Академія наук України

Ордена Трудового Червоного Прапора Інститут математики

На правах рукопису

БАРБУЛЯК Володимир Степанович

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ІНТЕГРАЛИ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ КВАНТОВИМ ГРАТКОВИМ СИСТЕМАМ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Роботу виконано на кафедрі математичного і функціонального аналізу Львівського університету імені І.Франка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор КОНДРАТЬЄВ Ю.Г.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор ДАЛЕЦЬКИЙ Ю.Л.

кандидат фізико-математичних наук,
доцент УС Г.Ф.

Провідна установа: Фізико-технічний інститут низьких температур АН України, м. Харків

Захист дисертації відбудеться "9" лютого 1993 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "24" грудня 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Функціональні інтеграли, що відповідають мірам на просторах траєкторій, є важливим класом в загальній теорії інтегрування на нескінченновимірних просторах. Такі інтеграли виникають в різних розділах математики і її застосувань. Сюди, перш за все, відносяться теорія випадкових процесів і математична фізика.

Зараз кількість робіт, присвячених дослідженню загальних властивостей функціональних інтегралів і їх застосуванням, надзвичайно велика(див., наприклад, відповідні глави в монографіях Ю.М.Березанського, Ю.Г.Кондратьєва "Спектральные методы в бесконечномерном анализе" (Київ, "Наукова думка", 1988), Ю.Л.Далецького, С.В.Фоміна "Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах" (Москва, "Наука", 1983) та літературні коментарі до них). Ми зупинимося більш детально на зв"язку функціональних інтегралів з деякими задачами математичної фізики. Тут їх застосування зв"язане перш за все з іменем Р.Фейнмана, піонерські роботи якого поклали початок інтенсивному використанню функціональних інтегралів в задачах квантової фізики. Строге математичне обгрунтування метод функціонального інтегрування отримав у роботах М.Каца, Р.Камерона, У.Мартіна та ряду інших математиків. Новий імпульс застосуванню функціональних інтегралів дала евклідова теорія поля, яка виникла в 70-х роках і дозволила математично строго переформулювати задачу побудови ряду моделей квантової теорії поля як проблему існування певного класу мір на функціональних просторах.

Аналогічний підхід в моделях квантової статистичної фізики був запропонований в роботах Д.Жінібра, С.Альбеверіо та Р.Хоег-Крона і розвивався потім в статтях А.Клейна, Л.Ландау, Ю.Г.Кондратьєва, С.А.Глоби та інших. При цьому було вияснено, що побудова температурного стану для певного класу квантових граткових систем може бути зведена до конструкції канонічно зв"язаної з розглядуваною системою міри на просторі періодичних траєкторій.

Міри на періодичних траєкторіях, які виникають таким чином, формально близькі до гіббсових мір в класичній статистичній фізиці. Проте добре відомі результати Р.Л.Добрушина, Д.Лебовіца, В.А.Малишева, Р.А.Мінлоса, Е.Презутті, С.Б.Шлосмана та інших, що стосуються проблеми існування і единості такого типу мір, не можуть бути безпосередньо застосовані в даній ситуації. Це пов"язано з тією обставиною, що простір значень індивідуального спіна зараз є нескінченновимірним. Тому методи, які використовуються при доведенні теорем існування та єдиності в класичній статистичній фізиці вимагають суттєвої модифікації при переході до квантового випадку.

Одним з найважливіших завдань статистичної фізики є дослідження критичних явищ. В термінах функціональних інтегралів ця задача може бути переформульована як проблема єдиності відповідних мір на траєкторіях. Відомо, що виникнення фазового переходу може бути досліджене також при допомозі встановлення так званого дальнього порядку в системі. Останнє також допускає інтерпретацію в термінах відповідних функціональних інтегралів. Зокрема, цим шляхом існування фазових переходів в ряді моделей квантової статистичної фізики було доведене в роботах В.Дресслера, Л.Ландау, Ф.Переца, Л.А.Пастура, Б.А.Хоруженка. Проте методи цих робіт накладають досить жорсткі обмеження на вигляд гамільтоніанів досліджуваних моделей, які виключають багато цікавих в застосуваннях випадків. Тому є актуальною задача побудови та дослідження функціональних інтегралів, що відповідають квантовим гратковим системам у випадку досить загальних моделей.

