

ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАДЕЦКАЯ Светлана Викторовна

*Гадецкая*

**ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

**01.01.02 - дифференциальные уравнения**

**А в т о р е ф е р а т**

**диссертации на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук**

Харьков - 1992



00825680 (Т)

№ 26.432  
АВ 26.431

математического анализа Харьковского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.М.Борок.

Официальные оппоненты: - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики ХГУ В.А.Щербина;  
- кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИПИасу-трансгаз И.Л.Разницин.

Ведущая организация: ФТИИТ АН Украины.

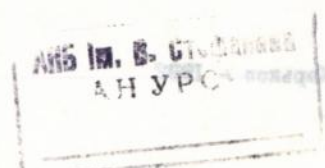
Защита состоится "5" авг. 1993 г. в 15<sup>15</sup> час. на заседании специализированного совета К 053.06.02 в Харьковском государственном университете по адресу: 310077, Харьков, пл.Свободы, 4, ауд. 6/48.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Харьковского госуниверситета.

Автореферат разослан "1" дек 1992 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета

А.С.Сохин



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В реферируемой диссертации с позиций общей теории дифференциальных уравнений в частных производных изучаются различные типы задач в полосе  $R \times [0, T] = \Pi$  для линейных нагруженных уравнений.

Нагруженным дифференциальным уравнением мы назовем уравнение, содержащее, наряду со значением искомой функции и ее производных в  $\Pi$ , также их значения на многообразиях меньшей размерности, а именно: на отрезках  $x = const$ , либо на прямых  $t = const$ , либо в точках  $(x, t) = (x_0, t_0)$ .

Интерес к нагруженным уравнениям существенно повысился в последнее время в связи с возникновением их во многих прикладных областях. Так, например, многие задачи прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги сводятся к различным краевым задачам для нагруженных уравнений (см., например, Нахушев А.М. ДУ, 1983, Т.19, № I, с.86-94). А.М.Нахушев и его ученики многие прикладные задачи решают путем различного типа редукции к нагруженным уравнениям (см., например, Нахушев А.М., ДУ, 1982, Т.18, № I, с.72-81). В некоторых ситуациях установлена возможность перехода от обратной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения (Искендеров А.Д. ДУ, 1971, Т.7, № 10, с.1911-1913). В цитированных работах и в ряде других работ устанавливается связь между некоторыми нелокальными задачами и нагруженными уравнениями. Таким образом, прикладной аспект нагруженных уравнений достаточно широк.

Исследованию с позиций общей теории дифференциальных уравнений в частных производных задачи Коши для нагруженных уравнений посвящены работы В.М.Борок и Я.И.Житомирского (см., нап-

пример, Изв. вузов. Математика, 1981, № 9, с. 5-12; там же, № 10, с. 3-9). Начало такому общему подходу, предполагающему изучение уравнений без априорных ограничений на их вид, положила классическая работа И.Г.Петровского (Бюлл. МГУ, Секц.А, 1938, Т.1, с.1-72), в которой был получен критерий корректности задачи Коши. К началу 60-х годов задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в рамках общей теории была изучена достаточно полно (см. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. - М: Физматгиз, 1958). С тех же позиций с середины 60-х годов проводится изучение краевой задачи в бесконечном слое. Исследованию классов единственности и корректности локальной краевой задачи посвящены работы В.М.Борок, Я.И.Житомирского, М.А.Перельмана и др. авторов. В 1982 году А.Х.Мамян установил (ДАН СССР, 1982, Т.267, № 2, с. 292-296), что для некоторых уравнений в полосе не существует ни одной корректной локальной краевой задачи, тогда как они существуют при привлечении нелокальных краевых условий. Это указывает на важность изучения нелокальных краевых задач; исследованию таких задач посвящены работы В.М.Борок, И.И.Антышко, И.И.Разничина, И.Г.Кудинцевой, А.А.Магарова, Л.В.Фардиголь, А.А.Дезина, С.Г.Крейна и Г.И.Лаптева, Г.Б.Савченко, А.А.Самарского.

