

Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Сушко Ірина Михайлівна

УДК 517.9

Стійкість та біфуркації розв'язків
деяких класів різницевих рівнянь з двома
відхиленнями аргументу

01.01.02 - диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на одбуття вченого ступеня кандидата
фізико-математичних наук

КИЇВ

1998

№ 26. 439

Робота виконана у відділі теорії динамічних систем Інституту математики АН України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук
МАЙСТРЕНКО Ю.Л.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор МАРТИНЮК Д.І.,
доктор фізико-математичних наук,
професор ДМІТРИЄВ О.С.

Провідна організація: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
АН України.

Захист відбудеться " 2 " лютого 1993 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д.016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "10 лютого" 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат. наук, проф.

ЛУЧКА А.Ю.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00825672 (U)

ЛННБ ім. В. Стефаника
АН УРСР

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Нелінійні різницеві рівняння моделюють велику кількість прикладних задач, що відносяться до найрізноманітніших областей природознавства. Інтерес до такого роду рівнянь особливо пріс останнім часом завдяки їх використанню для опису процесів хаотизації та виникнення структур. Поряд з одновимірними різницевими рівняннями, теорія яких досить добре розвинута, важливу роль відіграють різницеві рівняння другого порядку, розв'язки яких характеризуються великою різноманітністю асимптотичної поведінки, що відкриває нові можливості їх застосування.

Серед робіт з різницевих рівнянь другого порядку значна кількість присвячена рівнянням, динаміка розв'язків яких визначається двовимірними дифеоморфізмами. В той же час багато реальних задач моделюються різницевими рівняннями другого порядку, що породжують двовимірні ендоморфізми, тобто не взаємнооднозначні відображення площини. Невзаємнооднозначність вносить свою специфіку в поведінку траєкторій, структуру граничних множин, механізми та послідовність біфуркацій. Тому викликає інтерес вивчення такого роду рівнянь з точки зору відшукування особливостей, що вносяться не взаємнооднозначністю в асимптотичну поведінку розв'язків.

Метою роботи є дослідження асимптотичної поведінки при $t \rightarrow \infty$ розв'язків різницевих рівнянь другого порядку з кусочно-лінійною та квадратичною правою частиною; знаходження умов існування та стійкості циклів відповідних відображень; вивчення біфуркацій та структури атракторів з застосуванням обчислювального експерименту та машинної графіки.

Наукова новизна. Для двовимірних кусочно-лінійних відображень, котрі виникають при вивченні різницевих рівнянь другого порядку з кусочно-лінійною правою частиною, встановлено існування стійких циклів γ_n періодів $n = 3, 5, 6, \dots$; в площині параметрів одержані точні аналітичні вирази для кривих, що обмежують області існування та стійкості даних циклів. Вивчена біфуркація втрати стійкості циклів γ_n , що приводить до виникнення хаотичних притягуючих множин типу страних атракторів. З використанням обчислювального експерименту встановлено типовий порядок біфуркацій даних притягуючих множин, дано конструктивне описання їх топологічної структури.

Для двовимірних квадратичних відображень вивчена біфуркація втра-

ти стійкості нерухокої точки; описано механізм хаотизації, що являє собою каскад біфуркацій подвоєння, який реалізується на деякому одно-вимірному многовиді.

Практична цінність. Робота носить теоретичний характер. Одержані результати є новими і можуть знайти застосування при дослідженні фізичних та інших прикладних задач, що описуються нелінійними різницевиими рівняннями другого порядку; одержано математичний опис відомого в радіофізиці явища додавання періоду для кільцевих радіофізичних систем з двома нелінійними підсилювачами та двома лініями затримки.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися на конференції молодих вчених Інституту математики АН УРСР (м. Алушта, 1990 р.), на третій школі "Динамічні системи та турбулентність" (сел. Кацивелі, 1991 р.), на радянсько-іспансько-чехословацькому симпозіумі "Динамічні системи та їх застосування" (м. Київ, 1991 р.), на школі з динамічних систем (м. Трієст, 1991 р.), на конференції молодих вчених механіко-математичного факультету МДУ (м. Москва, 1992 р.), на семінарі з динамічних систем та ергодичної теорії механіко-математичного факультету МДУ (м. Москва, 1992 р.), на семінарі факультету прикладної математики Російського відкритого університету (м. Москва, 1992 р.), а також на семінарі відділу теорії динамічних систем Інституту математики АН України.