Метою цієї дисертації є побудова і дослідження властивостей функціональних інтегралів на просторах періодичних траєкторій та застосування цих інтегралів до деяких моделей квантової статистичної фізики.

Наукова новизна, теоретична і практична значимість. Всі результати, отримані в дисертації, є новими. Перерахуємо основні з них.

1. Отримано загальний критерій існування функціональних інтегралів, що відповідають широкому класу моделей квантової статистичної фізики.
2. Для інтегралів з додатковою властивістю додатності при відбиттях доведена теорема, яка дає достатні умови їх існування.
3. Для ряду моделей квантових граткових систем отримані достатні умови для наявності критичної температури.

Результати дисертації можуть бути використані в розділах теоретичної та математичної фізики, що використовують техніку функціонального інтегрування.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на I-му Міжнародному радянсько-польському симпозіумі з фізики сегнетоелектриків та споріднених матеріалів (Львів, 1990), Республіканській науково-технічній конференції "Параметрична кристалооптика та її застосування" (Карпати, 1990), Всесоюзній школі-семінарі "Методи функціонального аналізу в задачах математичної фізики" (Виноградів, Закарпаття, 1990), на семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики АН України (науковий керівник академік Ю.М.Березанський, 1991, 1992).

Публікації. Основні результати опубліковані автором в 14 роботах, перелік яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об"єм роботи. Дисертаційна робота викладена на 68 сторінках і складається зі вступу, трьох глав та списку літератури, який нараховує 37 назв.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наведено обгрунтування актуальності досліджень, проведених у дисертаційній роботі, дано короткий огляд змісту її глав.

I. У першій главі розглядається задача побудови гіббсових (температурних) станів квантових граткових систем, яка полягає в побудові відповідного функціоналу на алгебрі локальних спостережуваних, яка може бути зведена до побудови функціонального інтеграла на просторі періодичних траєкторій. Запропоновано підхід до побудови функціональних інтегралів, що відповідають квантовим гратковим системам, який базується на введенні спеціальної топології в функціональному просторі, що перетворює його в σ-компактний лінійний топологічний простір. З використанням останнього факту узагальнено на квантовий випадок відомий у класичному випадку критерій існування Р.Л.Добрушина.

У §1 формулюються основні результати, що стосуються зв"язку між гіббсовим станом квантового ангармонійного осцилятора та функціональним інтегралом на відповідному функціональному просторі.

Для квантового ангармонійного осцилятора з гамільтоніаном

$$H \doteq -\frac{1}{2}\Delta + V \quad ,$$

Δ - оператор Лапласа, V - ангармонійний потенціал, що задовольняє умови

$$V = \overline{V} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^1) \ , \qquad (1)$$

$$V(q) \geq aq^2 + b; \; a, b \in \mathbb{R}, \; a > 0, \tag{2}$$

стан осцилятора при оберненій температурі $\beta > 0$ визначається як функціонал

$$\langle\langle A \rangle\rangle_\beta = \frac{Tr\,(A e^{-\beta H})}{Tr\,(e^{-\beta H})}$$

на алгебрі всіх обмежених операторів $A \in \mathcal{L}(L_2)$.

Якщо розглянути вимірний простір $(S_\beta^{\mathbb{R}}, \mathcal{C}_0)$, де

$$S_\beta^{\mathbb{R}} = \{ \omega : S_\beta \to \mathbb{R} \},$$

S_β - коло довжини β, а $\mathcal{C}_0$ - σ-алгебра на $S_\beta^{\mathbb{R}}$, що породжена циліндричними множинами вигляду

$$C^{t_0,\dots,t_n}_{B_0,\dots,B_n} = \{ \omega \in S_\beta^{\mathbb{R}} \mid \omega(t_j) \in B_j, \; j = 0,1,\dots,n \},$$

$B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ і $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \beta$ (вважаємо S_β відрізком $[0,\beta]$ з ототожненими кінцями), то задача побудови гіббсового стану ангармонійного осцилятора зводиться до побудови міри ν_β^V на множині всіх траєкторій $S_\beta^{\mathbb{R}}$. Це випливає із співвідношень

$$S^\beta_{A_0,\dots,A_n}(t_0,\dots,t_n) = \frac{Tr\,[e^{-(\beta + i(t_n - t_0))H} A_n \cdots e^{i(t_1 - t_0)H} A_0]}{Tr\,(e^{-\beta H})}$$