Объект исследования. В настоящей работе изучается многоточечная задача для нагруженных эволюционных уравнений 1-го порядка по  $t$  и задача Дирихле для нагруженных эволюционных уравнений 2-го порядка по  $t$  в полосе  $\Pi$ , которые имеют вид соответственно:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) + N[u], \\ \sum_{k=0}^N A_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k) = u_0(x) \end{cases}$$

и

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) + N[u], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x), \end{cases}$$

где  $N[u]$  - дифференциальный оператор с нагрузками вида:

$$1) N[u] = Q[u] = \sum_{k=0}^N Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k) \quad (\text{см. задачу I в гл. I и задачу IV в гл. II});$$

$$2) N[u] = R[u] = \sum_{k=0}^N R_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k) \quad (\text{см. задачу II в гл. I и задачу V в гл. II});$$

или

$$3) N[u] = S[u] = \sum_{k=0}^N S_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k) \quad (\text{см. задачу II в гл. I и задачу VI в гл. II});$$

$P(s), A_k(s), Q_k(s), R_k(s), S_k(s), k = \overline{0, N}$ , - произвольные полиномы с комплексными коэффициентами ( $s \in \mathbb{C}$ ),  $-\infty < x_0 < \dots < x_N < +\infty$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T < +\infty$  (в задаче (I)),  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T < +\infty$  (в задаче (2)).\*)

Через (I<sub>0</sub>), (2<sub>0</sub>) будем обозначать соответственно однородные задачи (I), (2) (с нулевыми условиями);  $O$  - решением задачи (I) ( (2) ) будем называть нетривиальное решение задачи (I<sub>0</sub>) ( (2<sub>0</sub>) ); всюду в работе будем обозначать:

\*) разница в обозначениях объясняется лишь техническими удобствами.

$\rho = \deg P(s)$ ,  $\ell = \max\{\rho, \deg Q_k(s)\}$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$  (гл. I),  $\kappa = \overline{1, N}$  (гл. II),  $\deg R_j(s)$ ,  $j = \overline{0, N}$ ,  $\deg S_i(s)$ ,  $i = \overline{0, N}$  (гл. I),  $i = \overline{1, N}$  (гл. II).

В работе используются следующие пространства функций:

1) банахово пространство  $V_{m, \gamma} = \{\varphi(x) \in C^m(\mathbb{R}) : \|\varphi(x)\|_{m, \gamma} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max_{0 \leq k \leq m} |\varphi^{(k)}(x)| \cdot (1+|x|)^{-\gamma} < +\infty\}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ;

2) банахово пространство  $K_{z, \nu}^m = \{\varphi(x) \in C^m(\mathbb{R}) : \|\varphi(x)\|_{z, \nu, m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max_{0 \leq k \leq m} |\varphi^{(k)}(x)| \cdot e^{-\nu|x|^z} < +\infty\}$ ,  $0 < z \leq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\nu > 0$ ;

3) проективные пределы таких пространств:

$$V_{\infty, \gamma} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} V_{m, \gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R}; \quad K_{z, 0}^m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{z, \frac{1}{n}}^m, \quad 0 < z \leq 1, m \in \mathbb{N}_0;$$

$$K_{z, \nu} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{z, \nu}^n, \quad 0 < z \leq 1, \nu > 0.$$

Цель работы состоит в изучении вопросов единственности решения задач (1) и (2) и корректной разрешимости этих задач в различных классах функций.

При этом основное внимание уделялось получению условий корректности исследуемых задач в "коэффициентных" терминах, т.е. в терминах исходных данных (указанных полиномов и точек нагрузки).

В работе обращено внимание на гладкость решения исследуемых задач в зависимости от гладкости начальных функций; в связи с этим исследуется вопрос о наличии "параболического" эффекта сглаживаемости решения, имеющего место, как известно (Ворок В.М. ДАН СССР, 1956, Т.110, № 6, с.900-903) в случае задачи Коши для параболических уравнений (без нагрузок).

Исследуется также вопрос о регулярности решения, т.е.

определяются условия, при которых единственность решения задачи в классе ограниченных функций влечет ее корректную разрешимость в пространствах  $V_{m,\gamma}$ .

Методика исследования. В работе используются методы теории обобщенных функций, общей теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций комплексного переменного.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность.

В диссертации получены теоремы единственности и корректности указанных задач (I) и (II) (в "коэффициентных" терминах), а также рассмотрены некоторые примыкающие к этому исследованию вопросы. Результаты работы являются новыми. Кроме того, они позволяют провести сравнительный анализ указанных задач, а также указанных задач для уравнений с нагрузками и соответствующих задач для уравнений без нагрузок. Укажем на основные результаты такого анализа.

1. Алгебраические свойства полинома  $P(s)$ , вообще говоря, не влияют на корректность задачи I (с нагрузками на прямых) в шкале пространств  $V_{m,\gamma}$  (в отличие от задачи Коши для соответствующего уравнения без нагрузок, где необходимо выполнение условия А И.Г.Петровского); такое влияние имеет место лишь в особых случаях, когда специальные полиномы, определяемые полиномами  $P(s)$ ,  $Q_k(s)$  и  $A_k(s)$ ,  $k = \overline{0, N}$ , тождественно обращаются в нуль.