Публікації Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-4].

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, трьох глав і списку літератури. Об'єм роботи 95 сторінок машиннописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається стислий огляд деяких праць з нелінійних різницевиих рівнянь другого порядку, дослідження яких зводиться до вивчення динаміки двовимірних неавтономних відображень. Описана фізична модель - кільцева радіофізична система з двома нелінійними підсилювачами і двома лініями затримки, яка описується різницевиими рівняннями класу, що досліджується. Приведено стислий зміст дисертації.

В першій главі йде мова про одновимірне різницеве рівняння з неперервним аргументом

$$x(t+1) = f_{l,p}(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

де

$$f_{l,p} = \begin{cases} lx + 1 - l(1 + 1/p), & x \leq 1 + 1/p, \\ px - p, & x > 1 + 1/p, \end{cases} \quad (2)$$

l, p - параметри, $(l, p) \in \Pi = \{(l, p) : 0 < l < 1, p < -1\}$.

В першому параграфі описуються атрактори відповідного кусочно-лінійного відображення інтервалу $f_{l,p} : I \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, виду

$$f_{l,p} : x \mapsto f_{l,p}(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (3)$$

Під атрактором розуміється інваріантна замкнена множина, що притягує всі точки з деякого свого околу. Наведено умови існування стійких циклів $\gamma_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ всіх натуральних періодів $n = 1, 2, \dots$ та умови існування стійких циклів інтервалів $\Gamma_n = \{I_1, \dots, I_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Описано біфуркації даних циклів при зміні параметрів l і p , що суттєво відрізняються від біфуркацій в гладкому випадку, а саме: при втраті стійкості циклу γ_n відбувається біфуркація подвоєння, в результаті якої народжується не точковий, а інтервальный цикл подвоєного періоду $\Gamma_{n,2n}$ з хаотичною поведінкою траєкторій на елементах циклу. Потім відбувається зворотня біфуркація подвоєння: інтервали ю $\Gamma_{n,2n}$ попарно зливаються і народжується цикл інтервалів $\Gamma_{n,n}$. Нарешті, в результаті наступної біфуркації всі інтервали ю $\Gamma_{n,n}$ зливаються в цикл інтервалів періоду 1 $\Gamma_{n,1} = I$. Відмінним від решти є випадок $n = 2$. В результаті втрати стійкості циклу γ_2 народжується інтервальный цикл $\Gamma_{2,2^k}$ періоду 2^k , де k може бути довільним натуральним числом, яке залежить від l і p . Наступні біфуркації полягають у попарному злитті елементів циклу. Тим самим, в загальному випадку для одновимірних кусочно-лінійних відображень з одним екстремумом має місце така послідовність біфуркацій атракторів:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow (\Gamma_{2,2^k} \Rightarrow \Gamma_{2,2^{k-1}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \Gamma_{2,2} \Rightarrow I) \Rightarrow \gamma_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\Gamma_{3,3} \Rightarrow \Gamma_{3,3} \Rightarrow I) \Rightarrow \gamma_4 \Rightarrow (\Gamma_{4,4} \Rightarrow \Gamma_{4,4} \Rightarrow I) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow (\Gamma_{n,2n} \Rightarrow \Gamma_{n,n} \Rightarrow I) \Rightarrow \gamma_{n+1} \Rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4)$$

У другому параграфі першої глави описана асимптотична поведінка розв'язків при $t \rightarrow \infty$ різницєвого рівняння (1) і наведені образи графіків

ших роов'язків. На відміну від диференціальних рівнянь, для нелінійних різницевих рівнянь типовими є роов'язки, які при $t \rightarrow \infty$ збігаються в метриці Хаусдорфа до граничних періодичних роориваних функцій. При цьому, якщо число точок рооривів на періоді у граничній функції скінченне, - це роов'язок релаксаційного типу. Гладкі обмежені роов'язки, у яких граничний узагальнений роов'язок має нескінченне число рооривів на періоді і такі, що частота їх коливань необмежено зростає разом з ростом t , називаються роов'язками турбулентного типу.

