

$$\Pi_x = iA\Pi \mathcal{D}, \quad \Pi_t = iA^k \Pi \tilde{\mathcal{D}}. \tag{40}$$

(Здесь $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$, $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}^*$ и $B = B^*$ $(B^2 = E_m)$ - диагональные матрицы.) Таким образом, $S(x,t)$ и $\Pi(x,t)$ при фиксированных $\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}, B$ и k однозначно определяются матрицами A и $\Pi(0,0)$. Разобьем Π на блоки из m_1 и m_2 столбцов: $\Pi = [\varphi_1, \varphi_2]$ и положим

$$u = 2\varphi_2^* S^{-1} \varphi_1, \quad j_0 = \begin{bmatrix} E_{m_1} & 0 \\ 0 & -E_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Теорема I4.I. Пусть $\mathcal{D} = -\tilde{\mathcal{D}} = j_0$. Тогда
а) при $m_1 = m_2 = 1$, $k = -1$, $B = E_m$, $u = \bar{u}$ функция u удовлетворяет системе $u_t = 2\sin \omega$, $\omega_x = 2u$, эквивалентной уравнению синус-Гордон; б) при $m_1 = m_2 = 1$, $k = -1$, $B = j_0$, $u = \bar{u}$ функция u удовлетворяет системе $u_t = 2\,\mathrm{sh}\,\omega$, $\omega_x = 2u$; в) при $k = 2$, $B = j_0^p$ удовлетворяется нелинейное уравнение Шредингера $2u_t = i(u_{xx} + 2(-1)^p u u^* u)$; г) при $k = 3$, $B = j_0^p$ матрица-функция u удовлетворяет МКдФ

$$4u_t = u_{xxx} + 3(-1)^p (u_x u^* u + u u^* u_x).$$

Матрица-функция w_A вводится здесь равенством

$$w_A(x,t,\lambda) = E_m - iB\Pi^* S^{-1}(A + \lambda E_n)^{-1}\Pi.$$

Из результатов § II следует, что в случае а) функция $\varphi(t,\lambda) = (w_A(0,t/2,\lambda))_{12} / (w_A(0,t/2,\lambda))_{22}$ описывает эволюцию спектральных данных, соответствующих решению (33):

$$\psi(x,t) = u(x,t/2) = \Omega(\varphi(t,\lambda)). \tag{41}$$

Одновременно формула (4I) определяет набор явных решений ОСЗ для системы (22).

Аналогичный факт имеет место для задачи N -волн и системы (28). При $k=1$, $h=\Pi^* S^{-1}\Pi$, функция $\xi(x,t)=B(\mathcal{D}h-h\mathcal{D})$ удовлетворяет уравнению (37) и условию редукции $\xi^*=-B\xi B$. Если $B=E_m$, то имеем $\xi(x,t)=\Omega(\mathcal{D},\varphi(t,\lambda))$, где $\varphi(t,\lambda)=w_A(0,t,\lambda)$. Через $w_A(x,t,\lambda)$ выражаются решения вспомогательных систем (22), (28). С помощью (39), (40) строятся также решения КдФ и других уравнений.

В § I5 доказывается теорема, вытекающая из теоремы 9.3. Как и в § 9, $\mathcal{D}=\mathcal{D}^*=\mathrm{diag}\{d_1,\dots,d_m\}$, $d_1>d_2>\dots>d_m>0$.

Теорема I5.I. Пусть матрица-функция $\beta(x)$ порядка m имеет на $[0,l]$ ограниченную производную, $\beta(x)\beta^*(x)\equiv E_m$ и $(\beta'(x)\beta^*(x))_{kk}\equiv 0$. Тогда оператор $K=i\beta(x)\int_0^x\beta^*(u)\mathcal{D}\cdot du$, действующий в $L^2_m(0,l)$, подобен оператору $A=i\mathcal{D}\int_0^x\cdot\,du$ из того же пространства.

Учет специальной структуры оператора при его обращении проводится во многих важных работах. Назовем, в частности, работы Н.Винера, Е.Хопфа, Н.Левинсона, М.Г.Крейна, И.Ц.Гохберга, Л.А.Сахновича, З.С.Аграновича, В.А.Марченко, В.П.Шестопалова, А.Б.Нерсесяна. В § I6 обращение оператора S методом операторных тождеств применяется для решения задачи дифракции. В этом параграфе оператор S неограничен, что требует дополнительных рассмотрений. Для получения соотношений, родственных известным формулам В.А.Амбарцумяна, используется равенство (I7).

ИТОГИ И ВЫВОДЫ

В диссертации разработан ряд взаимосвязанных вопросов спектральной теории систем дифференциальных операторов и ее приложений.