2. Существенное влияние на корректность задач I и II (с нагрузками на прямых) в пространствах функций  $V_{m,\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ , оказывает арифметическая природа чисел  $t_k$ .

3. Сравнение классов единственности решения рассматриваемых задач и соответствующих задач для уравнений без нагрузок

показывает, что в случае задач I, IV новых (максимальных) классов не возникает, а для задач II, У, УП возникает новый максимальный класс единственности  $M_{\mathcal{I}(x)}$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{I}(x) |x|^{-1} = 0.$$

4. Ни значения полиномов  $S_{\kappa}(i\sigma)$  и  $R_{\kappa}(i\sigma)$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$ , при  $\sigma \neq 0$ , ни значения чисел  $x_{\kappa}$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$ , ни арифметическая природа чисел  $t_{\kappa}$ , которые присутствуют в уравнении задачи II, но не входят в условие (т.е. для таких  $\kappa$ , что  $A_{\kappa}(i\sigma) \equiv 0$ ), не оказывают никакого влияния на единственность и корректность задачи II, которой соответствуют нагрузки на отрезках и в точках (в отличие от задачи I с нагрузками на прямых, где весомую роль играют значения полиномов  $Q_{\kappa}(i\sigma)$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$ , на всей вещественной оси, и существенна арифметическая природа всех чисел  $t_{\kappa}$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$ ).

5. Задача Дирихле IV (с нагрузками на прямых) регулярна, в отличие от соответствующей задачи без нагрузок, не всегда, а лишь при выполнении определенных условий на числа  $t_{\kappa}$ ,  $\kappa = \overline{1, N+1}$ .

6. На единственность и корректность задачи У с нагрузками на отрезках (задачи УП с нагрузками в точках) оказывают влияние значения полиномов  $R_{\kappa}(s)$  (в задаче УП -  $\mathcal{I}_{\kappa}(s)$ ) только в точке  $s=0$ , и никакой роли не играют значения чисел  $x_{\kappa}$ ,  $\kappa = \overline{0, N}$  (а в задаче УП - и арифметическая природа чисел  $t_{\kappa}$ ,  $\kappa = \overline{1, N+1}$ , в отличие от задачи IV с нагрузками на прямых).

Результаты диссертации вносят вклад в общую теорию дифференциальных уравнений, а также могут быть использованы при исследовании единственности и корректности конкретных задач для

уравнений с нагрузками и без них.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре по дифференциальным уравнениям Харьковского госуниверситета (руководитель проф. Борок В.М., 1986–1990 гг.), на республиканской научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (г. Одесса, 1987 г.), на Воронежской школе "Современные методы в теории краевых задач" (1992 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [5]. Две из них написаны совместно с научным руководителем проф. В.М. Борок.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав. Библиография содержит 79 названий. Объем работы – 139 машинописных страниц.

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обзор научных исследований а) нагруженных уравнений и б) дифференциальных уравнений без нагрузок с позиций общей теории дифференциальных уравнений в частных производных; далее даются постановка задачи, основные аспекты изучаемой проблемы и основные результаты работы.

Глава I посвящена исследованию вопроса единственности и корректности многоточечной задачи для уравнения I-го порядка (по  $t$ ) с различными типами нагрузок.

§ I носит вспомогательный характер. Здесь рассмотрена многоточечная задача для обыкновенного дифференциального уравнения I-го порядка с нагрузками; задаче сопоставляется некоторая функция  $d(\sigma)$ , для которой получена важная для последующих рассмотрений оценка снизу на вещественной оси; доказан ряд неравенств, получены оценки на вещественной оси для

производных функции, аналитической в примыкающей области вида

$$G(\nu, \kappa) = \{s - \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \tau \leq \kappa(1 + |\sigma|)^{\nu/2}, \nu \leq 0, \kappa > 0\}.$$

Все утверждения этого параграфа, за исключением леммы I.1, относящейся непосредственно к главе I, неоднократно используются в обеих главах.

В § 2 изучена единственность задачи I (это задача (I) при  $N(U) = Q(U)$ ) путем сведения ее к нелокальной многоточечной задаче для системы без нагрузок и использования результатов работы И.Л.Разницына (ДАН УРСР. Сер.мат., 1974, № 3, с.195-197): по задаче I строится целая функция  $A_I(s)$  ("определитель" задачи, ее вид см. в (I.2.4)), вводится множество  $\mathcal{K}_I$  нулей этой функции и число  $a_I = \inf_{s \in \mathcal{K}_I} |Im s|$ ; по ним определяются классы единственности решения задачи I ( $\mathcal{K}EP3_I$ ). Получена теорема I.8 об экспоненциальном представлении решений задачи I<sub>0</sub> в случае, если определитель имеет конечный набор изолированных нулей.