У другій главі досліджується різницеве рівняння з неперервним аргументом другого порядку

$$z(t+2) = \frac{1}{1+c} (f_{l,p}(z(t)) + f_{l,p}(\frac{c}{1+c} z(t+1))), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

де $f_{l,p}$ - кусочно-лінійна функція виду (2), $c > 0$ - параметр. Вивчається питання про поведінку роов'язків рівняння (5) при $t \rightarrow \infty$ в залежності від значень параметрів l, p і c . Поведінка роов'язків $z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ визначається поведінкою траєкторій динамічної системи, що падається відображенням

$$F_{l,p,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} cy \\ \frac{1}{1+c}(f_{l,p}(x) + f_{l,p}(y)) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Основна увага приділяється симетричному випадку ($c = 1$), коли відображення (6) має вигляд

$$F_{l,p} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}(f_{l,p}(x) + f_{l,p}(y)) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7)$$

Плщина \mathbb{R}^2 розбивається на чотири області $I_i, i = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x, y) : x \leq b, \quad y \leq b\}, \\ I_2 &= \{(x, y) : x < b, \quad y > b\}, \\ I_3 &= \{(x, y) : x > b, \quad y > b\}, \\ I_4 &= \{(x, y) : x > b, \quad y < b\}, \end{aligned}$$

де $b = 1 + 1/p$; в кожній з цих областей $F_{l,p}$ є лінійне відображення, яке позначено $F_{l,p}^{(i)}, i = \overline{1,4}$.

В першому параграфі сформульовані теореми існування та стійкості циклів періодів $n \leq 4$ відображення $F_{l,p}$.

Теорема 2.1. Відображення (7) при $(l, p) \in \Pi$ має єдину нерухому точку $(x_0, y_0) = (p/(p-1), p/(p-1))$, яка належить області I_3 . Точка

(x_0, y_0) є притягуючою, якщо $-2 < p < -1, 0 < l < 1$, і відштовхуючою, якщо $p < -2, 0 < l < 1$.

Теорема 2.2. Відображення (7) не має циклів періоду 2 ні при яких $(l, p) \in \Pi$.

Теорема 2.3. Для відображення (7) при $p = -2, 0 < l < 1$ кожна точка області $G = \{(x, y) : x \geq 1/2, 1/2 \leq y \leq -x + 3/2\}$, крім нерухомої, є періодичною періоду 3, а всі інші точки $(x, y) \notin G$ потрапляють в область G за скінченне число ітерацій $N = N(x, y)$.

Теорема 2.4. При $p < -2, 0 < l < 1$ відображення (7) має два цикли періоду 3:

$$\gamma_3^i = \{(x_i, x_i), (x_i, f_{l,p}(x_i)), (f_{l,p}(x_i), x_i)\}, \quad i = 1, 2,$$

$$x_1 = 1 - \frac{l+p+lp}{p(2-l-lp)}, \quad x_2 = 1 - \frac{l+p+lp}{p(2-p-lp)}.$$

При цьому цикл γ_3^1 є притягуючим, якщо $-l/2 - 2/l < p < -2, 0 < l < 1$, і сідловим, якщо $p < -l/2 - 2/l, 0 < l < 1$; цикл γ_3^2 є сідловим при всіх $p < -2, 0 < l < 1$. Інших циклів періоду 3 відображення (7) не має.

Теорема 2.5. Відображення (7) стійких циклів періоду 4 не має.

Другий параграф є дономіжним. Виписано розв'язок рівнянцевого рівняння другого порядку

$$d_n = m(d_{n-1} + d_{n-2}), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

в початковими умовами

$$d_0 = 0, \quad d_1 = m, \quad (9)$$

де m - деяке дійсне число. Розв'язок рівняння (8) в початковими умовами (9) записується у вигляді

$$d_n = \frac{m(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

де

$$\lambda_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + m}.$$

Лема 2.1. При всіх $n = 1, 2, \dots$

$$d_{n-1}d_{n+1} - d_n^2 = (-1)^n m^{n+1}, \quad (11)$$

де d_n - розв'язок різницевого рівняння (8) з початковими умовами (9).

