ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БЕЛАЙДИ БЕНХАРРАТ

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ Q - КВАЗИКОНФОРМНЫХ ФУНКЦИЙ И Q - КВАЗИКОНФОРМНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

/01.01.01 - Математический анализ/

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Харьков - 1992

Работа выполнена на кафедре математического анализа Харьковского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Деркач В.С.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Ронкин Л.И. /ФТИНТ АН Украины/
кандидат физико-математических наук,
доцент Марченко И.И. /Харьковский государственный университет/

Ведущая организация: Донецкий государственный университет
г.Донецк

Защита состоится "5" января 1993 г. в 15^{15} час. на заседании специализированного совета К 053.06.02 Харьковского государственного университета по адресу:
310077, г.Харьков, пл.Свободы, 4, ауд. 6-48

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Харьковского государственного университета.

Автореферат разослан "17" декабря 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета А.С.Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Научная новизна. С конца 20-х годов центральное место в теории мероморфных функций заняла теория распределения значений, основы которой были заложены финским математиком Р.Неванлинной. Несмотря на известную законченность теории распределения значений, изучение даже классических ее задач не доведено до конца. Непосредственным обобщением мероморфных функций являются целые кривые, т.е. векторы $\{g_1(z), \ldots, g_p(z)\}$, $p \geqslant 2$, компоненты которых $g_i(z)$ являются целыми функциями без общих нулей, причем хотя бы одно отношение $g_i(z)/g_k(z)$ является трансцендентной функцией.

Теория распределения значений целых кривых построена в работах Г.Вейля, Л.Альфорса и Г.Картана. Существенные результаты в теории роста мероморфных и целых кривых были получены В.П.Петренко. Изложению результатов теории роста и распределения значений мероморфных и целых кривых посвящены монографии Р.Неванлинны, Г.Вейля, Б.Я.Левина, И.В.Островского и А.А.Гольдберга.

В современной теории аналитических функций появились задачи, которые для своего решения требуют рассмотрения более общих понятий, чем аналитические функции. Поэтому в последние годы значительно возрос интерес к различного рода обобщениям теории аналитических функций. Известному румынскому математику С.Стоилову еще в 1928 г. удалось найти наиболее общий класс отображений, сохраняющий топологические свойства аналитических функций. Это класс "внутренних", по Стоилову, отображений. Частным случаем внутренних, по Стоилову, отображений являются Q-квазиконформные целые функции. С другой стороны, решение уравнения Бельтрами

$$W_{\bar z}(z) = \mu(z) W_z(z), \quad (|\mu(z)| \leqslant k < 1)$$

является $Q\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$ - квазиконформной целой функцией. Если же рассмотреть систему уравнений Бельтрами, то мы придем к понятию Q-квазиконформной целой кривой.

Мы интересуемся, до какой степени можно ослабить требование аналитичности координат целой кривой, чтобы при этом для нее сохранились основные положения теории роста и распределения значений. По-видимому, одним из наиболее естественных подходов к решению этой проблемы являются исследования квазиконформных целых кривых и Q-квазиконформных функций.

Диссертация посвящена исследованиям характеристик роста Q-квазиконформных функций и Q-квазиконформных целых кривых, которые при $Q = 1$ совпадают с классическими характеристиками теории роста и распределения значений мероморфных функций и целых кривых.

В диссертации получены следующие новые результаты: установлено, что при переходе от аналитического случая к квазиконформному основные положения теории роста и распределения значений сохраняются.

Апробация работы. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[2] и докладывались на конференциях и семинарах преподавателей и сотрудников Харьковского государственного университета.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде чем перейти к обсуждению основных результатов, введем необходимые определения.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется Q-квазиконформной при $z \neq \infty$ функцией, если она допускает представление

$$f(z) = \Phi(\varkappa(z)), \qquad /1/$$

где $\Phi(w)$ - мероморфная при $w \neq \infty$ функция, а $\varkappa(z)$ - Q-квазиконформное отображение всей z-плоскости на всю w-плоскость ($\varkappa(\infty) = \infty$).

Если в представлении /1/ функция $\Phi(w)$ - целая, то функцию $f(z)$ будем называть Q-квазиконформной целой функцией.