§ 3 посвящен изучению корректности задачи I.

В п.1 этого параграфа приводится общая схема доказательства теорем корректности, предложенная в цитированной книге И.М. Гельфанда и Г.Е.Шилова и примененная для нагруженных уравнений, например, в вышеуказанной работе В.М.Борок и Я.И.Житомирского. В пункте 2 введено

Определение I.3. Будем говорить, что задача I удовлетворяет условию  $\mathcal{K}_I$ , если:

- 1)  $A_I(\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ,
- 2) в случае выполнения условия (W) (см. опр. I.1) для функции  $A_I(\sigma) \cdot P(\sigma)$  (при  $P(\sigma) \neq 0$ ) имеет место соизмеримость чисел  $t_k, k = \overline{1, N}$ :  $t_1 : \dots : t_N = m_1 : \dots : m_N, m_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, N}$ ;
- 3) в случае  $A_N(\sigma) (P(\sigma) + \sum_{k=0}^N Q_k(\sigma)) - Q_N(\sigma) \sum_{k=0}^N A_k(\sigma) \equiv 0$

полином  $P(\sigma)$  обладает свойством  $\sup_{\sigma \in R} \operatorname{Re} P(\sigma) < +\infty$ ;

4) в случае  $A_0(\sigma) (P(\sigma) + \sum_{k=0}^N Q_k(\sigma)) - Q_0(\sigma) \sum_{k=0}^N A_k(\sigma) = 0$

полином  $P(\sigma)$  обладает свойством  $\inf_{\sigma \in R} \operatorname{Re} P(\sigma) > -\infty$ .

Получена теорема I.9 корректности на  $[0, T]$  задачи I в пространствах  $V_{m, \gamma}$  при условии выполнения условия  $\mathcal{K}_I$ .

Приведен пример I.3 (задача Коши для нагруженного уравнения), показывающий, что требование 2) соизмеримости чисел  $t_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , в условии  $\mathcal{K}_I$  существенно для корректности задачи I в указанных пространствах.

Как следует из примера I.2, это же условие существенно и для многоточечной задачи для уравнения без нагрузок.

В пункте 3, § 3 отдельно рассмотрен случай

$$P(\sigma) + \sum_{k=0}^N Q_k(\sigma) \equiv 0.$$

В пункте 4 рассмотрен вопрос регулярности задачи I.

Определение I.4. Назовем задачу I регулярной, если для любых полиномов  $P_j(\sigma)$ ,  $Q_j(\sigma)$ ,  $j = \overline{0, N}$ , из единственности ее решения в классе ограниченных функций следует ее корректная разрешимость на  $[0, T]$  в шкале пространств  $V_{m, \gamma}$  (т.е. имеет место результат теоремы I.9).

Теорема I.10. Для того, чтобы задача I была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1)  $A_0(\sigma) \cdot A_N(\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{C}$ ,

2)  $\sum_{k=0}^N A_k(\sigma) \equiv 0, \sigma \in \mathbb{C}$ ,

3)  $t_1 : \dots : t_N = m_1 : \dots : m_N, m_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, N}$ .

В п.5, § 3 введено

Определение I.5. Будем говорить, что задача I удовлетворяет условию  $СХ_I$ , если

- 1)  $\Delta_I(\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ,
- 2)  $|\operatorname{Re} P(\sigma)| \geq \lambda_1 |\sigma|^h + \lambda_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 \in \mathbb{R}, h > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ;

а также определение параболичности и антипараболичности уравнения задачи I; при этом введены характеристики уравнения

(I.2.I) задачи I:  $h$  - показатель и  $\nu$  - род уравнения.

Теорема I.13. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует область  $G(\mu, \mathcal{M}), \mu \leq 0, \mathcal{M} > 0$ , такая, что  $X_I \cap G(\mu, \mathcal{M}) = \emptyset$ ;
- 2) уравнение (I.2.I) задачи I имеет показатель  $h$  и род  $\nu$ ;
- 3)  $A_0(is) \cdot A_N(is) \neq 0$ ,
- 4)  $Q_0(is) \equiv 0$  и  $Q_N(is) \equiv 0$ .