I. Получено описание спектральных и псевдоспектральных функций канонических систем на отрезке.

2. Исследовано поведение спектральных функций канонических систем, порождаемых S-узлами, - асимптотика и величина максимального скачка.

3. Развита спектральная теория важных несамосопряженных систем, близких к каноническим. Сформулирована и решена для них обратная задача.

4. Разработанными в диссертации методами обратной спектральной задачи исследованы уравнение синус-Гордон (задача Гурса), нелинейное уравнение Шредингера "с притяжением" на полуоси, задача N-волн на полуоси.

5. Получены приложения результатов к построению явных решений нелинейных уравнений, к некоторым задачам математической физики. Предложенная процедура построения явных решений допускает обобщения, относящиеся к задаче "одевания" решений.

В диссертации решен ряд актуальных и важных вопросов анализа. Значительная часть результатов нашла применение и развитие в работах других математиков.

<u>На защиту выносятся теоремы</u> 2.I, 2.2, 5.I, 5.2, 6.I, 7.I, 7.4, 7.5, 8.2, 9.I, 9.3, I0.2, II,I, I2.I, I4.I, лемма 8.2.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Сахнович А.Л. Об одном методе обращения теплицевых матриц //Мат.исслед. - 1973. - <u>8</u>, № 4. - С.180-186.

2. Сахнович А.Л. Об одном методе прогнозирования дискретных

стационарных процессов //Методы научно-технического прогнозирования средств связи. - М.: ЦООНТИ "Экос", 1979. - С.59-62.

3. Сахнович А.Л. О продолжении блочных теплицевых матриц // Функцион.анализ. - Ульяновск, 1980. - Вып.14. - С.116-127.

4. Сахнович А.Л. О продолжении теплицевых матриц //Докл. АН УССР. Сер.А. - 1981. - № 7. - С.19-24.

5. Сахнович А.Л. Об обращении операторов, удовлетворяющих двум операторным тождествам.-Одесса. 1986. - 12 с.- Деп. в ВИНИТИ. 8.07.86, № 4954.

6. Сахнович А.Л. Спектральные функции канонических систем // XII школа по теории операторов в функциональных пространствах (Тамбов, 14-20 сентября 1987 г.): Тез.докл. - Тамбов, 1987.- С.69.

7. Сахнович А.Л. К спектральной теории канонических систем.- Одесса. 1987. - 37 с. - Деп. в ВИНИТИ. 25.06.87, № 4657.

8. Сахнович А.Л., Спитковский И.М. О блочно-теплицевых матрицах и связанных с ними свойствах гауссовой модели на полуоси //Теорет. и мат.физика. - 1985. - 63, № 1. - С.154-160.

9. Сахнович А.Л. Об одном классе экстремальных задач //Изв. АН СССР. Сер.мат. - 1987. - 51, № 2. - С.436-443.

10. Сахнович А.Л. Асимптотика спектральных функций S-узла //Изв.вузов. Математика. - 1988. - № 9. - С.62-72.

11. Сахнович А.Л. Смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера и спектральная обратная задача. - Одесса. 1989. - 75 с. - Деп. в ВИНИТИ. 16.05.89, № 3255.

12. Сахнович А.Л. Задача Гурса для уравнения синус-Гордон // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1989. - № 12. - С.14-17.

13. Сахнович А.Л. Учет начально-краевых условий в линейном уравнении Шредингера //Судостроительная промышленность. Сер. Акустика. - 1990. - Вып.6. - С.85-87.

I4. Сахнович А.Л. Нелинейное уравнение Шредингера на полуоси и связанная с ним обратная задача //Укр.мат.журн. - 1990. - 42, № 3. - С.356-363.

I5. Сахнович А.Л. Об одном методе решения задач дифракции // Журн.вычислит.математики и мат.физики. - 1990. - 30, № I. - С.I69-I7I.

I6. Сахнович А.Л. Спектральные функции канонической системы 2n-го порядка //Мат.сб. - 1990. - I8I, № II. - С.I5I0-I524.

I7. Сахнович А.Л. Задача N-волн на полуоси //Успехи мат. наук. - I99I. - 46, № 4. - С.I7I-I72.

I8. Сахнович А.Л. Про побудову явних розв'язкIв нелIнIйних рIвнянь методом операторних тотожностей //СпектральнI I еволюцIйнI задачI: Тез.допов. - КиIв: НМК ВО, I99I. - С.68-69.

I9. Сахнович А.Л. Задача N-волн на полуоси // I6-я Всесоюз. шк. по теории линейных операторов в функцион.пространствах: Материалы к лекциям. - Н.Новгород, 1992. - С.95-II4.

Подп. в печ. 27.08.92. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс.печать.
Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 1,86. Уч.-изд. л. 1,4.
Тираж 120 экз. Зак. 312 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3