Як наслідок із леми 2.1, справедлива формула

$$d_{n-1}d_{n-2} - d_n d_{n-3} = (-1)^{n-1} m^n, \quad n = 3, 4, \dots \quad (12)$$

В третьому параграфі досліджується цикл періоду n , $n \geq 3$, відображення (7) $\gamma_n = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), \dots, (y_n, y_1)\}$ такий, що

$$(y_1, y_2) \in I_2; \quad (y_2, y_3) \in I_4; \quad (y_3, y_4), (y_4, y_5), \dots, (y_n, y_1) \in I_1. \quad (13)$$

У площині параметрів (l, p) одержано умови існування та стійкості циклів періодів n виду (13) відображення (7), що сформульовані у вигляді двох теорем. Введено позначення:

$$\frac{l}{2} = m, \quad \frac{p}{2} = q.$$

Теорема 2.6. Крива (S, n) втрати стійкості циклу періоду n виду (13) відображення (7) є

$$q = -\frac{m^2(1 + d_{n-1})}{d_{n+1} + (-1)^n m^{n+1}}, \quad m \in (0, 1/2), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (14)$$

де d_n - розв'язок різницевого рівняння (8) з початковими умовами (9).

При народженні циклу γ_n точка (y_1, y_2) лежить на прямій $x = b$, тобто $y_1 = b$, тому для знаходження кривої (E, n) народження циклу γ_n , маємо співвідношення

$$F_{l,p}^{(1)n-2} \left(F_{l,p}^{(4)}(F_{l,p}^{(2)}(b, y_2)) \right) = (b, y_2). \quad (15)$$

Теорема 2.7. Крива (E, n) народження циклу періоду n виду (13) відображення (7) є

$$q = \frac{d_n + m d_{n-1} - m}{d_{n-2} - d_n - m^n (-1)^{n-1}}, \quad m \in (0, 1/2), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

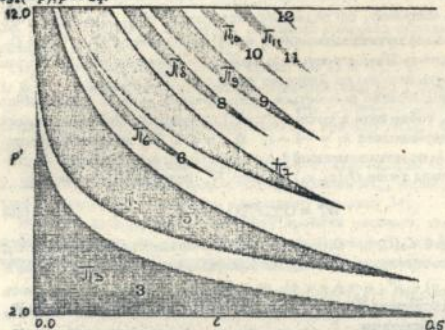
де d_n - розв'язок різницевого рівняння (8) з початковими умовами (9).

Таким чином, одержано точний аналітичний вираз для границь області існування притягуючого циклу періоду n виду (13) відображення (7):

$$P_n = \{(m, q) : 0 < m < \frac{1}{2}, \frac{d_n + m d_{n-1} - m}{d_{n-2} - d_n - m^n (-1)^{n-1}} < q < -\frac{m^2(d_{n-1} + 1)}{d_{n+1} + (-1)^n m^{n+1}}\} \quad (17)$$

где $n = 3, 5, 6, \dots$

На малюнку показані області Π_n в площині параметрів $l = 2m$ і $p' = \log_2(-p)$, $p = 2q$.



У четвертому параграфі досліджується питання про існування та структуру хаотичних атракторів динамічної системи, що породжується відображенням $F_{l,p}$ у випадку, коли $(l, p) \notin \Pi_n$, $n = 3, 5, 6, \dots$. Дослідження проведено з використанням обчислювального експерименту та машинної графіки. При перетині кривої (S, n) точкою (l, p) , цикл γ_n втрачає стійкість таким чином, що один з мультиплікаторів циклу проходить через -1 . Детальне дослідження структури притягуючої множини, що народжується в результаті цієї біфуркації, проведено у випадку $n = 3$.

Теорема 2.8. При $(l, p) \in (S, 3)$ аттрактором динамічної системи, що породжується відображенням $F_{l,p}$, є цикл відрізків періоду 3: $\{[A_0^*, B_0^*], F_{l,p}([A_0^*, B_0^*]), F_{l,p}^2([A_0^*, B_0^*])\}$, що притягує до себе всі точки з R^2 , крім точок множини Жюліа. Кожна точка відрізків $[A_0^*, B_0^*]$, $F_{l,p}[A_0^*, B_0^*]$, $F_{l,p}^2([A_0^*, B_0^*])$, крім точок циклу γ_3 , є періодичною періоду 6 відображення $F_{l,p}$.