Тогда задача I корректно разрешима на  $(0, T)$  в следующих пространствах:

A) в случае  $\tilde{\mu} = \min(\mu, \nu) < 0$  -

$$A_1) \text{ из } K_{z,0}^{\circ} \text{ в } K_{z,0}^{\sim}, z = \frac{h}{h - \tilde{\mu}},$$

$$A_2) \text{ из } K_{z,v}^{\circ} \text{ в } K_{z,v}^{\sim}, z \in (0, \frac{h}{h - \tilde{\mu}}), v \geq 0;$$

B) в случае, когда задача I является невырожденной типа  $a_I > 0$  и  $\nu \geq 0$  (т.е.  $h = \rho = \deg P(is)$  или  $h = \rho - 1$ ) -

$$B_1) \text{ из } K_{z,v}^{\circ} \text{ в } K_{z,v}^{\sim}, v \in [0, \tilde{a}),$$

$$\text{где } \tilde{a} = \begin{cases} \min(\tilde{h}, a_I), & \text{если } h = \rho - 1, \\ a_I, & \text{если } h = \rho, \end{cases}$$

$$B_2) \text{ из } K_{z,v}^{\circ} \text{ в } K_{z,v}^{\sim}, z \in (0, 1), v \geq 0.$$

(отметим, что условия 1) и 2) теоремы включают требования ус-

ловия  $CX_I$  ; число  $\mathcal{K}$  определяется полиномом  $Aris$  ).

Доказаны также теоремы для параболического и антипараболического уравнений в задаче I как частных случаев требования 2) в условии  $CX_I$  (теоремы I.II и I.I2). Теоремы I.II - I.I3 применимы для соответствующей задачи без нагрузок.

Обратим внимание на то, что приведенная общая теорема I.I3 неприменима к случаю задачи Коши. В работе получены соответствующие теоремы, гарантирующие корректность задачи Коши в пространствах  $K_{z, \epsilon}^m$ , причем в случае задачи Коши с начальным условием при  $t = T$  для параболического уравнения и в случае задачи Коши с начальным условием при  $t = 0$  для антипараболического уравнения (теорема I.I4) гладкость решения по  $x$  (т.е. число  $m$ ) по сравнению с гладкостью начальной функции не возрастает. Заметим, что теорема I.I4 не имеет аналога для соответствующих задач Коши без нагрузок.

Теорема I.9, дающая достаточные условия корректности задачи I в шкале пространств  $V_{m, \delta}$ , заведомо применима к задаче I, удовлетворяющей условию  $CX_I$ , в частности, к задаче, содержащей параболическое или антипараболическое уравнение. Однако при этом, согласно теореме I.9, может произойти потеря гладкости решения. На самом же деле, для задач, удовлетворяющих условию  $CX_I$ , происходит (в общем случае) увеличение гладкости решения при  $t \in (0, T)$  (теорема I.I5, она же применима для соответствующей задачи без нагрузок), а в случае задачи Коши (при  $t = 0$ ) для антипараболического уравнения и задачи Коши (при  $t = T$ ) для параболического уравнения она не меняется (теоремы I.I6 и I.I7, не имеют аналога для соответствующих задач без нагрузок).

В пункте 6, § 3 приведена теорема I.I8 о разрешимости за-

дачи I в пространствах  $V_{m, \gamma}$  в случае нарушения единственности решения (это связано с наличием изолированных вещественных нулей  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  определителя задачи  $\Delta_I(\sigma)$ ). В этом случае  $\forall \gamma \in \mathbb{R}$  и для  $\forall n_1 \in \mathbb{N}_0, n_1 \geq l$ , найдется  $n_2 \in \mathbb{N}_0$  такое, что для любой начальной функции  $u_0(x)$  вида

$$u_0(x) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{d}{dx} - i\sigma_k \right)^{m_k - i_k} f(x), \quad f(x) \in V_{n_2, \gamma}$$

существует решение  $u(x, t)$  задачи I, принадлежащее (при  $\forall t \in [0, T]$ ) пространству  $V_{n_2, \gamma}$  и непрерывно зависящее (в соответствующей топологии) от начальной функции  $u_0(x)$ . (Здесь  $m_k$  - кратность  $\sigma_k$  как нуля определителя  $\Delta_I(\sigma)$ ,  $i_k$  - кратность его как нуля некоторой функции  $g(\sigma)$ , построенной по полиномам  $P_k(i\sigma), Q_k(i\sigma), k = \overline{0, N}$ , и точкам  $t_k, k = \overline{0, N}$ ).

Существенность требования того, чтобы начальная функция  $u_0(x)$  была производной указанного порядка от функции из пространства  $V_{n_2, \gamma}$ , показана на примере I.4.

В § 4 изучена единственность задачи II (это задача (I) при  $N[u] = R[u] + S[u]$ ). Объединение двух разных типов нагрузок обусловлено единообразием исследования. При изучении этого вопроса введена вспомогательная задача без нагрузок III (это задача (I) при  $N[u] \equiv 0$ ), которую удобно рассматривать как частный случай задачи I, и получено утверждение I.3, позволяющее (при выполнении определенных условий) переходить от решения задачи III к решению исследуемой задачи, и наоборот. Такой метод исследования нагруженного уравнения удобен, когда уравнение содержит нагрузки по пространственной переменной  $x$ , что не позволяет непосредственно произвести преобразование

Фурье, как в задаче I (см. общую схему в п. I, § 3).

