

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ЧЕРНЫШОВ Кармель Исидорович

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ С
ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1992

ДВ 26.447

Работа выполнена на кафедре математики Воронежского ордена
Дружбы народов лесотехнического института

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ВАСИЛЬЕВА А.В.
доктор физико-математических наук,
профессор ~~СТЫГН~~ В.В. КАЩЕНКО С.А.
доктор физико-математических наук,
профессор ТУРНИН А.Ф.

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН

Защита диссертации состоится " 2 " марта 1993 года
в 1500 часов на заседании специализированного совета
Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу:
252601 Киев - 4, ГСП, ул. Релина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан " 27 " марта 1993 года

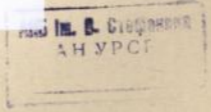
Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук

ЛУЧКА А.Б.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00814479 (X)



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение объектов различной природы, совершающих одновременно разнотемповые движения, приводит к возникновению сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных). При нулевом значении малого параметра ϵ , входящего в уравнение, порядок уравнения понижается. Такие уравнения встречаются, например, в гидродинамике, теории электрических цепей, химической кинетике, теории управления. В диссертационной работе исследуется уравнение в банаховом пространстве с неограниченным оператором, содержащим параметр ϵ , при производной, чтобы иметь возможность включить в рассматриваемый круг задач одновременно обыкновенные уравнения и некоторые классы уравнений с частными производными. Решение вырожденного при $\epsilon = 0$ уравнения не может удовлетворить всем дополнительным (начальным, граничным) условиям, поставленным для решения исходного уравнения. Поэтому для адекватного описания его поведения необходимо, наряду с решением вырожденного уравнения, привлекать поправку к нему. Таким образом, весьма актуальной становится проблема построения асимптотическими методами приближенного решения задачи Коши для исходного уравнения с любой заданной степенью точности.

В создании теории линейных или нелинейных сингулярно возмущенных систем, а также уравнений с малым параметром при производной, которые иногда записывают в форме уравнений с большим параметром в правой части или уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, большой вклад внесли *J. D. Birkhoff*, Я.Д. Тенаркии, *W. J. Trjitzinsky*, В.С. Пугачев, М.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, А.Н. Тихонов, И.С. Градштейн, В.А. Митропольский, Н.И. Шиль, С.Ф. Фенченко, Н.Н. Моисеев, С.Г. Крейн, С.Л. Далецкий, М.И. Вилинг, Л.А.

Достерниц, В.П. Маслов, И.В. Федорки, В.И. Бабич, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, А.И. Повзнер, И.М. Рапопорт, А.М. Самойленко, С.А. Ломов, А.Н. Филатов, А.М. Ильин, В.В. Стригин, В.А. Треногин, А.Г. Елисеев, А.Ф. Турбин, И.И. Старун, X. L. Turritin, W. Wasow и другие. Как правило, в большинстве работ разрабатывается конкретный асимптотический метод, используемый затем в приложениях из различных областей науки и техники. В то же время при качественном исследовании систем важную роль играют методы, применение которых понижает размерность систем, приводит к редукции задачи. Сочетание проблемы повышения точности расчета сложных моделей с одновременным снижением объема вычислений делает актуальным построение асимптотических разложений (а.р.) решений сингулярно возмущенных систем методами способными расщеплять эти системы.

Предлагаемые в диссертационной работе методы расщепления системы, эквивалентной исходному уравнению, на независимые уравнения в подпространствах, а также расщепления в стандартном базисе конечномерного уравнения с параметром ε при производной, заданного в собственном или корневом подпространстве предельного оператора, основываются на геометрическом подходе к анализу таких систем. Этот подход включает в себя элементы асимптотического и качественного анализа, базирующегося на серии специальных операторных преобразований.

Ц е л ь р а б о т ы состоит в создании метода и разработке алгоритма построения а.р. решения задачи Коши как для линейного уравнения с фредгольмовым оператором индекса нуль при производной, зависящим от параметра ε и действующим из одного банахова пространства в другое, так и для линейного уравнения (конечномерного или бесконечномерного) с некоторой степенью параметра ε при производной. Изучены случаи простого и кратного спектра предельного оператора при различных степенях вырождения структурной матрицы.

Получены конструктивные критерии определения порядков сингулярностей и асимптотических последовательностей, по которым ведется построение а.р. решений.

М е т о д ы и с с л е д о в а н и я. В работе находят применение операторные методы линейной теории возмущений, элементы геометрической теории дифференциальных уравнений, а также асимптотические методы интегрирования систем, содержащих малые параметры при производных.

Н а у ч н а я н о в и з н а заключается в выборе объекта и предложенном методе его исследования. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми.

1. Линейное уравнение с предгольмовым оператором индекса нуль при производной, линейно зависящим от малого параметра ε и действующим из одного банахова пространства в другое, сводится к эквивалентной системе независимых уравнений, одно из которых регулярно зависит от ε и является бесконечномерным, а остальные (конечномерные или бесконечномерные) уравнения содержат различные степени ε при производных.

2. Предложен метод перестройки и расщепления матричного пучка, голоморфно зависящего от ε , на основе построенного числения однодиагональных матриц, взаимосвязи этих матриц с известным преобразованием срезания, а также использования различных типов преобразований подобия, в частности, преобразования с обобщенной матрицей Вандермонда.

3. Разработан метод построения а.р. общего решения или решения задачи Коши для уравнения с малым параметром ε при производной, позволяющий с единых позиций изучать случаи простого или кратного спектра предельного оператора. Случай простого спектра распространен на уравнение в банаховом пространстве с базисом, эквивалентным ортонормированному. Случай кратного спектра исследуется в конечно-

ном пространстве при различных степенях вырождения структурной матрицы. Наряду с каноническими случаями отсутствия или слабого вырождения впервые изучаются случаи сильного вырождения, которые, в свою очередь, подразделяются на случай общего положения и критические случаи. В случае общего положения предлагается механизм редукции задачи, сведения ее к аналогичной задаче в подпространстве меньшей размерности. В критических случаях выделены ситуации, когда за счет перестройки пучка без дальнейшего его расщепления новая структурная матрица становится невырожденной или слабо вырожденной.

4. Строится а.р. решения задачи Коши как в случае общего положения, так и в критических случаях, когда относительно главного члена возмущения кратного собственного значения формируются алгебраические разрешающие уравнения с нулевыми кратными корнями.

Теоретическая и практическая ценность работы. Предложенный в диссертационной работе метод позволяет строить с любой заданной степенью точности приближенные решения задач Коши для уравнений с фредгольмовым оператором индекса нуль при производной, линейно зависящим от малого параметра ϵ и действующим из одного банахова пространства в другое, с малым параметром при производной, с большим параметром в правой части, с медленно меняющимися коэффициентами. Полученные результаты применимы к решению некоторых прикладных задач механики сплошной среды.

А п р о б а ц и я р а б о т ы. Основные результаты диссертации докладывались на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1981), на Международной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений (Сегед, 1988), на 7 - я Международной конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям (Прага, 1989), на Всесоюзных конференциях и семинарах "Метод функции Ляпунова и его приложения" (Иркутск, 1985), "Мето-

ды малого параметра" (Нальчик, 1987), "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (Тернополь, 1989), на Всесоюзных школах по теории операторов в функциональных пространствах (Новосибирск, 1985; Куйбышев, 1988), на Крымских осенних математических школах (Симферополь, 1990, 1991), на семинарах лаборатории математических проблем геофизики ЛОМИ АН СССР (Ленинград, 1989), кафедры математики физического факультета МГУ (1990), кафедры спецкурсов математики МЭИ (1991), отдела дифференциальных уравнений в частных производных Института математики АН Украины (1991), кафедры нелинейных колебаний ВГУ (1989), кафедры математики Воронежского лесотехнического института (1987-1992).

Л и ч н ы й в к л а д и п у б л и к а ц и и. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в работах [1 - 16]. В диссертационную работу включены только те результаты, изложенные в [2 - 4], которые принадлежат лично автору.

О б ъ е м и с т р у к т у р а р а б о т ы. Диссертация изложена на 304 страницах и состоит из введения, 4 глав, содержащих 20 параграфов, списка литературы из 135 наименований.

Нумерация формул сквозная внутри введения и каждой главы. Нумерация теорем, лем и замечаний двойная, где первым указан номер параграфа, а затем через точку порядковый номер утверждения. В автореферате используется нумерация утверждений из диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении делается обзор литературы, посвященной сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям, различным методам и используемому аппарату их исследования. Обосновывается актуальность темы и кратко излагается содержание работы.