($\{A_0,\dots,A_n\} \subset \mathcal{A}^c$, де $\mathcal{A}^c$ - комутативна підалгебра алгебри $\mathcal{L}(L_2)$, що складається з операторів множення на обмежені вимірні функції; $\{t_0,\dots,t_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$),

$$\Gamma^\beta_{A_0,\dots,A_n}(t_0,\dots,t_n) = S^\beta_{A_0,\dots,A_n}(it_0,\dots,it_n),$$

якщо $t_j \in S_\beta$, $t_{j+1} - t_j \geq 0$, $t_{n+1} = t_0$, і

$$\Gamma^\beta_{A_0,\dots,A_n}(t_0,\dots,t_n) = \int_{S_\beta^{\mathbb{R}}} \prod_{j=0}^{n} A_j(\omega(t_j))\, d\nu_\beta^V(\omega(\cdot)).$$

Остання рівність можна прийняти як означення міри ν_β^V.

Більше того, якщо розглянути простір гельдерових на S_β функцій з показником гельдеровості σ -

$$H_\sigma(S_\beta)=\{\omega\in C(S_\beta)\,|\,|\omega(s_1)-\omega(s_2)|\le C_\omega|s_1-s_2|^\sigma;\ s_1,s_2\in S_\beta;\sigma>0\},$$

та з нормою

$$\|\omega\|_\sigma=\sup_{s_1,s_2\in S_\beta;\,s_1\ne s_2}\frac{|\omega(s_1)-\omega(s_2)|}{|s_1-s_2|^\sigma}+\sup_{s\in S_\beta}|\omega(s)|,$$

то вірна наступна лема.

Лема 1.1. При виконанні для потенціалу V умов (1),(2) для довільного $\sigma<\frac{1}{2}$

$$\nu_\beta^V(H_\sigma(S_\beta))=1.$$

Тобто, $H_\sigma(S_\beta)\subset C(S_\beta)$ є множиною повної міри для ν_β^V.

У §2 показано як схема §1 реалізується у випадку системи ангармонійних квантових осциляторів, розміщених у вузлах цілочисельної гратки $\mathbb{Z}^d$.

Гіббсів стан системи в області $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ при оберненій температурі $\beta>0$ при певних припущеннях на потенціали взаємодії коректно визначається як функціонал

$$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle_{\beta,\Lambda}=\frac{\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta H_\Lambda})}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_\Lambda})},\qquad(3)$$

де

$$H_\Lambda=\frac{1}{2}\sum_{k\in\Lambda}p_k^2+\sum_{k\in\Lambda}V_k(q_k)+\sum_{k,j\in\Lambda}W_{kj}(q_k,q_j),$$

p_k,q_k - канонічні оператори імпульсу і координати на просторі $L_2(\mathbb{R}^1,dx_k)$; V_k - одночастинкові потенціали, що задовольняють умови (1),(2); W_{kj} - парний (далі розглядатимуться і загальніші) потенціал взаємодії, а A береться з C^*-алгебри $\mathcal{A}_\Lambda$ всіх обмежених операторів в $L_2(\mathbb{R}^\Lambda)$.

Гіббсів стан нескінченної системи частинок, розміщених у вузлах $\mathbb{Z}^d$, означається як функціонал $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_\beta$ на алгебрі

$$\mathcal{A}_{loc}=\bigcup_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d,\,|\Lambda|<\infty}\mathcal{A}_\Lambda,$$

отриманий з (3) в результаті граничного переходу

$$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle_\beta=\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d}\langle\!\langle A\rangle\!\rangle_{\beta,\Lambda},\quad A\in\mathcal{A}_{loc}.$$

Як показано в роботах С.Альбеверіо, Р.Хоєг-Крона, Ю.Г.Кондратьєва, ця задача рівносильна побудові сімейства мір

$$d\nu_{\beta,\Lambda}(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\int_0^\beta \sum_{k,j\in\Lambda} W_{kj}(\omega_k(\tau),\omega_j(\tau))d\tau} \mathop{\times}_{k\in\Lambda} d\nu_\beta^{V_k}(\omega_k(\cdot)),$$