В результате исследований появляется "новый" по сравнению с задачами без нагрузок  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{II}}$  :

Теорема I.20. Пусть 1)  $\mathcal{K}_{\text{III}} \cap \mathcal{R} = \{0\}$ , 2)  $\delta(\bar{A}(0),$

$\mathcal{P}(0) + \sum_{k=0}^N R_k(0), \bar{S}(0)) \neq 0$ . Тогда класс  $\mathcal{M} F(x)$ ,

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) |x|^{-1} = 0$ , является  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{II}}$ . При этом

существует 0-решение задачи II, являющееся полиномом I-ой степени относительно  $x$  (здесь  $\mathcal{K}_{\text{III}}$  - это множество нулей определителя  $\Delta_{\text{III}}(s)$  задачи III; общий вид функции  $\delta(\bar{A}, \alpha, \bar{B})$  см. в (I.I.3)).

Заметим, что в случае задачи Коши теорема I.20 не имеет места.

С другой стороны, при выполнении условий:

1)  $\mathcal{K}_{\text{III}} \cap \mathcal{R} = \emptyset$  и 2)  $\delta(\bar{A}(0), \mathcal{P}(0) + \sum_{k=0}^N R_k(0), \bar{S}(0)) \neq 0$  -  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{II}}$  и  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{III}}$  совпадают, а задачи Коши (при  $t=0$  или при  $t=T$ ) для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) + \sum_{k=0}^N R_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

и соответствующего ненагруженного уравнения всегда имеют одинаковые  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3$ .

§ 5 посвящен вопросу корректности задачи II. Теоремы I.24 и I.25 обеспечивают корректность задачи II в пространствах

$V_{m,r}$  и  $K_{z,\epsilon}^m$  соответственно в случае совпадения  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{II}}$  и  $\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{P}3_{\text{III}}$ . В частности, задача Коши (при  $t=0$  или при  $t=T$ ) для уравнения с нагрузками только по  $x$  ( $N[u] = R[u]$ ) корректна в классах корректности соответствующей задачи Коши для уравнения без нагрузок, содержащих

ограниченные функции.

В противном случае имеет место

Теорема I.27. Пусть 1)  $\delta(\bar{A}(0), \bar{P}(0) + \sum_{k=0}^N R_k(0), \bar{S}(0)) \neq 0$ ,

2) задача III удовлетворяет требованиям 2) - 4) условия  $\mathcal{K}_I$ ,  
но 3)  $\mathcal{Z}_{III} \cap \mathcal{R} = \{0\}$ , причем  $S=0$  - корень кратности  $n$   
определителя  $\Delta_{III}(S)$  задачи III. Тогда для  $\forall \gamma \in [0, 1)$   
и для  $\forall n_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_2 \geq l$ , найдется число  $n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_2 \geq n$ ,  
такое, что для любой начальной функции  $u_0(x)$  вида:

$$u_0(x) = \frac{d^{n_2}}{dx^{n_2}} f(x), \quad f(x) \in V_{n_2, \gamma},$$

существует единственное решение  $u(x, t)$  задачи II, принадле-  
жащее (при  $\forall t \in [0, T]$ ) пространству  $V_{n_2, \gamma}$  и непрерывно  
зависящее (в соответствующей топологии) от  $u_0(x)$ . Выделе-  
ние условий  $\delta(\bar{A}(0), \bar{P}(0) + \sum_{k=0}^N R_k(0), \bar{S}(0)) \neq 0$  и  $\mathcal{Z}_{III} \cap \mathcal{R} \setminus \{0\} =$   
в указанных теоремах корректности закономерно, т.к. в против-  
ном случае, как следует из теоремы I.21, уже в классах ограни-  
ченных функций нарушается единственность решения задачи II.

Глава завершается § 6, содержащим ряд примеров, иллюст-  
рирующих результаты этой главы.

Глава II посвящена изучению вопроса единственности и кор-  
ректности задачи Дирихле для уравнений 2-го порядка по  $t$  с  
различными типами нагрузок.

Соответствующая задача Дирихле без нагрузок исследована,  
например, (как частный случай другой, более общей, задачи) в  
работах В.М.Борок.

§ I носит вспомогательный характер и содержит лемму о  
разрешимости некоторой двухточечной задачи для обыкновенного  
дифференциального уравнения с нагрузками.