Первая глава, состоящая из II параграфов, содержит основы операторно-матричного аппарата, применяемого в дальнейшем к уравнениям

с фредгольмовым оператором, содержащим малый параметр (ε , в частности, с оператором умножения на малый параметр) при производной. В § I вводится линейный операторный пучок $A + \varepsilon B$, где A действует из банахова пространства $E^{(1)}$ в банахово пространство $E^{(2)}$ и является линейным замкнутым фредгольмовым оператором индекса нуль с плотной в $E^{(1)}$ областью определения, а B — линейный оператор, подчиненный оператору A , например, ограниченно действующий из $E^{(1)}$ в $E^{(2)}$. Предполагается, что оператор $A + \varepsilon B$ регулярен, т.е. операторный пучок $A + \varepsilon B$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет ограниченную резольвенту $(A + \varepsilon B)^{-1}$, определенную на всем $E^{(2)}$. Подробное изучение структуры корневого подпространства пучка $A + \varepsilon B$ позволяет получить и использовать формулу для резольвенты. В другой ситуации формула для резольвенты пучка была получена Я.Д. Плоткиным, А.Ф. Турбинным.

Основным объектом исследования в диссертационной работе является линейное дифференциальное уравнение (ДУ)

$$(A + \varepsilon B) \dot{x} = C(t)x + h(t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

с оператор-функцией $C(t)$, зависящей от переменной t и действующей из $E^{(1)}$ в $E^{(2)}$, и с вектор-функцией $h(t, \varepsilon)$, принимающей значения в $E^{(2)}$ и регулярно зависящей от малого параметра ε . В явном предположении уравнение (1) записывается в виде эквивалентной системы

$$\dot{u}_0 = \sum_{i=0}^n A_{0i}(t, \varepsilon) u_i + g_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{r=1}^n B_{0r}(\varepsilon) \dot{u}_r, \quad (2)$$

$$\varepsilon \dot{u}_k = \sum_{i=0}^n A_{ki}(t, \varepsilon) u_i + g_k(t, \varepsilon), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3)$$

в которой $0 = P_n < P_{n-1} < \dots < P_1 < P_0$, все оператор-функции $A_{ki}(t, \varepsilon)$, $B_{0r}(\varepsilon)$ и вектор-функции $g_k(t, \varepsilon)$ регулярно зависят от ε . Компоненты u_i при $0 \leq i \leq n$ лежат во взаимно

дополнительных подпространств, причем $u_k \in \text{Ker } A$, а u_0 принадлежит специальным образом выбираемому прямому дополнению $E_{\infty-m}$ до $\text{Ker } A$ в $E^{(1)}$.

В § 2 предлагается алгоритм, расщепляющий (2), (3) на $n+1$ независимых уравнений. В конечномерном случае при отсутствии последней группы слагаемых в (2) и при $k=1$ в (3) аналогичные преобразования ранее использовали О'Молли, Соболев В.А.

Вначале изучается вспомогательная система из $j+1$ уравнений. В теореме 2.1 устанавливается, что непрерывная дифференцируемость по t всех ее коэффициентов и правых частей, а также обратимость при $\varepsilon=0$ и всех $0 \leq t \leq T$ коэффициента, стоящего в $(j+1)$ -м уравнении при неизвестной с наибольшим индексом j , дает возможность при достаточно малых ε перейти к эквивалентной системе с независимым $(j+1)$ -м уравнением. При этом структура первых j уравнений совпадает со структурой исходной системы при замене индекса j на $j-1$. Для применения полученного результата к (2), (3) рассматривается матрица $\mathcal{A}(t)$, составленная из операторных коэффициентов $A_{ki}(t,0)$ системы (2), (3). Предполагается, что выполнены два условия:

- 1°) оператор-функция $C(t)$ и вектор-функция $h(t,\varepsilon)$ в (1) непрерывно дифференцируемы по t ;
- 2°) матрица $\mathcal{A}(t)$, составленная из операторов $A_{ki}(t,0)$, приводима преобразованием Гаусса (см. [3]) к нижнетреугольному виду, причем оператор-функции $\Lambda_{jj}^{(j+1)}(t,0)$, стоящие на диагонали, обратимы при $1 \leq j \leq n$ и всех $0 \leq t \leq T$.

Теорема 2.2. При выполнении условий 1°) и 2°) существует такие регулярные по ε замены искоемых функций, что уравнение (1) (или система (2), (3)) при достаточно малых ε принимает форму эквивалентной системы

$$\dot{v}_0 = \mathcal{D}_0(t, \varepsilon) v_0 + d_0(t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\varepsilon^{p_{n-j}} \dot{v}_j = \mathcal{D}_j(t, \varepsilon) v_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (5)$$

из $n+1$ независимых уравнений с оператор-функциями $\mathcal{D}_j(t, \varepsilon) = A_{jj}^{(j+1)}(t, 0) + O(\varepsilon)$, $0 \leq j \leq n$.

Если дополнительно к 1^o, 2^o потребовать, чтобы матрица $A(t)$ была устойчивой, т.е. спектр операторов $A_{jj}^{(j+1)}(t, 0)$, $1 \leq j \leq n$, лежал внутри левой полуплоскости, то для любого δ , $0 < \delta < T$, получается оценка

$$\max_{\delta \leq t \leq T} \|\dot{u}_0\| < c(\delta) \sum_{j=0}^n \|u_j^0\|.$$

Постоянная $c(\delta)$ при $0 < \delta \leq T$ не зависит от ε . Если же $\delta = 0$, то оценка также справедлива, но $c(0)$ зависит от ε и стремится к $+\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

В параграфах 3, 4 строятся обратные матрицы преобразований подобия, а также обратные к ним матрицы. При вычислении их элементов используются следствия соотношений между корнями степени n , $n \geq 2$ из единицы. Если $\gamma(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то корнями уравнения $q^n + \gamma(t) = 0$, $n \geq 2$, служат n различных скалярных функций

$$q_j(t) = \sqrt[n]{-\gamma(t)} \exp(2\pi j \sqrt{-1} / n), \quad 1 \leq j \leq n,$$

удовлетворяющих соотношениям

$$q_j^n(t) = -\gamma(t) \neq 0, \quad \dot{q}_j(t) / q_j(t) = \dot{\gamma}(t) / (n\gamma(t)), \quad 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{j=1}^n (q_k / q_r)^j = 0, \quad 1 \leq |k-r| \leq n-1; \quad \sum_{j=1}^n q_j^p = 0, \quad 1 \leq |p| \leq n-1. \quad (6)$$

Вводятся в рассмотрение вектор-строки и вектор-столбцы

$$\chi_i(t) = (q_1^i(t), \dots, q_n^i(t)), \quad \theta_i(t) = \text{col}(q_1^i(t), \dots, q_n^i(t)), \quad i \in Z. \quad (7)$$

Через E обозначается подпространство размерности m , $m < n$ пространства $E^{(n)}$. Кроме того, $m_1 = m - n$, e_j - орт в E с единицей на j -м месте. Строится матрица $\Phi^{(n)}(t)$, являющаяся обобщением матрицы Вандермонда. Ее столбцами служат орты e_r , $1 \leq r \leq m_1$, а также векторы $\omega_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, вида

$$\omega_j(t) = \text{col} \left(1, q_j(t), q_j^2(t), \dots, q_j^{m-1}(t) \right), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

При $n=m$, $m_1=0$ матрица $\Phi^{(n)}(t)$ равна $U(t)$. Предполагается, что

$$1 \leq s \leq m, \text{ или } 0 < m_1 < (m-1)/2, \quad (9)$$

где $s = n - m_1 = 2n - m = m - 2m_1$. При выполнении условия (9)

$$(\Phi^{(n)}(t))^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & \frac{1}{\gamma(t)} I \\ 0 & (\Phi^{(n)}(t))_{22}^{-1} & \end{pmatrix}, \quad (\Phi^{(n)}(t))_{22}^{-1} = \frac{1}{n} (\theta_{-m_1}(t) \dots \theta_{1-m}(t)), \quad (10)$$

причем единичные матрицы имеют порядки $m_1 \times m_1$, а нулевые - $m_1 \times s$, $n \times m_1$. В § 4 строятся обратимые матрицы иной природы. Наряду с $\omega_j(t)$ из (8) вводится векторы $\partial \omega_j / \partial q_j$, $\partial^2 \omega_j / (2 \partial q_j^2)$, $1 \leq j \leq n$. Матрица $\Phi^{(n)}(t)$ строится в следующих ситуациях: $\Phi^{(n)}(t)$ состоит из k пар столбцов ($2k = m$) ω_j , $\partial \omega_j / \partial q_j$; столбцами $\Phi^{(n)}(t)$ служат вектор e_1 и k пар столбцов ($2k = m - 1$) ω_j , $\partial \omega_j / \partial q_j$; $\Phi^{(n)}(t)$ состоит из k троек столбцов ($3k = m$) ω_j , $\partial \omega_j / \partial q_j$, $\partial^2 \omega_j / (2 \partial q_j^2)$; столбцами $\Phi^{(n)}(t)$ являются вектор e_1 и k троек столбцов ($3k = m - 1$) ω_j , $\partial \omega_j / \partial q_j$, $\partial^2 \omega_j / (2 \partial q_j^2)$. Во всех этих ситуациях указаны формулы для вычисления элементов матрицы $(\Phi^{(n)}(t))^{-1}$.