Определение 2. Зависящий от комплексного параметра z p-мерный вектор $/p \geq 2/$ $\vec{G}(z) = \{ g_k(z) \}_{k=1}^{p}$ называется p-мерной однородной Q-квазиконформной целой кривой, если его координаты $g_k(z)$ допускают представление

$$g_k(z) = h_k(\varkappa(z)),\quad k = 1, 2, \dots, p,$$

где $w = \varkappa(z)$ – Q -квазиконформное отображение $(\varkappa(\infty)=\infty)$, а $\vec{H}(w) = \{h_k(w)\}_{k=1}^{p}$ – обычная целая кривая в w -плоскости.

Заметим, что I – квазиконформная целая кривая /I -квазиконформная функция/ есть обычная целая кривая /мероморфная функция/.

Всюду далее мы будем использовать стандартные обозначения теории роста и распределения значений мероморфных функций и целых кривых $n(r,a,F)$, $N(r,a,F)$, $m(r,a,F)$, $\mathcal{L}(r,a,F)$, $\delta(a,F)$, $\Delta(a,F)$, $\beta(a,F)$, $n(r,\vec{a},\vec{G})$, $N(r,\vec{a},\vec{G})$, $m(r,\vec{a},\vec{G})$, $\mathcal{L}(r,\vec{a},\vec{G})$, $\delta(\vec{a},\vec{G})$, $\Delta(\vec{a},\vec{G})$, $\beta(\vec{a},\vec{G})$ которые в квазиконформном случае вводятся по аналогии с аналитическим случаем.

Характеристикой Q -квазиконформной функции $F(z)$ называется величина

$$T(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, F)\, d\theta$$

Простые примеры показывают, что для Q -квазиконформной функции не сохраняется первая основная теорема распределения значений мероморфных функций.

Характеристикой Q -квазиконформной целой кривой называется величина

$$T(r,\vec{G}) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}}\int_0^{2\pi}\!\!\cdots\int_0^{2\pi} N(r, \vec{a}(\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1},0), \vec{G})\, d\alpha_1 \dots d\alpha_{p-1},$$

где

$$\vec{a}(\alpha_1,\dots,\alpha_p) = \{e^{-i\alpha_k}\}_{k=1}^{p},\quad 0 \le \alpha_k \le 2\pi$$

Положим

$$\Omega(F) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \beta(a,F) > 0\}$$
$$\Omega_\alpha(F) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \beta_\alpha(a,F) > 0\}$$
$$\Omega(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \beta(\vec{a},\vec{G}) > 0\}$$
$$\Omega_\alpha(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \beta_\alpha(\vec{a},\vec{G}) > 0\}$$

Первая глава диссертации посвящена теории роста Q-квазиконформных функций конечного нижнего порядка, а вторая глава – теории роста Q -квазиконформных целых кривых. Под теорией роста Q -квазиконформных функций и Q -квазиконформных целых кривых мы понимаем исследование асимптотических свойств с использованием метрик $L^1_{[0,2\pi]}$ и $C_{[0,2\pi]}$.

Вопрос о связи между величиной дефекта в смысле Ж.Валирона и величиной отклонения В.П.Петренко для Q -квазиконформных функций и включая мероморфные функции исследовался во многих работах.

Приведем некоторые результаты в этом направлении.

Теорема I. Если мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то для каждого комплексного числа $a \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\beta(a,f) \leq B(\lambda, \Delta(a,f)), \qquad /2/$$

где

$$B(\lambda,\Delta)=\begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если либо } \lambda \geq 0{,}5, \\ & \text{либо } \lambda<0{,}5 \text{ и } \Delta \leq 1-\cos\lambda\pi \\ \pi\lambda\left(\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda+\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right), & \text{если } \lambda<0{,}5 \\ & \text{и } \Delta>1-\cos\pi\lambda \end{cases}$$

Заметим, что оценка /2/ является точной в том смысле, что существуют мероморфные функции с произвольно малыми величинами $\beta(a,f)$ и $\Delta(a,f)$, для которых

$$\beta(a,f) \geq K(\lambda)\sqrt{\Delta(a,f)}$$

Теорема 2. Если $F(z)$ - Q -псевдомероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ, то для любого ν, $0<\nu \leq 1$ и любого комплексного числа $a \in \overline{\mathbb{C}}$ справедлива оценка

$$\beta_{\frac{Q+\nu}{Q+1}}(a,F) \leq C(Q,\lambda)\left\{\Delta_\nu(a,\Phi)\right\}^{1/Q+1}, \qquad /3/$$

где

$$\beta_\alpha(a,F) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,F)}{T^\alpha(r,F)}, \quad 0<\alpha \leq 1,$$

$$\beta_1(a,F) = \beta(a,F),$$

$$\Delta_\beta(a,\mathcal{F}) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r,a,\mathcal{F})}{T^\beta(r,\mathcal{F})}, \quad 0<\beta\leq 1,$$

$$\Delta_1(a,\mathcal{F}) = \Delta(a,\mathcal{F}),$$

а $C(Q,\lambda)$ - положительная постоянная, зависящая от Q и λ.