У формулюванні цієї теореми використані такі позначення та по-

$$[A_0^*, B_0^*] \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathcal{L}_1^*(l, p) : (x, y) \in I_1, F_{l,p}^3(x, y) \in I_1\}, \quad (18)$$

де $\mathcal{L}_1^*(l, p)$ - пряма, що проходить через точку $O_1(x_1, x_1)$, паралельна власному напрямку, що задається вектором $\vec{q}_1 = (1, (2+l)/(2-l))$, яке відповідає мультиплікатору $\lambda_1^* = -1$ відображення $F_{l,p}^3$ в точці O_1 . Під множиною Жюліа розуміємо замкнення множини точок з R^2 , що породжують нестійкі по Ляпунову траєкторії. $\{F_{l,p}^n(x, y)\}_{n=1}^\infty$.

Ситуація істотно змінюється, якщо точка (l, p) мине біфуркаційне означення, тобто коли в точці $O_1(x_1, x_1)$ мультиплікатор відображення $F_{l,p}^3$ буде дорівнювати $\lambda_1 = -1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Так як другий мультиплікатор λ_2 по модулю менший 1, то точка $O_1(x_1, x_1)$ є сідловою. Нестійкий многовид точки $O_1(x_1, x_1)$ під дією $F_{l,p}^3$ - неперервна ламана виду

$$W_1^n = \cup_{n=0}^\infty F_{l,p}^{3n}([A_0, B_0]), \quad (19)$$

де $[A_0, B_0] \in \mathcal{L}_1(l, p)$, $\mathcal{L}_1(l, p)$ - пряма, що проходить через точку O_1 , паралельно власному напрямку, що відповідає мультиплікатору λ_1 ; $B_0 \in B_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in R^2 : y = b, x < b\}$, $A_0 = F_{l,p}^3(B_0)$. Відрізки, що складають нестійкий многовид W_1^n , можуть перетинатися, так як відображення $F_{l,p}$ неволаємнооднозначне.

Позначимо

$$\mathcal{M}_1 = \overline{W_1^n} \setminus W_1^n, \quad \mathcal{M}_2 = F_{l,p}(\mathcal{M}_1), \quad \mathcal{M}_3 = F_{l,p}^2(\mathcal{M}_1).$$

Теорема 2.9 При означеннях параметрів l і p таких, що $\lambda_1 = -1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, множина $\mathcal{M}_{2,3,2}$ = $\cup_{i=1}^3 \mathcal{M}_i$ є хаотичний атрактор динамічної системи, що породжується відображенням $F_{l,p}$, причому $\mathcal{M}_{2,3,2}$ є цикл множини періоду $3 \cdot 2^k$, де k може бути довільним натуральним числом, в залежності від l і p .

При подальшій зміні параметрів цикл множини $\mathcal{M}_{2,3,2}$ періоду $3 \cdot 2^k$ біфуркує в цикл множини $\mathcal{M}_{2,3,2^{k-1}}$ періоду $3 \cdot 2^{k-1}$ і т. д., поки не виникне деяка однооз'язна притягуюча множина $\mathcal{M}_{2,1}$. Описано структуру елементів циклу множини $\mathcal{M}_{2,3,2}$ на прикладі випадку $k = 1$: $\mathcal{M}_{2,3,2} = \{\mathcal{M}_{1,1}, \mathcal{M}_{2,1}, \mathcal{M}_{3,1}, \mathcal{M}_{1,2}, \mathcal{M}_{2,2}, \mathcal{M}_{3,2}\}$, $\mathcal{M}_{i,1} \cup \mathcal{M}_{i,2} = \mathcal{M}_i$, $i = \overline{1, 3}$. Топологічно кожна множина $\mathcal{M}_{i,j}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 2}$, являє собою неперервну ламалу з канторовою множиною точок самоперетину, що складається з "канторової множини відрізків" (якщо розглянути будь-яку сітку цієї

множини, то множина точок перетину є ніде не щільною множиною, що містить канторову підмножину).