Через $\text{Span}(e_j)$ обозначается линейная оболочка вектора e_j , через P_j - проектор из E на $\text{Span}(e_j)$, $1 \leq j \leq m$. Кроме

$$P = \sum_{j=1}^{m_1} P_j, \quad I - P = \sum_{j=m_1+1}^m P_j,$$

$$Q(t) = \text{diag} (q_1(t), \dots, q_n(t)), \quad \mathcal{L}_j(t) = Q(t) - q_{jj}(t)I, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{II})$$

Матрица $\mathcal{L}_j(t)$ действует в $(I - P)E$ и имеет n различных собственных значений, одно из которых равно нулю. Полагается $\hat{\mathcal{L}}_j = \mathcal{L}_j \uparrow \text{Im } \mathcal{L}_j \uparrow$ - сужение, $\mathcal{H}_j(t) = \hat{\mathcal{L}}_j^{-1}(t)(I - P - P_{m_1+j})$.

Лемма 3.9. Уравнение $\mathcal{L}_j(t)u = v$ в $(I - P)E$ эквивалентно системе $P_{m_1+j}v = 0, \quad u = P_{m_1+j}u + \mathcal{H}_j(t)v, \quad 1 \leq j \leq n.$

Матрица $\mathcal{L}_j(t)$ фигурирует в дальнейшем в роли оператора различных итерационных процедур.

В § 5 рассматривается m^2 - мерное пространство \mathcal{H} вещественных матриц порядка $m \times m$, зависящих от переменной t , $0 \leq t \leq T$. Конструируется базис в \mathcal{H} , устанавливается справедливость логарифмического закона для произведения или коммутатора двух базисных элементов.

Элемент матрицы $X(t)$ из \mathcal{H} , стоящий в r -й строке, ℓ -й столбце, обозначается через $x_{\ell,r}(t)$ (обычно обозначают $x_{r,\ell}(t)$) и матрица $X(t)$ представляется как сумма однодиагональных матриц $X_i(t)$, $1 - m \leq i \leq m - 1$. Элементами $X_i(t)$ являются $x_{\ell,r}(t)$ с $\ell - r = i$. Вследствие логарифмического закона для базисных элементов нижний индекс произведения или коммутатора двух однодиагональных матриц равен сумме нижних индексов сомножителей, причем суммарный индекс ненулевой матрицы принимает значения от $1 - m$ до $m - 1$. Сумма элементов $X_i(t)$, или ее "след", обозначается через $\gamma_i^X(t)$, $1 - m \leq i \leq m - 1$, а жорданова клетка $m \times m$, отвечающая нулевому собственному значению, через J . Рассматривается линейный оператор $K_1 = [J, \cdot]$, действующий в \mathcal{H} .

Лемма 5.5. Матрица $F(t)$ принадлежит $\text{Im } K_1$ точно тогда,

когда $\gamma_i^F(t) = 0$, $1-m \leq i \leq 0$.

Выбор подпространства $\text{Coker } K_1$ неоднозначен. Следуя схеме В.И. Арнольда, предлагается в качестве $\text{Coker } K_1$ выбрать подпространство M матриц из \mathcal{K} с ненулевыми элементами только в m -й строке.

Лемма 5.9. Матричное уравнение $K_1 X(t) = Y(t)$ разрешимо точно тогда, когда $\gamma_i^Y(t) = 0$, $1-m \leq i \leq 0$. При этом существует единственное решение $\hat{X}(t)$, обладающее свойством $\gamma_i^{\hat{X}}(t) = 0$, $0 \leq i \leq m-1$.

Пусть, например, $Y(t) = U_{1-n}^{(0)}(t) \neq 0$, где $\gamma_{1-n}^{(0)}(t) = \sum_{r=1}^{m_1+1} \sigma_{r, r+n-1}^{(0)}(t) \neq 0$ - "след" $U_{1-n}^{(0)}(t)$, $2 \leq n \leq m-1$. Условие разрешимости выполнено, поэтому существует единственное решение $\hat{X}(t) = \Omega_{-n}(t)$ с элементами

$$\rho_{r, r+n}(t) = \sum_{\ell=1}^r \sigma_{\ell, \ell+n-1}^{(0)}(t), \quad 1 \leq r \leq m_1. \quad (12)$$

В § 6 вводится преобразование матричного пучка

$$\mathcal{B}_1(t, \varepsilon) = \mathcal{Y} - \varepsilon \mathcal{A}(t) - \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r S^{(r)}(t)$$

из \mathcal{K} , где матрица $\mathcal{A}(t)$ называется структурной. Матрицы \mathcal{A} , $S^{(r)}$ представляются в виде сумм однодиагональных матриц U_i , $W_i^{(r)}$ и предполагается, что при всех $0 \leq t \leq T$

$$U_{1-m} = \dots = U_{-n} = 0, \quad U_{1-n}(t) \neq 0, \quad 2 \leq n \leq m-1.$$

Матрица $U_{1-n}(t)$ со "следом" $\gamma_{1-n}(t)$ согласно прямому разложению $\mathcal{K} = \mathcal{Jm } K_1 \dot{+} M$ единственным образом представляется в виде

$$U_{1-n}(t) = U_{1-n}^{(0)}(t) + \mathcal{D}_{1-n}(t),$$

где $\mathcal{D}_{1-n}(t)$ имеет единственный ненулевой элемент $\gamma_{1-n}(t)$, стоящий в m -й строке, (m_1+1) -м столбце, а $U_{1-n}^{(0)}(t) \in \mathcal{Jm } K_1$, ибо $\gamma_{1-n}^{(0)}(t) \equiv 0$. Если $U_{1-n}^{(0)}(t) \neq 0$, то решается уравнение $K_1 X = U_{1-n}^{(0)}$, берется $\hat{X} \equiv \Omega_{-n}$ из (12) и рассматривается матричный пучок

$$\mathcal{B}_2(t, \varepsilon) = (I + \varepsilon \Omega_{-n}(t))^{-1} \mathcal{B}_1(t, \varepsilon) (I + \varepsilon \Omega_{-n}(t))$$

подобный пучку $\mathcal{B}_1(t, \varepsilon)$ при достаточно малых ε . Формула для $\mathcal{B}_2(t, \varepsilon)$ выводится в двух ситуациях: при $1 \leq i \leq m$; при $i - m_1 \leq i \leq 0$.

Перестройку матричного пучка другим методом проводили В.Н. Богачевский, А.А. Познер.

Седьмой параграф первой главы посвящен изучению блочной структуры матриц, подобных однодиагональным матрицам $X_{i+1-n}(t)$, $-m_1 \leq i \leq n-1$ с элементами $x_{i, n-i}$, $x_{2, n-i+1}, \dots, x_{m_1, i+1, m}$ и $X_{i+1-n}(t)$, $n-1 \leq i \leq m+n-2$ с элементами $x_{i, 2-n, 1}, x_{i, 3-n, 2}, \dots, x_{m, m+n-1, i}$, когда в роли преобразования подобия поочередно выступает матрица $U(t)$ Вандермонда, ее обобщение $\Phi^{(m)}(t)$ при $m_1 = 1$, $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, а также матрицы, описанные в § 4.

Каждая из матриц подобия обозначается через $\Phi^{(m)}(t)$ и составляется матрица $\mathcal{A}^{(m)} = (\Phi^{(m)})^{-1} \dot{\Phi}^{(m)}$. Блочная структура $\mathcal{A}^{(m)}(t)$ в различных ситуациях изучается в § 8.

В § 9 устанавливается связь между однодиагональными матрицами $U_i(t)$ и известной матрицей срезания $\Lambda(\varepsilon) = \text{diag}(1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{(m-1)\nu})$, которую ввел X.L. Turrittin:

$$\Lambda^{-1}(\varepsilon) U_i(t) \Lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{i\nu} U_i(t). \quad (13)$$

Десятый параграф посвящен проблеме однозначной разрешимости уравнений с трансформатором Ляпунова, зависящим от переменной t , $0 \leq t \leq T$. Через J_1 обозначается жорданова клетка $m_1 \times m_1$ в PE типа J , а $Q(t)$ берется из (II).