де $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty$, та граничної (в певному розумінні) міри ν_β на

$$C(S_\beta^{\mathbb{Z}^d}) = \{\omega(\cdot) = (\omega_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}^d} \,|\, \omega : S_\beta \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \omega_k \in C(S_\beta)\}.$$

Завдяки лемі 1.1 як простір станів однієї частинки можна вибрати $\mathcal{S} = H_\sigma(S_\beta) \subset C(S_\beta)$ при $\sigma < \frac{1}{2}$ і з топологією, індукованою з $C(S_\beta)$. Тоді $\mathcal{S}$ буде σ-компактним простором і цей факт дає можливість узагальнити відомі в класичному випадку критерії існування гіббсових мір на квантовий випадок.

У §3 будуються потенціали взаємодії між частинками у вузлах гратки $\mathbb{Z}^d$ найзагальнішого вигляду, а також відповідні їм міри. З врахуванням результатів §2 в теоремі 1.2 для гамільтоніана вигляду

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} P_k^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(q_k) + E(q) \tag{4}$$

($E(q) = \sum_{A\subset\mathbb{Z}^d, 1<|A|<\infty} W_A(q)$, W_A - потенціали взаємодії частинок, які розташовані у вузлах, що входять в множину A) отримано узагальнення на квантовий випадок відомого у класичному випадку критерію Р.Л.Добрушина існування гіббсових станів. Цей критерій дає достатні умови існування принаймні однієї міри $d\nu(\omega(\cdot))$, яка відповідає гамільтоніану (4) в тому розумінні, що її умовні розподіли задаються формулою

$$d\nu(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)),$$

$$E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot)) = \sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d, 1<|A|<\infty \\ A\cap\Lambda\neq\emptyset}} W_A((\omega_\Lambda \cup \bar\omega_{\Lambda^c})(\cdot)),$$

$$\omega_\Lambda \cup \bar{\omega}_{\Lambda^c} \in \Omega_\beta = \{\omega(\cdot) = (\omega_k(\cdot))_{k\in \mathbb{Z}^d} \mid \omega : S_\beta \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \omega_k \in \mathcal{S}\},$$

$$W_A(\omega(\cdot)) = \int_0^\beta W_A(\omega(\tau))\, d\tau ,$$

міра $d\vartheta_{0,\Lambda}(\omega(\cdot))$ - це продакт-міра $\underset{k\in\Lambda}{\times} d\vartheta_\beta^{\vee}(\omega_k(\cdot))$ утворена з однакових одночастинкових мір, а нормуючий множник Z_Λ вибирається з умови, щоб міра ϑ була ймовірнісною.

II. У другій главі розглядається важливий клас гамільтоніанів, у яких взаємодія має додаткову властивість, що забезпечує так звану додатність при відбиттях гіббсових мір. Для відповідних гіббсових станів у класичному випадку розроблена ефективна техніка їх побудови та дослідження. Важливі результати у цьому напрямку отримані в роботах Ю.Фреліха, Р.Ізраеля, Е.Ліба, Б.Саймона, Т.Спенсера, С.Б.Шлосмана. У цій главі показано, як відповідні конструкції і твердження з використанням результатів глави I можуть бути перенесені на квантовий випадок.

У §1 наведено основні означення і теореми, що стосуються додатності при відбиттях.

Нехай $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ і θ - відбиття в гіперплощині простору $\mathbb{R}^d$ таке, що $\theta \mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$. Множина всіх таких відбиттів утворює групу. Через θ_L позначається відбиття в гіперплощині L.

Розглянемо $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty$ і гіперплощину L таку, що $\theta_L \Lambda = \Lambda$. Через L^+ позначимо один із замкнених півпросторів, на які L розбиває $\mathbb{R}^d$. Нехай $\Lambda^+ = \Lambda \cap L^+$, $\Lambda^- = \theta_L(\Lambda^+)$, $\Lambda^0 = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$. Також позначимо $\mathcal{G}(\Lambda)$ σ-алгебру підмножин простору Ω_β, що породжена циліндричними множинами вигляду

$$\{\omega \in \Omega_\beta \mid \omega_k \in C_k,\ C_k \in \mathcal{B}(\mathcal{S}), k \in \Lambda, |\Lambda| < \infty\}.$$