В § 2 изучена единственность задачи IУ (это задача (2) с

$N(U) = Q(U)$  путем сведения ее, как и задачи I, к нелокальной многоточечной задаче для системы без нагрузок. По задаче IV строится целая функция  $\Delta_{IV}(\zeta)$  ("определитель" задачи, ее вид см. в (2.2.3)), вводится множество  $\mathcal{Z}_{IV}$  нулей этой функции и число  $a_{IV} = \inf_{\zeta \in \mathcal{Z}_{IV}} |\operatorname{Im} \zeta|$ ; по ним определяются  $\mathcal{K} \in \mathcal{P} \mathcal{Z}_{IV}^-$ .

В § 3 проводится исследование корректной разрешимости задачи IV в различных классах функций (по общей схеме, изложенной в п. I § 3, гл. I).

В п. I § 3 введено

Определение 2.1. Будем говорить, что задача IV удовлетворяет условию  $\mathcal{K}_{IV}$ , если

- 1)  $\Delta_{IV}(\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ,
- 2) в случае  $\operatorname{Re} \sqrt{\mathcal{P}(i\sigma)} = \underline{0}$  (I) (при  $\sigma \rightarrow +\infty$  или  $\sigma \rightarrow -\infty$ ),  $\mathcal{P}(i\sigma) \neq \text{const}$ , имеет место соизмеримость чисел  $t_k, k = \overline{1, N+1}$ :  $t_1 : \dots : t_{N+1} = m_1 : \dots : m_{N+1}, m_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, N+1}$ ;
- 3) в случае  $\operatorname{Re} \sqrt{\mathcal{P}(i\sigma)} \rightarrow +\infty$  (при  $\sigma \rightarrow +\infty$  или  $\sigma \rightarrow -\infty$ ) выполняется условие:

если  $(\mathcal{P}(i\sigma) + \sum_{k=1}^N Q_k(i\sigma) = 0, t_N = T - t_1, N \geq 2)$ , то  $Q_1(i\sigma) + Q_N(i\sigma) \neq 0$ .

(Под  $\sqrt{\cdot}$  понимаем непрерывную ветвь многозначной функции, для которой  $\sqrt{-1} = +i$ ).

Доказана теорема 2.3 о корректной разрешимости на  $IQ_{IV}$  задачи IV в пространствах вида  $V_{m, \gamma}$  при выполнении условия  $\mathcal{K}_{IV}$ .

Пример 2.1 подтверждает существенность требования 2) соизмеримости чисел  $t_k, k = \overline{1, N+1}$ , в условии  $\mathcal{K}_{IV}$  для корректности задачи IV в пространствах  $V_{m, \gamma}$ .

Как следует из работы В.М.Борок (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, т.35, № 4, с. 922-939), задача Дирихле для ненагруженного уравнения всегда регулярна. Следующая теорема показывает, что для задачи IV это не так, и дает критерий ее регулярности.

Теорема 2.4. Для того, чтобы задача IV была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1)  $t_1 : \dots : t_N : t_{N+1} = m_1 : \dots : m_N : m_{N+1}, m_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, N+1}$ ,
- 2) в случае  $N > 2: t_N \neq T - t_1$ .

В п.2, § 3 вводится

Определение 2.2. Будем говорить, что задача IV удовлетворяет условию  $\mathcal{C}\mathcal{K}_{IV}$ , если

- 1)  $\Delta_{IV}(\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}$ ,
- 2) существуют постоянные  $C_1 > 0, C \in \mathbb{R}, h > 0$  такие, что  $\operatorname{Re} \sqrt{P(i\sigma)} \geq C_1 |\sigma|^h + C, \sigma \in \mathbb{R}$ .

При этом введены характеристики уравнения (2.2.1) задачи IV: показатель  $h$  и род  $\nu$ .

Теорема 2.5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует область  $G(\mu, M), \mu \leq 0, M > 0$ , такая, что  $\mathcal{K}_{IV} \cap G(\mu, M) = \emptyset$ ;
- 2) уравнение (2.2.1) задачи IV имеет показатель  $h$  и род  $\nu$ ;
- 3)  $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \neq 0, s \in \mathbb{C}$ .

Тогда задача IV корректно разрешима на  $(0, T)$  в пространствах, указанных в теореме I.13 (гл. I) с заменой всюду I - на IV,  $a_I$  - на  $a_{IV}$ . (Отметим, что условия 1) и 2) теоремы включают требование  $\mathcal{C}\mathcal{K}_{IV}$ ).

Приведенная теорема, как и теорема 2.3, применима к соответствующей задаче Дирихле без нагрузок (в работе это задача VI)

и полностью согласуется с соответствующими известными результатами.