Лемма Ю.И. Уравнение $J_1 X - X Q = Y$ разрешимо при любой правой части. Элементы матрицы $X(t)$ порядка $m_1 \times n$ описываются равенствами

$$x_{r,j}(t) = - \sum_{i=r}^{m_1} q_j^{r-1-i}(t) y_{i,j}(t), \quad 1 \leq r \leq m_1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Лемма 10.2. Уравнение $QX - XJ_1 = Y$ разрешимо при любой правой части. Элементы матрицы $X(t)$ порядка $n \times m_1$ описываются равенствами

$$\alpha_{j,r}(t) = \sum_{i=1}^r q_i^{i-1-r}(t) y_{j,i}(t), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq r \leq m_1.$$

Пусть теперь J_1 - жорданова клетка $k \times k$ типа J , причем $k = 2, 3$, а $Q_{\ell,j}(t) = (q_{j,\ell}(t) - q_{\ell,j}(t))I + J_1$, $\ell \neq j$. Собственные значения $Q_{\ell,j}(t)$ отличны от нуля при $0 \leq t \leq T$. Приводятся леммы 10.3, 10.4 об однозначной разрешимости уравнений $Q_{\ell,j}X - XJ_1 = Y$, $J_1X - XQ_{\ell,j} = Y$.

В § II первой главы в терминах элементов $\sigma_{\ell,r}(t)$ (r - номер строки, ℓ - номер столбца) и "следов" $\gamma_i(t)$ диагональных матриц $U_i(t)$, дающих в сумме структурную матрицу $\alpha(t)$ из \mathcal{U} , вводятся следующие понятия: случай общего положения (СОП); критические случаи (КС); невырожденный случай, или случай I; случай слабого вырождения, или случай II; канонические случаи; случай сильного вырождения. СОП характеризуется соотношениями

$$U_{1-m} = \dots = U_{-n} = 0, \quad \gamma_{1-n}(t) \neq 0 \quad (14)$$

при всех $0 \leq t \leq T$, причем $0 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ или m_1 принимает одно из значений $m/2$, $(m+1)/2$, $2m/3$, $(2m+1)/3$. Ситуации, когда $m_1 = 0$, $n = m$ в (14), называется случаем I, а когда $m_1 = 1$, $n = m-1$, $m \geq 3$ - случаем II. Вместе случаи I, II называются каноническими. КС описываются соотношениями

$$U_{1-m} = \dots = U_{-n} = 0, \quad U_{1-n}(t) \neq 0, \quad \gamma_{1-n} = 0 \quad (15)$$

при всех $0 \leq t \leq T$, причем $1 \leq m_1 \leq m-2$.

Все КС, а также СОП при $m_1 \geq 2$ называются случаями сильного вырождения структурной матрицы.

Вторая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена построению а.р. решений ЛДУ по целым степеням ε . В первом параграфе строится для полноты изложения а.р. решения задачи Коши $U_0(0, \varepsilon) = U_0^0$ для уравнения (4) в бесконечномерном подпространстве $E_{\infty-m}$ по известной схеме из регулярной теории возмущений. Если положить

$$\mathcal{D}_0(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{D}_{0,i}(t), \quad d_0(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_{0,i}(t)$$

в (4), обозначить через $W_0(t, 0)$ эволюционный оператор однородного ЛДУ

$$\dot{U}_{0,0} = \mathcal{D}_{0,0}(t)U_{0,0},$$

то независимо от расположения спектра оператора $\mathcal{D}_{0,0}(t)$, действующего в $E_{\infty-m}$,

$$U_0(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i U_{0,i}(t),$$

причем

$$U_{0,0}(t) = W_0(t, 0)U_{0,0}(0) + \int_0^t W_0(t, s)d_{0,0}(s)ds,$$

$$U_{0,i}(t) = W_0(t, 0)U_{0,i}(0) + \int_0^t W_0(t, s) \left(\sum_{k=1}^i \mathcal{D}_{0,k}(s)U_{0,i-k}(s) + d_{0,i}(s) \right) ds, \quad i > 1$$

Произвольные постоянные $U_{0,i}(0)$, $i > 0$, находятся, как обычно, из начального условия при $t = 0$.

Всюду в дальнейшем через C обозначаются различные постоянные, не зависящие от ε . Отмечается, что при достаточно малых ε справедлива оценка

$$\|U_0(t, \varepsilon) - U_0^N(t, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{N+1},$$

где

$$U_0^N(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i U_{0,i}(t).$$

Начиная с § 2 второй главы, объектом исследования в диссертационной работе становится задача Коши $u(0, \varepsilon) = v^0$ для ЛДУ

$$\varepsilon^p \dot{u} = \left(\mathcal{D}_0(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{D}_i(t) \right) u, \quad u \in E, \quad p > 1 \quad (16)$$

с равномерно ограниченной при всех $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ (ε_0 достаточно мало) суммой ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|\mathcal{D}_{i+1}(t)\|$. Уравнение (16) получается из (5) при некотором j , $1 \leq j \leq n$.

В параграфах 2, 3 второй главы предполагается, что оператор $\mathcal{D}_0(t)$ имеет простой спектр, т.е. при всех $0 \leq t \leq T$

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad \lambda_i(t) \neq 0. \quad (17)$$

Подпространство E_j в п.п. 2.2–2.5 конечномерно, а в п. 2.6 и в § 3 бесконечномерно. В качестве базиса подпространства E_j выбирается линейно независимая система из собственных векторов $\varphi_i(t)$, отвечающих различным собственным значениям $\lambda_i(t)$. Строится обратимая матрица $\Phi(t)$, столбцами которой служат координаты векторов $\varphi_i(t)$ в базисе из ортов e_i , тогда

$$\Phi^{-1}(t) \mathcal{D}_0(t) \Phi(t) = \text{diag} (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots).$$

В m -мерном подпространстве E_j а.р. решения задачи (16) ищется в форме

$$u(t, \varepsilon) = \Phi(t) \sum_{j=1}^m \exp \left(\varepsilon^{-p} \int_0^t (\lambda_j(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i q_{i,j}(s)) ds \right) \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r z_{r,j}(t). \quad (18)$$

Если степени ε содержатся в разложениях показателей экспонент и в разложениях вектор-функций, то говорят об а.р. в смысле Эрдейи. Об а.р. в смысле Пуанкаре говорят, когда $q_{i,j}(t) \equiv 0$ при всех $i > 1$, $1 \leq j \leq m$. Пусть при всех $0 \leq t \leq T$

$$\text{Re } \lambda_m(t) \leq \text{Re } \lambda_{m-1}(t) \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_1(t) \leq -L < 0, \quad (19)$$

тогда при всех достаточно малых $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $1 \leq j \leq m$ экспоненты различны, что позволяет перейти при каждом j к ЛДУ

$$\varepsilon^p \sum_{r=0}^m \varepsilon^r \dot{z}_{r,j} = \left(\dot{z}_j(t) - \sum_{i=1}^m \varepsilon^i (S^{(i)}(t) + q_{i,j}(t)I) \right) \sum_{r=0}^m \varepsilon^r z_{r,j}(t)$$

в E с ортонормированным базисом e_i , $1 \leq i \leq m$. Здесь

$$S^{(r)} = \Phi^{-1} \mathcal{D}_r \Phi, \quad r > 1, \quad r \neq p; \quad S^{(p)} = \Phi^{-1} (\dot{\Phi} + \mathcal{D}_p \Phi), \quad (20)$$

а скалярные функции $q_{i,j}(t)$ и вектор-функции $z_{r,j}(t)$ подлежат определению. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε возникает система

$$\mathcal{L}_j z_{0,j} = 0, \quad \mathcal{L}_j z_{r,j} = \sum_{i=1}^r (S^{(i)} + q_{i,j}I) z_{r-i,j}, \quad 1 \leq r \leq p-1,$$

$$\mathcal{L}_j z_{r,j} = \sum_{i=1}^r (S^{(i)} + q_{i,j}I) z_{r-i,j} + (S^{(p)} + q_{p,j}I + \frac{d}{dt}) z_{r-p,j}, \quad r \geq p \quad (21)$$

с необратимой матрицей

$$\mathcal{L}_j = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda_j, \dots, \lambda_{j-1} - \lambda_j, 0, \lambda_{j+1} - \lambda_j, \dots, \lambda_m - \lambda_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

В процессе последовательного решения уравнений (21) скалярные функции $q_{i,j}(t)$ выбираются так, чтобы удовлетворить условиям разрешимости и избежать появления δ в качестве таких условий. В результате все функции $q_{i,j}(t)$ определяются однозначно, а вектор-функции $z_{r,j}(t)$ находятся с точностью до произвольных постоянных $\mathcal{L}_{r,j}$. В свою очередь, $\mathcal{L}_{r,j}$ однозначно определяются равенством

$$\sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r z_{r,j}(0) = \Phi^{-1}(0) v_0^0,$$

получаемыми из (18) при $t=0$. Если принять

$$v_N(t, \varepsilon) = \Phi(t) \sum_{j=1}^m \exp\left(\varepsilon^{-p} \int_0^t (\lambda_j(s) + \sum_{i=1}^{N+p} \varepsilon^i q_{i,j}(s) ds)\right) (\mathcal{L}_{r,j} e_j + \sum_{r=1}^N \varepsilon^r z_{r,j}(t)), \quad (22)$$

то при достаточно малых ε справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - v_N(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{N+1}.$$

Условие (19), обеспечивающее наличие истинного решения с построенной асимптотикой, в бесконечномерном случае заменяется на

$$\dots < \lambda_N(t) < \dots < \lambda_2(t) < \lambda_1(t) \leq -\mathcal{L} < 0 \quad \text{при всех } 0 \leq t \leq T. \quad (19')$$

А.р. в смысле Пуанкаре решения задачи (16) методом регуляризации получил С.А. Ломов. На каждом шаге итерационной процедуры для выполнения условий разрешимости метод предполагает решение ДУ.