Міра $\mathcal{V}_\Lambda$ в об"ємі Λ має властивість додатності при відбитті θ_L, якщо для довільної $\mathcal{G}(\Lambda^+)$-вимірної функції F на

$$\Omega_\beta(\Lambda) = \{\omega_\Lambda(\cdot) = (\omega_k(\cdot))_{k\in\Lambda} \mid \omega_\Lambda : S_\beta \to \mathbb{R}^\Lambda, \omega_k \in \mathcal{S}, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\}$$

справедлива нерівність

$$\int F\theta_L F\, d\chi_\Lambda \geq 0. \qquad (5)$$

Тут $(\theta_L F)(\omega_\Lambda) = F(\theta_L \omega_\Lambda)$, $(\theta_L \omega_\Lambda)_k = (\omega_\Lambda)_{\theta_L k}$.

Врахувавши результати глави 1, на квантовий випадок переноситься відомий у класичному випадку критерій того, що міра має властивість додатності при відбиттях.

Теорема 2.1. Нехай міра на $\Omega_\beta(\Lambda)$ має вигляд

$$\frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\xi_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)), \qquad (6)$$

а функція $-\xi_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot))$, $\omega_\Lambda \in \Omega_\beta(\Lambda)$, може бути подана у вигляді

$$-\xi_\Lambda = B + \theta B + \sum_{j=1}^{k} C_j \theta C_j,$$

де B, C_j $(j = 1,\dots,k)$ є $\mathcal{Q}(\Lambda^+)$ -вимірними функціями. Тоді міра (6) має властивість додатності при відбитті θ.

Важливим наслідком (5) є так звані шахові оцінки. Щоб їх сформулювати вводиться періодична конфігурація $\omega^{per}_{\Lambda_N}$ на Ω_β наступним чином. Нехай

$$\Lambda_N = \{ k \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq k^{(p)} \leq N-1;\ 1 \leq p \leq d \},$$

$\omega^{per}_{\Lambda_N}\big|_{\Lambda_N} = \omega_{\Lambda_N}$, а на всю гратку $\mathbb{Z}^d$ вона продовжується з $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^d$ періодичним чином. Далі для $M = \ell N$, $\ell \in \mathbb{N}$ означається періодичний потенціал взаємодії

$$E^{per}_{\Lambda_M}(\omega_{\Lambda_M}(\cdot)) = \sum_{A+se \subset \Lambda_M,\, A \subset \Lambda_M} W_A(\omega_{\Lambda_M}(\cdot)),$$

де $s \in \mathbb{Z}$; $e = (e^{(1)},\dots,e^{(d)})$, $e^{(i)} \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq d$.

Тоді міру в об"ємі Λ_M можна задати наступним чином:

$$d\nu_{\Lambda_M}(\omega_{\Lambda_M}(\cdot)) = \frac{1}{Z_{\Lambda_M}} e^{-E^{per}_{\Lambda_M}(\omega_{\Lambda_M}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda_M}(\omega(\cdot)); \qquad (7)$$

$$Z_{\Lambda_M} = \int e^{-E^{per}_{\Lambda_M}(\omega_{\Lambda_M}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda_M}(\omega(\cdot)).$$

Розглянемо гіперплощину

$$L = \{ t \in \mathbb{R}^d \mid t^{(m)} = rn \}$$

при деякому $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le d$ і $n \in \mathbb{Z}$, а $r = \frac{1}{2}$ або $r \in \mathbb{N}$.
Має місце наступна теорема, що є однією з найпростіших шахових оцінок.

Теорема 2.2. Якщо міра (7) при $\ell = 1$ має властивість додатності при відбиттях в гіперплощинах L при $r = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$, то вірна наступна нерівність:

$$\int G(\omega_0) d\nu_{\Lambda_N}(\omega_{\Lambda_N}(\cdot)) \le \left[\int \prod_{i \in P_N} G(\omega_i) d\nu_{\Lambda_N}(\omega_{\Lambda_N}(\cdot)) \right]^{\frac{1}{|P_N|}},$$

де $P_N = P \cap \Lambda_N$, а P – підгратка з періодом 2^s і така, що $(0,\ldots,0) \in P$.

У §2 розглядається взаємодія більш спеціального вигляду, а саме: нехай множина $A \subset \mathbb{Z}^d$, для якої означається функція W_A, – це d-вимірний куб зі стороною 1, що містить початок координат. Для такої взаємодії вірна наступна теорема.