Как и в случае задачи I (гл. I), доказаны теоремы:

- 1) о корректной разрешимости задачи IY на  $(0, T)$  в пространствах вида  $V_{m, \gamma}$  при выполнении условия  $CK_{IV}$  с эффектом сглаживаемости решения (теорема 2.6);
- 2) о разрешимости задачи IY в пространствах вида  $V_{m, \gamma}$  в случае нарушения единственности решения (теорема 2.7).

В § 4 исследована единственность решения задачи Y (это задача (2) с  $N[u] = R[u]$ ). Вопрос единственности решения этой задачи решен методом разложения решения  $u(x, t)$  задачи  $Y_0$  в равномерно сходящийся ряд Фурье, в результате чего приходим к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения с нагрузками. Получены  $KEPZ_{IV}$ . Как и в случае задачи II (гл. I, § 6), в результате исследований появился "новый" по сравнению с соответствующей задачей без нагрузок VI класс единственности решения  $M_{F(x)}$ , где  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) |x|^{-1} = 0$  (см. теорему 2.13).

В то же время справедлива

Теорема 2.16.  $KEPZ_{IV}$  и  $KEPZ_{VI}$  совпадают в одном из трех случаев:

$$1) (P(0) + \frac{n^2 \pi^2}{T^2}) \cdot (\delta + \frac{n^2 \pi^2}{T^2}) \neq 0, n \in N,$$

$$2) \exists s_0 \in \mathbb{Z}_{IV} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} s_0 = 0,$$

$$3) 0 \in \mathbb{Z}_{IV}, \sum_{k=0}^N r_k(0) = 0$$

$$\left( \text{здесь } \delta = P(0) + \sum_{k=0}^N r_k(0); \mathbb{Z}_{IV} = \left\{ s \in \mathbb{C} : P(s) = -\frac{n^2 \pi^2}{T^2}, n \in N \right\} \right).$$

В § 5 исследуется корректность задачи У. Для этого обращаемся к соответствующей "усеченной" задаче VI, которую можно рассматривать как частный случай задачи IV (при  $\theta_k(s) \equiv 0$ ,  $k = \overline{1, N}$  ).

Теоремы 2.17 и 2.18 дают условия корректной разрешимости задачи У в пространствах вида  $V_{m, \gamma}$  и  $K_{r, \nu}^m$  соответственно в случае совпадения  $\mathcal{K}EP3_{\underline{V}}$  и  $\mathcal{K}EP3_{\underline{VI}}$ ; в противном случае имеет место теорема 2.19.

В § 6 изучается единственность и корректность задачи УП (это задача (2) при  $N[UT] = S[UT]$  ). При помощи вспомогательной задачи VI определяются  $\mathcal{K}EP3_{\underline{VII}}$ , а также устанавливаются теоремы корректности.

§ 7, содержащий примеры, завершает главу II.

Автор благодарит своего научного руководителя проф. В.М. Борка за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

#### СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА

##### ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Борк В.М., Евдокимова С.В. Корректная разрешимость задачи Коши для линейных уравнений с нагрузками по временной координате. - Тезисы респ. научн. конференции "Дифференц. и интегр. уравнения и их приложения", 1987, 22-24 сент., Одесса, I часть, С.29-30.
2. Борк В.М., Евдокимова С.В. Регулярные граничные задачи в полосе. - Теория функций, функц. анализ и их прилож., 1989, вып.51, с.31-37.
3. Гадецкая С.В. Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравнений с нагрузками. - Изв. вузов. Мате-

матика, 1989, № 3, с.79-82.

4. Гадецкая С.В. Задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения с нагрузками. - Тезисы докладов школы "Современные методы в теории краевых задач", Воронеж, 1992 г., 4 - 8 мая, с.31.
5. Гадецкая С.В. Параболический эффект в задаче Коши для уравнения с нагрузками. - Вестн. Харьк. ун-та, 1992, № 361: Прикладная математика и механика, с.71-79.

Формат 80x110. Бумага типографская №1  
Печатать обратная сторона / на Тираж 400 экз. Р-828  
Отпечатано на территории Харьковской городской типографии  
в 18 Облгосиздате Украины по заказу, печать  
на территории Харьковской, ул. Униформистов, 18



AB EC. 435

460810

AB 26.432

**AB 26.432**

Тираж 500 экз. Москва, издательство «Искусство»  
Дизайн обложки: Д.С. Сидоров. Фото: А.А. Сидоров  
Составлено на основании материалов, предоставленных  
И.И. Сидоровым, главным редактором журнала «Искусство»  
в издательстве «Искусство», Москва-8, ул. Звонкая, 10

000000