Досліджено загальний випадок $n = 5, 6, \dots$, для якого введено позначення

$M_i = F_{l,p}^{-1}(W_{l,n}^n \setminus W_{l,n}^n)$, где $W_{l,n}^n$ - нестійкий многовид будь-якої точки циклу γ_n , $n = 5, 6, \dots$ під дією $F_{l,p}^n$.

При означеннях параметрів l, p таких, що $\lambda_1 = -1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, де λ_1 - один з мультиплікаторів відображення $F_{l,p}^n$ у точці шклу γ_n , $n = 5, 6, \dots$, множина $M_{n,2n} = \bigcup_{i=1}^n M_i$ є атрактор динамічної системи, що породжується відображенням $F_{l,p}$, причому $M_{n,2n}$ - цикл множини періоду $2n$.

При подальшій зміні параметрів, елементи шклу множини $M_{n,2n}$ періоду $2n$ попарно зливаються, утворюючи цикл множини $M_{n,n}$ періоду n , після чого зливаються в одноув'язну притягуючу множину $M_{n,1}$.

Проведні дослідження дають змогу зробити висновок, що для динамічної системи, що породжується відображенням $F_{l,p}$, в загальному випадку має місце така послідовність біфуркацій атракторів:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\Rightarrow \gamma_3 \Rightarrow (M_{3,3,2} \Rightarrow M_{3,3,2^{-1}} \Rightarrow \dots \Rightarrow M_{3,3} \Rightarrow M_{3,1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_5 \Rightarrow (M_{5,5,2} \Rightarrow M_{5,5} \Rightarrow M_{5,1}) \Rightarrow \gamma_6 \Rightarrow (M_{6,6,2} \Rightarrow M_{6,6} \Rightarrow M_{6,1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow (M_{n,2n} \Rightarrow M_{n,n} \Rightarrow M_{n,1}) \Rightarrow \gamma_{n+1} \Rightarrow \dots, \end{aligned}$$

де k може бути будь-яким натуральним числом, що залежить від l, p .

В п'ятому параграфі наведені деякі аналітичні та чисельні результати для несиметричного випадку ($c \neq 1$), коли відображення, що вивчається, має вигляд (6). Як і в симетричному випадку, біфуркація втрати стійкості циклу γ_n має наслідком народження притягуючого циклу M хаотичних множини подвоєного періоду $2n$. Встановлено, що структура елементів циклу M визначається значеннями мультиплікаторів μ'_1, μ'_2 відображення $F_{l,p,c}^{2n}$ в деякому околі напівпрямої $B_0 = \{x < b, y = b\}$. Мають місце три можливості: 1) якщо $|\mu'_1| < 1, |\mu'_2| < 1$, то відбувається звичайна біфуркація подвоєння періоду $\gamma_n \Rightarrow \gamma_{2n}$, і множина M є цикл подвоєного періоду $2n$; 2) якщо $|\mu'_1| < 1, |\mu'_2| > 1$, то структура елементів циклу M аналогічна симетричному випадку: елементи циклу M це множини типу странного атрактору; 3) у випадку, коли $|\mu'_1| > 1$ і $|\mu'_2| > 1$, структура елементів циклу M буде іншою: кожен елемент циклу M є так звана хаотична область (містить відкриту підмножину із R^2).

У шостому параграфі другої глави наведені приклади графіків розв'язків різнищевого рівняння (5) в залежності від значень параметрів t, p і c .

У третій главі досліджується різнищеве рівняння другого порядку з неперервним аргументом

$$z(t+2) = \frac{1}{1+c} (f_a(z(t)) + f_a(\frac{c}{1+c} z(t+1))), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (20)$$

де $f_a(x) = ax(1-x)$, $a > 0, c > 0$. Поведінка розв'язків $z(t)$ рівняння (20) при $t \rightarrow \infty$ визначається поведінкою траєкторій динамічної системи, що задається відображенням

$$F_{a,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} cy \\ \frac{1}{1+c} (f_a(x) + f_a(y)) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (21)$$

У першому параграфі досліджено питання про стійкість та біфуркації нерухомої точки (x_0, y_0) відображення (21) в залежності від значень параметрів a і c . В площині параметрів одержано точний аналітичний вираз для кривої втрати стійкості точки (x_0, y_0) (теорема 3.1), при перетині якої відбуваються такі біфуркації: 1) якщо $c \in [0, c_0)$, то відбувається біфуркація подвоєння нерухомої точки (x_0, y_0) ; 2) якщо $c \in [c_0, \infty)$, то при відсутності сильного резонансу (1:2, 1:3 або 1:4), має місце біфуркація народження інваріантної кривої з раціональним або ірраціональним числом обертання. При наявності сильного резонансу маємо "жорстку" втрату стійкості нерухомої точки. Резонансний випадок 1:3 розглянуто детально - він має місце при $c = 1$.