Следует заметить, что при $\nu = 1$ и $Q = 1$ из оценки /3/ получается оценка, аналогичная /2/, которая, как отмечено выше, в определенном смысле точная.

Сохраняется ли такая же зависимость между величиной дефекта в смысле Ж.Валирона и величиной отклонения для Q-квазиконформных функций и Q-квазиконформных целых кривых?

Кроме того, возникает вопрос количественной оценки величины отклонения $\beta(a,\mathcal{F})$ через величину $\Delta(a,\mathcal{F})$ для Q-квазиконформных функций и Q-квазиконформных целых кривых.

Выяснению этих вопросов и посвящен § 2 первой главы и § I второй главы, в которых получены следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}(z)$ - Q-квазиконформная при $z\neq\infty$ функция конечного нижнего порядка λ. Тогда для каждого комплексного числа $a \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\beta(a,\mathcal{F}) \leq C(Q,\lambda)\sqrt{\Delta(a,\mathcal{F})},$$

где $C(Q,\lambda)$ - постоянная, зависящая только лишь от Q и λ.

Теорема 4. Пусть $\vec{G}(z)$ - p-мерная однородная Q-квазиконформная целая кривая конечного нижнего порядка λ, $\vec{G}(z) = \vec{H}(\chi(z))$. Тогда для любого p-мерного вектора $\vec{a}\in\mathbb{C}^p$, $\vec{a} \neq (0,\dots,0)$ выполняется

$$\beta(\vec{a},\vec{G}) \leq C(Q,\lambda)\sqrt{\Delta(\vec{a},\vec{G})}$$

В работе В.П.Петренко исследуется структура множества положительных отклонений Q-псевдомероморфных функций и доказана следующая теорема.

Теорема 5. Если $\mathcal{F}(z)$ - Q-псевдомероморфная при $z\neq\infty$ функция, то множество

$$\Omega_\alpha(\mathcal{F}) = \left\{ a \;:\; \beta_\alpha(a,\mathcal{F}) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,\mathcal{F})}{T^\alpha(r,\mathcal{F})} > 0 \right\}$$

при $\alpha > {}^{2Q}/_{Q+1}$, имеет емкость нуль.

Этот результат является аналогом соответствующих классических теорем О.Фростмана, Л.Альфорса, Р.Неванлинны о структуре множества валироновских дефектных значений для мероморфных функций.

В § 3 первой главы и § 2 второй главы изучается структура множества положительных отклонений для Q -квазиконформных функций и Q -квазиконформных целых кривых.

Пусть E - произвольное замкнутое ограниченное множество, содержащееся в $\Omega(\vec{G}) \subset \mathbb{C}^p$. $a = \{a_{n,j}\}_{n,j}$ - фиксированная квадратная матрица и $\vec{d} = \{d_n\}_{n=1}^{p-1} \in \mathbb{C}^{p-1}$ - фиксированный вектор; при этом будем считать, что $\det a \neq 0$ и $\|a\| \leqslant 1$. Этот набор будем далее обозначать $A(a,d)$. Положим для каждого $\vec{w} \in \mathbb{C}^{p-1}$

$$\vec{b}(\vec{w}) = \{\xi_\nu\}_{\nu=1}^{p},$$

где

$$\xi_\nu = \xi_\nu(w_1,\dots,w_{p-1}) = \sum_{n=1}^{p-1} (a_{n,\nu} w_n + d_n), \nu = 1,\dots,p-1,$$

и

$$\xi_p = 1$$

Пусть

$$E(A) = \left\{ \vec{w} = \{w_n\}_{n=1}^{p-1} : \left\{ \{\xi_\nu(w_1,\dots,w_{p-1})\}_{\nu=1}^{p-1}, \xi_p = 1 \right\} \in E \right\}$$

и

$$\bar{E}(A) = E_1(A) \times \dots \times E_{p-1}(A),$$

где $E_n(A)$ - проекции множества $E(A)$ на координатные плоскости w_n, $n=1,\dots,p-1$.