Теорема 2.3. Нехай

$$Z_{\Lambda_2} = \int e^{-E^{per}_{\Lambda_2}(\omega_{\Lambda_2}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda_2}(\omega(\cdot)) < C < \infty.$$

Тоді множина мір $d\nu_{\Lambda_{2^m}}(\omega_{\Lambda_{2^m}}(\cdot))$, $m = 1,2,\ldots$ є слабко компактною.

Міри, які отримуються як границі мір вигляду (7), називаються періодичними гіббсовими станами.

Як наслідки теореми 2.3 отримано прості критерії існування гіббсових станів для конкретних модельних гамільтоніанів:

Твердження 2.1. Періодичний гіббсів стан для моделі з гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{\langle k,j \rangle} (x_k - x_j)^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} V(x_k)$$

існує, якщо для $\beta > 0$ і $H_V = -\frac{1}{2}\Delta + V$, $V \in L_2(\mathbb{R}^1)$ оператор $\exp(-\beta H_V)$ є ядерним.

Твердження 2.2. Періодичний гіббсів стан при оберненій температурі $\beta > 0$ для моделі з гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{\langle k,j\rangle} W(x_k, x_j) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(x_k)$$

існує, якщо при $\lambda = 2^d$ для

$$H_\lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \lambda W(x,y) + V(x) + V(y)$$

оператор $\exp(-\beta H_\lambda)$ є ядерним в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Тут символ $\sum_{\langle k,j\rangle}$ означає сумування парами найближчих сусідів на гратці $\mathbb{Z}^d$, тобто, по всіх $k, j \in \mathbb{Z}^d$, для яких $|k-j| = 1$.

III. Третя глава присвячена застосуванню періодичних гіббсових станів до дослідження явища фазового переходу в деяких моделях квантової статистичної фізики.

В класичній статистичній фізиці застосування періодичних гіббсових станів до вивчення явища фазового переходу за допомогою техніки, що використовує додатність при відбиттях провадилося багатьма авторами(Б.Саймон, Е.Ліб, Ю.Фреліх, С.Б.Шлосман та інші). В квантовому випадку такий підхід до вивчення критичних явищ в ряді моделей квантової статистичної фізики був запропонований в роботах В.Дресслера, Л.Ландау, Ф.Переца, Л.А.Пастура, Б.А.Хоруженка.

У §I досліджується модель, яка описується гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \mathcal{J}\sum_{\langle k,j\rangle} x_k x_j + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(x_k). \quad (8)$$

Сталі, які входять в гамільтоніан, мають наступний фізичний зміст: m - маса частинки, $\mathcal{J} > 0$ - стала взаємодії. Відносно потенціалу V додатково припустимо, що

1) $V \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$;
2) $V(x) \geq ax^2 + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a > \mathcal{J}d$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $V(x) = V(-x)$; (9)

4) для деякого $q_0 > 0$ функція $V(x)$ в точках $\pm q_0$ має строгий глобальний невироджений мінімум.

Введемо параметр дальнього порядку

$$P(\beta) = \lim_{|\Lambda| \to \infty} \left\langle\!\left\langle \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k \in \Lambda} x_k \right)^2 \right\rangle\!\right\rangle_{\beta, \Lambda} .$$

Будемо говорити, що в системі виникає дальній порядок, якщо $\forall \beta > \beta_{кр} \quad P(\beta) > 0$. Температуру $\beta_{кр}$ назвемо критичною.

Наступна теорема є узагальненням результату Л.А.Пастура та Б.А.Хоруженка, який відповідає випадку одночастинкового потенціалу вигляду $V(x) = ax^4 - bx^2$.

Теорема 3.1. Нехай розмірність гратки $d \geq 3$ і заданий довільний потенціал V , який задовольняє умови (9). Тоді існує таке $m_0 > 0$, що при $m > m_0$ в системі з гамільтоніаном (8) існує критична температура.

Як наслідок можна довести, що в системі ангармонійних квантових осциляторів, що описується гамільтоніаном (8) при $d \geq 3$ і фіксованих $\mathcal{J}$ та m , при достатньо великих q_0 та глибині мінімуму потенціалу V існує критична температура.