В п. 2.6 рассматривается задача Коши

$$\varepsilon \dot{u} = A(t)u + f(t), \quad u(0, \varepsilon) = u^0 \in E, \quad 0 < t < T, \quad (23)$$

в банаховом пространстве E с базисом, эквивалентным ортонормированному. Предполагается, что область определения оператор-функции $A(t)$ не зависит от t , $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $\mathcal{D}(A)$, а задача

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x, \quad x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (24)$$

равномерно корректна при всех достаточно малых ε . Кроме того, оператор $A(t)$ устойчив и его спектр простой при всех $0 < t < T$.

Если $A(t)$, $f(t)$ бесконечно дифференцируемы, то а.р. частного решения $u^*(t, \varepsilon)$ уравнения (23) имеет вид

$$u^*(t, \varepsilon) = - \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r (A^{-1}(t) \frac{d}{dt})^r A^{-1}(t) f(t).$$

Общее решение $\bar{u}(t, \varepsilon)$ однородного уравнения (24) ищется в форме (18) при $p=1$, $j \geq 1$. Схема построения а.р. решения задачи (24) совпадает с соответствующим результатом, когда $\dim E = m < \infty$, с учетом очевидных обобщений и поправок. Уравнение (23) другими методами изучали С.Г. Крейн, Нго Зуи Кан, В.А. Треногин и др.

В § 3 второй главы результаты п. 2.6 применяются к построению нулевого и первого приближения к решению задачи

$$\varepsilon \sqrt{-1} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 2tx + 2t^2)u = h(x, t), \quad u(x, 0) = \rho(x) \quad (25)$$

для уравнения Шредингера, характеризующего гармонический осциллятор с положением равновесия, изменяющимся с течением времени.

$0 \leq t \leq T$. Задача (25) изучалась ранее С.А. Ломовым методом регуляризации. Если обозначить

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - ((x+t)^2 + t^2), \quad \mathcal{D}(B) = L_2(-\infty, \infty), \quad A = -\sqrt{-1}B, \quad f = -\sqrt{-1}h,$$

то (25) превращается в (23). Оператор $B(t)$ имеет собственные значения $\lambda_k(t) = 1 - t^2 - 2k$, $k \geq 1$, следовательно, $B(t)$ устойчив при всех $0 \leq t \leq T$. Его собственными векторами служат функции Эрмита

$$\varphi_k(x, t) = \exp(-xt - x^2/2) H_{k-1}(x+t), \quad k \geq 1,$$

с многочленами $H_{k-1}(z)$ Чебышева-Эрмита, являющимися решениями ДУ

$$\frac{d^2 H_{k-1}}{dz^2} - 2z \frac{dH_{k-1}}{dz} + 2(k-1)H_{k-1} = 0,$$

для которых справедливы соотношения

$$H_{k+1} = 2(zH_k - kH_{k-1}), \quad \frac{dH_k}{dz} = 2kH_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Составляется матрица Φ из столбцов $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, тогда матрица $\mathcal{A} = \Phi^{-1}\dot{\Phi}$ является ленточной. Если $\sigma_{r,\ell}$ - элемент из ℓ -й строки, r -го столбца \mathcal{A} , то $\sigma_{k,k} = t$, $\sigma_{k+1,k} = k$, $\sigma_{k,k+1} = -\frac{1}{2}$, $k \geq 1$, а остальные элементы равны нулю. Через $\rho_k(x)$ обозначаются координаты заданной волновой функции $\rho(x)$ в базисе $\varphi_k(x, 0)$, а через h_k - координаты разложения вектора h из правой части (25), тогда первое приближение $u_{\varepsilon,1}(x, t)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,1}(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{L}_{0,k}(x) \exp(\alpha_k(t, \varepsilon)) - \frac{h_k(x, t)}{\lambda_k(x, t)} \right) \varphi_k(x, t) + \\ & + \varepsilon \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\mathcal{L}_{1,k}(x) \exp(\alpha_k(t, \varepsilon)) - \frac{1}{\lambda_k(x, t)} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_r(x, t)}{\lambda_r(x, t)} \sigma_{r,k}(x, t) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_k(x, t)}{\lambda_k(x, t)} \right) \right) \right] \varphi_k(x, t) - \frac{1}{4} \mathcal{L}_{0,k}(x, t) \exp(\alpha_k(t, \varepsilon)) (2(k-1)\varphi_{k-1}(x, t) + \varphi_{k+1}(x, t)) \right\} \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_{0,k}(x)$, $\mathcal{L}_{1,k}(x)$ однозначно определяются функциями $\rho_k(x)$, а $\alpha_k(t, \varepsilon) = -t^2/2 + (\sqrt{-1}/\varepsilon) (t^3/3 + (2k-1)t + \varepsilon^2 t/4)$.

Центральное место в диссертационной работе занимает третья глава, состоящая из 4 параграфов, в которой строится а.р. решения задачи Коши для m -мерного ЛДУ (16) с матрицей $\mathcal{D}_0(t)$, имеющей m -кратное собственное значение $\lambda(t)$, в СОВ. Если составить матрицу $\Phi(t)$ из собственного вектора $\varphi_1(t)$ и присоединенных к нему векторов $\varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$, отвечающих собственному значению $\lambda(t)$, то $\Phi(t)$ обратима и

$$\Phi^{-1}(t) \mathcal{D}_0(t) \Phi(t) - \lambda(t) I = J.$$

После замены

$$v(t, \varepsilon) = \Phi(t) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) y(t, \varepsilon)$$

в (16) при $p=1$ возникает задача

$$\varepsilon \dot{y} = \left(J - \varepsilon \mathcal{A}(t) - \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r S^{(r)}(t) \right) y, \quad y(0, \varepsilon) = y^0 = \Phi^{-1}(0) v^0 \quad (26)$$

с матрицами $\mathcal{A} = S^{(1)} = \mathcal{A} + \Phi^{-1} \mathcal{D}_1 \Phi$, $S^{(r)}$, $r \geq 2$ из (20).

В диссертационной работе изучены канонические случаи при $p=1$, а также случаи сильного вырождения $\mathcal{A}(t)$, когда разрешающее уравнение относительно главного члена возмущения малыми слагаемыми собственного значения $\lambda(t)$ имеет кратные корни. При $p > 1$ обсуждается эффект подыкания ранга малого параметра при производной.

В § I рассмотрены канонические случаи I, II при $p=1$. Эти случаи как для уравнений типа (16), (26), так и для ЛДУ с медленно меняющимися коэффициентами исследовали Н.Н. Моксеев, С.Ф. Феценко, Н.И. Вилья, А.Г. Елисеев и др. В данной работе случаи I, II приведены для иллюстрации применения метода в простейших ситуациях и для последующего использования результатов в более сложных ситуациях.

Теорема 1.1. Если $\sigma_{1,m}(t) \neq 0$ при всех $0 < t \in T$, то а.р. решения задачи (16) при $p=1$ имеет вид

$$v(t, \varepsilon) = \Phi(t) \Lambda(\varepsilon) U(t) \sum_{j=1}^m \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda(\tau) + \sum_{l=1}^{m-1} \varepsilon^{l/m} q_{e,j}(\tau)) d\tau\right) \cdot \left\{ \varepsilon^{(1-m)/m} \mathcal{L}_{1-m,j}(t) + \sum_{r=2-m}^{\infty} \varepsilon^{r/m} (\mathcal{L}_{r,j}(t) + \sum_{i=2-m}^r \mathcal{L}_{r,t-m-i}(t)) \Psi_{i,j}(t) \right\} e_j \quad (27)$$

причем $\nu = 1/m$, $q_{e,j}(t)$, $\mathcal{L}_{r,j}(t)$ - некоторые скалярные функции, а $\Psi_{i,j}(t)$ - оператор-функция, действующая из E в $\text{Im } \mathcal{L}_j(t)$. Если оператор $\mathcal{D}_0(t)$ устойчив при всех $0 \leq t \leq T$, то

$$\|v(t, \varepsilon) - v_N(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{(N+1)/m},$$

где $v(t, \varepsilon)$ - истинное решение, а $v_N(t, \varepsilon)$ - приближенное решение с суммированием по r в (27) от $2-m$ до N , $N \geq -1$.