У другому параграфі вивчені перебудови фазового портрету динамічної системи в симетричному випадку ($c = 1$), коли відображення $F_{a,c}$ має вигляд

$$F_a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2} (f_a(x) + f_a(y)) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (22)$$

Теорема 3.2. Відображення F_a має дві нерухомі точки $(x_0, y_0) = (1 - 1/a, 1 - 1/a)$ і $(x'_0, y'_0) = (0, 0)$. Точка (x_0, y_0) є притягуючою при $1 < a < 4$ і відштовхуючою при $a > 4$; точка (x'_0, y'_0) є відштовхуючою при $a > 1/3$.

Теорема 3.3. Відображення F_a при $a > 1 + 2\sqrt{2}$ має два цикли періоду 3:

$$\gamma_i^a = \{(x_i, z_i), (z_i, f_a(x_i)), (f_a(x_i), z_i)\}, \quad i = 1, 2,$$

$$x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 7}}{2a}$$

Цикл γ_3^1 притягуючий при $1 + 2\sqrt{2} < a < a^*$ і сідловий при $a > a^*$; цикл γ_3^2 сідловий при $a > 1 + 2\sqrt{2}$. Інших циклів періоду 3 відображення F_a не має.

З теорем 3.2 і 3.3 випливає, що при $1 + 2\sqrt{2} < a < 4$ для відображення F_a має місце мультистабільність: аттракторами системи є нерухома точка (x_0, y_0) і цикл γ_3^1 періоду 3.

Обчислювальний експеримент свідчить, що подальше ускладнення фазового портрету при збільшенні значення параметру a йде через каскад біфуркацій подвоєння циклу з подальшим утворенням хаотичного або регулярного атрактора. Перша біфуркація подвоєння періоду циклу має місце при $a = a^* \approx 4.18$.

Механізм біфуркацій подвоєння є одновимірним в тому розумінні, що реалізується на деякому одновимірному многовиді. Це має місце завдяки невзаємнооднозначності відображення, в силу чого зміна одного із мультиплікаторів циклу від 1 (при народження) до -1 (при втраті стійкості) може не супроводжуватися виходом мультиплікаторів у комплексну площину, що обов'язково буде для дифеоморфізмів.

У третьому параграфі наводяться приклади графіків розв'язків різнищового рівняння в залежності від значень параметрів a і c .

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сорока І.А., Сушко І.М. Динаміка решених різницевих рівнянь з двома відхиленнями // Теор. II Всесоюз. конф. "Нелинейные колебания механических систем", Горький, 11-13 сент. 1990 г.-Горький, 1990. - С. 103-104.
2. Maistrenko V.L., Maistrenko Yu.L., Soroka I.A., Sushko I.M. Dynamics of the nonlinear difference equations with two deviation // Abstracts of the XII Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations.-Cracow, 2-7th September, 1990.-P. 97-98.
3. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко І.М. Об одном неавтономном отображении плоскости, возникающем в радиофизике. - Киев, 1992. - 34 с. - (Препр./АН Украины. Ин-т математики; 92.2).
4. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко І.М. Аттракторы кусочнолинейных отображений прямой и плоскости. - Киев, 1992. - 55 с. - (Препр. /АН Украины. Ин-т математики; 92.33).

Підп. до друк. 28.12.92. Формат 60*84 /16. Папір друк. Офс. друк.
Умов. друк. арх. 0.7 Умов. фабр.-відб. 0.7 Обл.- вид. арх. 0.5 Тираж
100прим.Зах. 424 Безкоштовно

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України.
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

1.09428

AB 26.439