У §2 розглядається узагальнена система ангармонійних квантових осциляторів, яка описується гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \mathcal{J} \sum_{\langle k, j \rangle} s(x_k) s(x_j) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} V(x_k). \quad (10)$$

Тут функція $s(t)$ є непарною монотонно зростаючою на $\mathbb{R}$ і такою, що

$$|s(x)| < C e^{\alpha |x|}, \quad |s'(x)| < C' e^{\alpha' |x|}$$

для деяких сталих C, C', α, α'.

Моделі з гамільтоніаном (10) запроваджені в роботах Ю.М.Сухова.

Нехай потенціал $V(x)$ такий, що

$$V(x) \geq a s^2(x) \cdot \mathcal{J} d + b; \; a, b \in \mathbb{R}, a > 1; \; x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Тоді має місце узагальнення теореми 3.1:

Теорема 3.2. Нехай розмірність гратки $d \geq 3$ і заданий довільний потенціал V , який задовольняє умови (9), (11). Тоді існує таке $m_0 > 0$, що при $m > m_0$ в системі з гамільтоніаном (10) існує критична температура.

Наслідок. Розглянемо систему з формальним гамільтоніаном вигляду (10) і з потенціалом λV, $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$.

Тоді при $d \geqslant 3$ при фіксованих m та $\mathcal{J}$ існують такі q_0^* та λ^*, що при $q_0 > q_0^*$, $\lambda > \lambda^*$ в системі з гамільтоніаном (10) існує критична температура.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Юрію Григоровичу Кондратьєву за постійну увагу, допомогу та підтримку.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Барбуляк В.С. Существование фазового перехода I рода для одной модели сегнетоэлектрика// I советско-польский симпоз. по физике сегнетоэлектриков и родственных материалов, Львов, 4-8 июня 1990 г.: Тез. докл. - Киев, 1990. - С. 145 - 146.
2. Барбуляк В.С. Достатня умова існування фазового переходу I роду для сегнетоелектриків типу порядок-безпорядок// Республ. наук.-техн. конф. "Параметрична кристалооптика та її застосування", Карпати, 6-8 верес. 1990 р.: Тез. доп. - Львів, 1990. - С. 43.
3. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Критерий существования периодических гиббсовских состояний квантовых решеточных систем// Методы функционального анализа в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 30 - 41.
4. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Существование фазового перехода первого рода для одного класса моделей сегнетоэлектрика// Изв. АН СССР. Сер. физ. - 1991. - 55, № 3. - С. 602 - 605.
5. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Задання гіббсових станів квантових граткових систем у термінах функціональних інтегралів// Прикладні питання математики: - Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. - 1991.- Вип. 36. - С. 66 - 70.
6. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Критерій існування гіббсових станів квантових граткових систем// Прикладні питання математики: - Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат.- 1991.- Вип. 36. - С. 70 - 74.

7. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Функціональні інтеграли і квантові граткові системи: I. Існування гіббсових станів// Доп. АН УРСР. - 1991. - № 8. - С. 28 - 31.
8. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Функціональні інтеграли і квантові граткові системи: II. Періодичні гіббсові стани// Доп. АН УРСР. - 1991. - № 9. - С. 37 - 39.
9. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Функціональні інтеграли і квантові граткові системи: III. Фазові переходи// Доп. АН УРСР. - 1991. - № 10. - С. 19 - 21.
10. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Теоремы существования для функциональных интегралов, отвечающих гиббсовским состояниям квантовых решеточных систем. - Киев, 1991. - 30 с. - (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 91.33).
11. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Наличие дальнего порядка в системе квантовых ангармонических осцилляторов. - Киев, 1991. - 18 с. - (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 91.35).
12. Барбуляк В.С. Шахматные оценки и критическая температура в квантовых решеточных системах// Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 11. - С. 1574 - 1576.
13. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Фазовый переход в сегнетоэлектриках порядок-беспорядок// Применение методов функционального анализа в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. - С. 21 - 27.
14. Барбуляк В.С., Кондратьев Ю.Г. Квазиклассический предел для оператора Шредингера и фазовые переходы в квантовой статистической физике// Функцион. анализ и его прил. - 1992.- 26.ч № 2. - С. 61 - 64.

Підп. до друку 01.12.92. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс.друк.
Умов.друк. арк. 0,93. Умов. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк.0,7.
Тираж 100 прим. Зам. 337. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3