В п. 1.2 изучается случай II. Через $\Omega_{1-m}(t)$ обозначается матрица с единственным ненулевым элементом, стоящим в m -й строке, 1 -м столбце и равным $\sigma_{1,m-1}(t)$, а через $Y^{(i)}(t)$ - коэффициенты разложения по степеням ε сплетаемой матрицы, ненулевые элементы которой занимает лишь места с 2 -го по m -й в i -й строке (они равны $\beta^{(i)}(t) \gamma_{i+1}(t)$) и с 2 -го по m -й в i -м столбце (они равны $\alpha^{(i)}(t) \theta_{i+1}(t)$); $\alpha^{(i)}(t)$, $\beta^{(i)}(t)$ - некоторые скалярные функции, $i \geq 0$.

Теорема 1.2. Если $\sigma_{1,m} \neq 0$, $\sigma_{1,m-1}(t) + \sigma_{2,m}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то а.р. решения задачи (15) при $p=1$ имеет вид

$$v(t, \varepsilon) = \Phi(t) (I + \varepsilon \Omega_{1-m}(t)) \Lambda(\varepsilon) \Phi^{(m)}(t) \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i(m-1)} Y^{(i)}(t) \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r P_1 w_{r,m}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \sum_{l=1}^{m-2} \varepsilon^{l/(m-1)} q_{e,j}(\tau) d\tau\right) \sum_{r=1-m}^{\infty} \varepsilon^{r/(m-1)} (I - P_1) w_{r,j}(t) \right\}, \quad (28)$$

причем $\nu = 1/(m-1)$ и $\Lambda(\varepsilon)$, $w_{-1,m}(t) = \mathcal{L}_{-1,m}(t) e_1$, $w_{1-m,j}(t) = \mathcal{L}_{1-m,j}(t) e_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$. Если оператор $\mathcal{D}_0(t)$ устойчив при всех $0 \leq t \leq T$, то

$$\|v(t, \varepsilon) - v_N(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{(N+1)/(m-1)},$$

где $v_N(t, \varepsilon)$ - приближенное решение с верхним пределом суммирования по i в (28), равным $N+2(m-3)$, по r - соответственно $[N/(m-1)]$, N , $N > -2$.

В § 2 третьей главы строится а.р. решения задачи (16) или (26) при сильном вырождении $\alpha(t)$. Матрицы α , $S^{(r)}$ заменяются суммами однодиагональных матриц U_i , $W_i^{(r)}$ и последовательно применяются обратимые преобразования $I + \varepsilon \Omega_n(t)$ с $\Omega_n(t)$ из (12), $\Lambda(\varepsilon)$, $\Phi^{(i)}(t)$, $I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i\delta} y^{(i-1)}(t)$.

Матрицы $y^{(i)}(t)$, $i \geq 0$, называются сплетающими, состоят из двух нулевых диагональных блоков $m_1 \times m_1$, $n \times n$ и двух, вообще говоря, ненулевых внедиагональных блоков

$$y_{12}^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{i,1}(t) \chi_{i,1}(t) \\ \theta_{i,2}(t) \chi_{i,2}(t) \\ \dots \\ \theta_{i,m_1}(t) \chi_{i,m_1}(t) \end{pmatrix}$$

размеров $m_1 \times n$ и $y_{21}^{(i)}(t) = (\alpha_{i,1}(t)\theta_{i,1}(t) \alpha_{i,2}(t)\theta_{i,2}(t) \dots \alpha_{i,m_1}(t)\theta_{i,2m_1}(t))$ размеров $n \times m_1$. Блоки $y_{12}^{(i)}$, $y_{21}^{(i)}$ находят из итерационных процедур с помощью леммы 10.1, 10.2. В п. 2.5 выводятся формулы для скалярных функций $\alpha_{i,r}(t)$, $\theta_{i,r}(t)$, $i \geq 0$, $1 \leq r \leq m_1$.

В результате серии замен происходит отщепление n уравнений

$$\varepsilon^{(n-1)\delta} \dot{v}_{j,2} = \left(\mathcal{L}_j(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i\delta} G^{(i+1-n)}(t) \right) v_{j,2}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (29)$$

в n -мерном подпространстве $(I-P)E$ с базисом e_j , $m_1+1 \leq j \leq m$. Уравнения (29) при $\delta=1/n$ исследуются так же, как в случае I, когда $n=m$. Наряду с (29) здесь появляется ЛДУ

$$\varepsilon^{(n-1)\delta} \dot{v}_{n+1,1} = \left(\mathcal{Y}_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i\delta} F^{(i+1-n)}(t) \right) v_{n+1,1} \quad (30)$$

типа (26) в дополнительном m_1 - мерном подпространстве PE с базисом e_j , $1 \leq j \leq m_1$. Исследование заканчивается, когда новая структурная матрица в (30) не имеет вырождения или имеет слабое вырождение. Если же она сильно вырождена, то необходимо осуществить новую редукцию задачи.

Изучение структуры однодиагональных (или двухдиагональных, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$) матриц $F^{(i+1-n)}(t)$, $i > 1$ с помощью результатов § 7 первой главы показывает, что случай I в подпространстве PE может возникнуть только при $i = s$, $i = s + n$, $i = s + 2n$ (последний имеет место, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$), а случай II в PE - только при $i = s + 1$, $i = s + n + 1$, $i = s + 2n + 1$ (последний также имеет место, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$). Вводятся обозначения

$$\bar{\Lambda}_1(\varepsilon) = \text{diag}(1, \varepsilon^{\bar{v}}, \dots, \varepsilon^{(m_1-1)\bar{v}}), \quad \Lambda_1(\varepsilon) = \text{diag}(\bar{\Lambda}_1(\varepsilon), O_n),$$

$$\Phi^{(2)}(t) = \text{diag}(U_1(t), O_n), \quad (\Phi^{(2)}(t))^{-1} = \text{diag}((\bar{\Phi}^{(2)}(t))^{-1}, O_n),$$

где $U_1(t)$ - матрица Вандермонда, составленная из m_1 различных функции $q_{1,j}^{(1)}(t)$, $n+1 \leq j \leq m$. Кроме того, через $\gamma_{i,i+n,i}(t)$ обозначается сумма элементов $F^{(i+1-n)}(t)$, $i > 1$. Если при этом $F^{(i+1-n)}$ - двухдиагональная матрица, то считается, что речь идет о сумме элементов на линии с меньшим номером.

Предполагается, что при всех $0 \leq t \leq T$

$$\gamma_{1-m_1,1}(t) \neq 0, \quad \text{т.е.} \quad i = s. \quad (31)$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (14) при $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и (31), тогда а.р. решения задачи (16) при $p = 1$ имеет вид

$$v(t, \varepsilon) = \Phi(t) \left(I + \varepsilon \Omega_{-n}(t) \right) \Lambda(\varepsilon) \Phi^{(n)}(t) \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/n} \gamma^{(i-1)}(t) \right) \exp\left(\varepsilon^{-1/n} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right) \cdot \sum_{j=1}^n \exp\left(\varepsilon^{-1/n} \int_0^{t-1} \sum_{\tau=1}^{n-1} \varepsilon^{\tau/n} q_{1,j}(\tau) d\tau \right) \sum_{r=t-m}^{\infty} \varepsilon^{r/n} (I-P) w_{r,j}(t) + P v_{n+1,j}(t), \quad (32)$$

причем

$$P_{\sigma_{n+1}} = P \Lambda_1(t) \Phi^{(1)}(t) \sum_{j=n+1}^m \exp\left\{t^{-1} \int_0^t \sum_{\ell=1}^{i_{m_1-1}} \epsilon_{\ell/m_1}^{(1)} q_{\ell,j}^{(1)}(t) dt\right\} \sum_{r=1-2m_1}^{\infty} \epsilon_{r/m_1} P_{W_{r,j}}(t),$$

$\bar{\nu} = s / (n m_1)$, скалярные функции $q_{1,j}^{(1)}(t)$ служат корнями уравнения $(q_{1,j}^{(1)})^{m_1} + \gamma_{1-m_1,j}(t) = 0$, $n+1 \leq j \leq m$; $w_{1-m,j}(t) = \mathcal{L}_{1-m,j}(t) e_{m,j}$, $1 \leq j \leq n$, $w_{1-2m,j}(t) = \mathcal{L}_{1-2m,j}(t) e_{j-n}$, $n+1 \leq j \leq m$, а скалярные функции $\mathcal{L}_{1-m,j}(t)$, $\mathcal{L}_{1-2m,j}(t)$ являются решениями некоторых однородных ЛД.

Приводятся теоремы 2.2, 2.3, характеризующие ситуации $i = s + n$, $i = s + 2n$. От теоремы 2.1 они отличаются достаточными условиями, заменяющими (31), формулами для $P_{\sigma_{n+1}}$ и значениями $\bar{\nu}$.

Если рассмотреть частный случай, когда $\mathcal{D}_r(t) = 0$ при $r \geq 2$ в (16), то условие (31) удобно записать в координатной форме.

Следствие 2.1. При выполнении условий теоремы 2.1 с $\mathcal{D}_r(t) = 0$, $r \geq 2$ в (16) и

$$\gamma_{1-m_1,1}(t) = (1/\gamma_{1-n}(t)) \sum_{r=m_2}^n \sigma_{1,r}(t) \sigma_{r+1,m}(t) \neq 0 \quad (33)$$

справедливо представление (32).

Следует подчеркнуть, что результат из следствия 2.1 также является новым.

Далее предполагается, что при всех $0 \leq t \leq T$

$$\gamma_{1-m_1,1} = 0, \quad \gamma_{2-m_1,1}(t) \neq 0, \quad \text{т.е. } i = s + 1. \quad (34)$$

По матрице $F^{(2-m_1)}(t)$, состоящей из двух ненулевых элементов $f_{1,m_1-1}(t)$, $\gamma_{2-m_1,1}(t) - f_{1,m_1-1}(t)$, однозначно строится матрица $\Omega_{1-m_1,1}(t)$ с единственным ненулевым элементом $f_{1,m_1-1}(t)$ в m_1 -й строке, 1-м столбце. Вводятся матрицы

$$\Phi^{(2)}(t) = \text{diag}(\bar{\Phi}^{(2)}(t), O_n), \quad (\Phi^{(2)})^{-1} = \text{diag}((\bar{\Phi}^{(2)})^{-1}, O_n),$$

где $\bar{\Phi}^{(2)}$ - матрица $m_1 \times m_1$ такой же структуры, как $\Phi^{(1)}(t)$ в случае II, а также сплетенная матрица $Z_1(t, t)$ порядка $m_1 \times m_1$ с ненулевыми элементами, занимающими места с 2-го по m_1 -й в 1-й

строке и с 2-го по m_1 -й в i -м столбце.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия (14) при $3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и (34), тогда в.р. решения задачи (15) при $p=1$ имеет вид (32), где

$$P U_{n+1,1} = P \left(I + \varepsilon^{(s+1)\nu} \Omega_{1-m_1,1}(t) \Lambda_1(\varepsilon) \Phi^{(2)}(t) P \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/(m_1-1)} Z_1^{(i-1)}(t) \right) P \cdot \right. \\ \left. \left\{ \sum_{j=n+1}^{m-1} \exp \left(-\int_0^t \sum_{\ell=1}^{m_1-2} \varepsilon^{\ell/(m_1-1)} q_{\ell,j}^{(n)}(\tau) d\tau \right) \sum_{r=2(1-m_1)}^{\infty} \varepsilon^{r/(m_1-1)} (I - P_1) w_{r,j}(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r P_1 w_{r,m}(t) \right\}, \quad (35)$$

причем $\nu = 1/n$, $\bar{\nu} = (s+1)/(n(m_1-1))$, функции $q_{i,j}^{(n)}(t)$ находят из уравнения $(q_{i,j}^{(n)})^{m_1-1} + \gamma_{2-m_1,1}(t) = 0$, $n+1 \leq j \leq m-1$; $w_{1-m_1,j}(t) = \mathcal{L}_{1-m_1,j}(t) e_{m_1,j}$, $1 \leq j \leq n$, $w_{2(1-m_1),j}(t) = \mathcal{L}_{2(1-m_1),j}(t) e_{j+1-n}$, $n+1 \leq j \leq m-1$, $w_{-2,m}(t) = \mathcal{L}_{-2,m}(t) e_{-2}$.
Если $m_1 = 2$, то $\bar{\nu} = 1/\nu$, требование $\gamma_{0,1}(t) \neq 0$ излишне и

$$P U_{n+1,1} = P \Lambda_1(\varepsilon) \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r P w_r(t).$$

Приводятся теоремы 2.5, 2.6, характеризующие ситуации $i = s+1+n$, $i = s+1+2n$. От теоремы 2.4 их отличают достаточные условия, заменяющие (34), формулы для $P U_{n+1,1}$ и значения $\bar{\nu}$.

Если рассмотреть частный случай, когда $\mathcal{D}_r(t) = 0$ при $r \geq 2$ в (16), то условие (34) удобно записать в терминах элементов матрицы $\mathcal{X}(t)$.

Следствие 2.2. При выполнении условий теоремы 2.4 с $\mathcal{D}_r(t) = 0$, $r \geq 2$ в (16) и наличии соотношений

$$(1/\gamma_{1-n}) \sum_{r=m_1}^n \sigma_{1,r} \sigma_{r+1,m} = 0, \quad (1/\gamma_{1-n}(t)) \left\{ \sum_{r=m_1-1}^n \sigma_{1,r}(t) \sigma_{r+1,m-1}(t) + \sum_{r=m_1-1}^n (\sigma_{1,r}(t) + \sigma_{2,r+1}(t)) \sigma_{r+2,m}(t) \right\} \neq 0 \quad (36)$$

при $3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и всех $0 \leq t \leq T$ справедливо представление (32) с $P U_{n+1,1}$ из (35).

Результат следствия 2.2 также является новым.

По построению разности $\operatorname{Re} q_{i,j}(t) - \operatorname{Re} q_{k,j}(t)$ не меняют знака на $[0, T]$, поэтому в каждой из теорем 2.1 - 2.6 построенному приближенному решению $v_n(t, \varepsilon)$ соответствует истинное решение $v(t, \varepsilon)$ задачи (10). Если начальные условия для $v(t, \varepsilon)$, $v_n(t, \varepsilon)$ отличаются на $O(\varepsilon^{(n+1)/n})$, то из условия устойчивости $D_0(t)$ следует справедливость оценки

$$\|v(t, \varepsilon) - v_n(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{(n+1)/n}$$

при всех $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Необходимо подчеркнуть, что разрешающее уравнение относительно главного члена $q_{i,j}(t)$ возмущения m -кратного собственного значения $\lambda(t)$ в параграфах 1, 2 третьей главы имело вид

$$q_{i,j}^{m_1} (q_{i,j}^n + \gamma_{1-n}(t)) = 0. \quad (37)$$

В § 3 третьей главы изучаются ситуации, когда формируются более сложные разрешающие уравнения.

При $s=0$, а значит, $m_1 = m/2 \geq 2$ в (14), $k^* = 2$ (здесь и далее $k^* = 1 + [(m-1)/n]$) оно записывается в виде

$$q_j^{2n} + \gamma_{1-n}(t) q_j^n + \gamma_{1-m}^*(t) = 0, \quad (38)$$

где $\gamma_{k,m}^*(t)$ - единственный ненулевой элемент матрицы $U_{1-n}(t)\Omega_n(t) + W_{1-m}^{(2)}(t)$. При $\gamma_{1-m}^*(t) \neq 0$ уравнение (38) не имеет нулевых корней. Рассматриваются две ситуации: а) $\gamma_{1-n}^2 \neq 4\gamma_{1-m}^*$ при всех $0 \leq t \leq T$; б) $\gamma_{1-n}^2 = 4\gamma_{1-m}^*$ при всех $0 \leq t \leq T$. Устанавливается, что а) сводится к изученному ранее случаю I. Что касается б), то уравнение (16) или (26) распадается на n независимых ДУ

$$\varepsilon^{(n-1)\nu} v_j = \left(\eta_{j1} - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i\nu} \sum_{r=1}^1 F_{r,j}^{(i+1-n)}(t) \right) v_j \quad (39)$$

в $\mathbb{P}_j E$, где $\nu = 1/n$, \mathbb{P}_j - проектор из E на $\operatorname{Span}(e_{2j-1}, e_{2j})$, $1 \leq j \leq n$. В свою очередь, уравнение (30) в $\mathbb{P}_j E$ вытекает в зависимости от элементов двучленной структурной матрицы.

Если $s = -1$, а значит, $m_1 = (m+1)/2 \geq 2$, $k^* = 3$, то в предположении, что $W_{1-m}^{(2)} = 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, разрешающее уравнение записывается в виде

$$q_j \left(q_j^{m-1} + \gamma_{1-n}^n(t) q_j^n + \gamma_{2-m}^n(t) \right) = 0, \quad (40)$$

где $\Pi_{2-m} = U_{1-n} \Omega_{-n} + W_{2-m}^{(2)}$. Рассматриваются две ситуации: а) $\gamma_{1-n}^2 \neq 4\gamma_{2-m}^n$ при всех $0 \leq t \leq T$; б) $\gamma_{1-n}^2 = 4\gamma_{2-m}^n$ при всех $0 \leq t \leq T$. Ситуация а) сводится к случаю II, б) сочетает в себе случай II и ситуацию, рассмотренную при $s = 0$. Отдельно изучается случай $m = 3$, $n = 1$.

Пусть $s = -n$, $m_1 = (2m)/3 \geq 2$, $k^* = 3$, тогда в предположении, что $W_i^{(2)} = 0$, $1-m \leq i \leq -2n$ при всех $0 \leq t \leq T$, разрешающее уравнение записывается в виде

$$q_j^m + \gamma_{1-n}^n(t) q_j^{2n} + \gamma_{1-2n}^n(t) q_j^n + \gamma_{1-m}^n(t) = 0, \quad (41)$$

где $\gamma_{1-m}^n(t)$ — единственный ненулевой элемент матрицы, однозначно определяемой матрицами $W_{1-m}^{(2)}$, $W_{1-m_1}^{(2)}$, U_{1-n} , U_{1+s} . Вводятся обозначения $A = \gamma_{1-n}^n / 3$, $B = \gamma_{1-2n}^n / 3$, $C = \gamma_{1-m}^n / 2$ и составляется $\Delta = C^2 + B^3 - 3ABC + 2A^3C - \frac{3}{4}A^2B^2$. Рассматриваются две ситуации: а) $\Delta \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$; б) $A^2 = B$,

$AB = 2C$, а значит, $\Delta = 0$ при всех $0 \leq t \leq T$. Случай а) сводится к I. Случай б) влечет расщепление уравнения (15) или (26) на n независимых трехмерных ЛДУ в $\mathbb{F}_j E$, где \mathbb{F}_j — проектор из E на $\text{Span}(e_{3j-2}, e_{3j-1}, e_{3j})$, $1 \leq j \leq n$. Уравнение в $\mathbb{F}_j E$ исследуется в зависимости от элементов трехмерной структурной матрицы.

Если $s = -n-1$, $m_1 = (2m+1)/3 \geq 2$, $k^* = 4$, то в предположении, что $W_i^{(2)} = 0$, $1-m \leq i \leq -2n$, $W_{1-m}^{(2)} = 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, разрешающее уравнение принимает вид

$$q_i \left(q_i^{m-1} + \gamma_{1-n}(t) q_i^{2n} + \gamma_{1-2n}^n(t) q_i^n + \gamma_{2-m}^n(t) \right) = 0, \quad (42)$$

где $\Pi_{1-2n} = W_{1-2n}^{(2)} + U_{1-n} \Omega_{-n}$, Π_{2-m} - матрица, однозначно определяемая матрицами $W_{2-m}^{(3)}$, $W_{1-2n}^{(2)}$, $W_{2-m}^{(2)}$, U_{1-n} , U_{1+s} . Рассматриваются две ситуации: а) $\Delta \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$; б) $A^2 = B$, $AB = 2C$, а значит, $\Delta = 0$ при всех $0 \leq t \leq T$. Здесь $A = \gamma_{1-n} / 3$, $B = \gamma_{1-2n}^n / 3$, $C = \gamma_{2-m}^n / 2$. Ситуация а) сводится к случаю II, б) сочетается в себе случаи II и ситуацией при $s = -n$. Отдельно изучается случай $m = 4$, $n = 1$.

В § 4 устанавливается, что при $m_1 > 1$ за один шаг алгоритма степень малого параметра, или его ранг, при производной снижается на $\delta + \bar{\delta}$. Этот вывод иллюстрируется на примерах с рангом $p > 1$, когда $s = -1$, $s = -n-1$. В частности, за счет этого эффекта возможен переход от сингулярно возмущенного ДДУ к регулярному по ε уравнению.

Четвертая глава, состоящая из двух параграфов, посвящена построению а.р. решения задачи (16) или (26) в КС. Вначале изучается укороченное уравнение (16) с $\mathcal{D}_+(t) = 0$, $r \geq 2$, $p = 1$. Устанавливается, что только за счет перестройки матричного пучка без дальнейшего его расщепления при соответствующих дополнительных ограничениях на коэффициенты структурной матрицы $\mathcal{A}(t)$ удается получить ДДУ в E с новой структурной матрицей, имеющей различные собственные значения. Невырожденный случай возникает, когда среди них нет нулевого собственного значения. Если же одно из них равно нулю, то налицо случай слабого вырождения в E .

В § 2 главы 4 рассматриваются ситуации, в которых формируются более сложные разрешенные уравнения типа (36), (40) - (42). Последованию проводится по той же схеме, как в § 3 главы 3. Например, если $\gamma_{2-n}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то случаи $s = 2$, $s = 1$,

$s = 3 - n$, $s = 2 - n$ здесь изучаются, как случаи $s = 0$,
 $s = -1$, $s = -n$, $s = -n - 1$ из § 3 главы 3 соответственно с
 заменой в формулах числа n на $n - 1$.

При наличии младших ненулевых членов $\mathcal{D}_r(t)$, $r \geq 2$, в
 (26) ситуации не усложняется. Если ранг $r > 1$, то схема исследова-
 ния также не претерпевает существенных изменений.

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ:

1. Чернышов К.И. Теорема Тихонова для уравнения с фредгольмовым оператором // Дифференц. уравнения. - 1977. - 13, № 9. - С. 1625 - 1636.
2. Крейн С.Г., Чернышов К.И. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Школа по теории операторов в функциональных пространствах. - Новосибирск: Наука, 1979. - 43 - 18.
3. Крейн С.Г., Чернышов К.И. Поведение решений общих линейных систем, мероморфно зависящих от малого параметра // Докл. АН СССР. - 1961. - 260, № 3. - С. 530 - 535.
4. Крейн С.Г., Чернышов К.И. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Труды IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. I. - Киев: Наук. думка, 1984. - С. 193 - 197.
5. Чернышов К.И. Асимптотическое разложение решения задачи Коши для линейного уравнения в банаховом пространстве // Методы малого параметра: Тез. докл. Всесоюз. совещ. - Нальчик: Изд-во К-БГУ. - 1987. - С. 155.
6. Чернышов К.И. Устойчивость и асимптотические разложения решений операторного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. - Новосибирск: Наука, 1987. - С. 129 - 143.

7. Чернышов К.И. Метод стандартного расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. - 1990. - 311, № 6. - С. 1311 - 1316.
8. Чернышов К.И. Об асимптотике решения линейного приведенного уравнения // Сиб. мат. журн. - 1991. - 32, № 3. - С. 192 - 200.
9. Чернышов К.И. Асимптотические разложения решений линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Зап. науч. семина. ЛСМИ. - Т. 195. - Л.: Наука, 1991. - С. 161 - 178.
10. Чернышов К.И. Об асимптотическом расщеплении линейного уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Спектральні і еволюційні задачі: Тез. допов. - Київ: Вид-во НМК ВО, 1991. - С. 70 - 71.
11. Чернышов К.И. Асимптотика решений линейного сингулярно возмущенного уравнения в случае кратного спектра предельного оператора // Тез. докл. Всесоюз. конф. "Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач". - Бишкек: Илим, 1991. - С. 114.
12. Чернышов К.И. Асимптотические разложения решения задачи Коши для одного линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. - 1992. - 28, № 5. - С. 765 - 779.
13. Chernyshov K.I. The asymptotic solutions of linear differential equations in a Banach space (the critical case) // 3 - rd Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Abstracts. - Bolyai Institute, Szeged (Hungary), 1988.
14. Chernyshov K.I. Asymptotic expansions of solutions of the equations with a Fredholm operator in front of the derivative in the critical case // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential

469124

AB 26.447

equations. - Szeged (Hungary)

- 15. Chernyshov K.I. Asymptotic ex... linear singular perturbed differential equations in the critical case // 7 -th Czechoslovak Conference on Diff. Equations and Their Applications EQUADIFF 7: Enlarged abstracts (ordinary differential equations). - Praha, 1989. - P. 17 - 19.
- 16. Chernyshov K.I. Linear equations with the Fredholm operator in front of the derivative // International Workshop in Analysis and its Applications (IWAA). Fourth Annual Meeting: Abstracts. - Dubrovnik - Kupari, 1990.

Подп. в печ. 26.II.92 Формат 60x84/16. Бумага тип. ОЭС. печать.
 Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 1,86. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж
 120 экз. Зак. 322 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
 252601 Киев ГСП, ул. Терещенковская, 3