Если

$$\sup_{A(a,d)} \left\{ \min_{1\leqslant n\leqslant p-1} \operatorname{Cap}_2 E_n(A) \right\} = 0,$$

то определим меру на $\bar{E}(A)$ как тождественный нуль.

Если существует набор $A(a,d)$, для которого

$$\min_{1\le n\le p-1} \operatorname{Cap}_2 E_n(A)>0,$$

то определим меру на $\bar{E}(A)$ как прямое произведение мер Робена μ_n, соответствующих множествам $E_n(A), n=1,\dots,p-1$.

Справедлива

Теорема 6. Для любой Q -квазиконформной при $z\neq\infty$ функции и любого $\alpha>\frac{1}{2}$

$$\int_E \beta_\alpha(a,\mathcal{F})\,d\mu(a)=0 .$$

Теорема 7. Для p -мерной однородной Q -квазиконформной целой кривой и любого фиксированного набора $A(a,d)$ при $\alpha>\frac{1}{2}$

$$\int_{\bar{E}(a,d)} \beta_\alpha(\vec{b}(\vec{w}),\vec{G})\,d\mu_1\dots d\mu_{p-1}=0 \qquad /4/$$

для любого ограниченного замкнутого множества E, содержащегося в $\Omega_\alpha(\vec{G})$, и любого набора $A(a,d)$.

Если для любого ограниченного замкнутого множества E, содержащегося в множестве

$$\Omega_\alpha(\vec{G})=\left\{\vec{a}\in\mathbb{C}^p\ :\ \beta_\alpha(\vec{a},\vec{G})>0\,,\ \alpha>\frac{1}{2}\right\}$$

выполнено условие /4/, то будем говорить, что множество $\Omega_\alpha(\vec{G})$ имеет нулевую внутреннюю $(p-1)$ -емкость.

Теорема 8. Для любого из чисел $0<\rho\le\infty$ и $0<\sigma_0\le 2$ существует квазиконформная при $z\neq\infty$ функция $\mathcal{F}(z)$ порядка ρ, такая что множество $\overline{\Omega^0}_{1/2\sigma_0 Q}(\mathcal{F})$ имеет положительную меру Хаусдорфа размерности σ_0.

Понятие протяжения мероморфных функций введено в 1973 г. А.Бернштейном. Протяжение мероморфной функции относительно числа a - это характеристика массивности тех множеств, на которых данная функция приближается к числу a.

В § 4 первой главы и § 3 второй главы вводится понятие протяжения для Q -квазиконформных функций и Q -квазиконформных целых кривых, в которых получены следующие результаты.

Теорема 9. Для Q -квазиконформной функции $\mathcal{F}(z)$ нижнего порядка λ и любого числа $a\in\bar{\mathbb{C}}$ справедлива

$$
\sigma(a,\mathcal{F}) \geqslant \begin{cases} \min\left\{ 2\pi,\ \frac{4}{\lambda} C(Q) \arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,\mathcal{F})}{2Q}} \right\} & \text{если } 0<\lambda<\infty \\ 2\pi & \text{, если } \delta(a,\mathcal{F})>0 \text{ и } \lambda=0 \end{cases}
$$

Теорема I0. Пусть $\vec{G}(z)$ - P -мерная Q -квазиконформная целая кривая конечного нижнего порядка λ и любого P -мерного вектора $\vec{a}$ справедлива

$$
\sigma(\vec{a},\vec{G}) \geqslant \begin{cases} \min\left\{ 2\pi,\ \frac{4}{\lambda} C(Q) \arcsin\sqrt{\frac{\delta(\vec{a},\vec{G})}{2Q}} \right\} & \text{если } 0<\lambda<\infty \\ 2\pi & \text{, если } \delta(\vec{a},\vec{G})>0,\ \lambda=0 \end{cases}
$$

<u>Список работ, опубликованных по теме диссертации</u>:

I. Белайди Б., Деркач В.С. О структуре множества $\Omega_\alpha(\mathcal{F})$ для Q -квазиконформных функций / Рукопись деп. во ВИНИТИ 04.04.90 г., № I856-В90.

2. Белайди Б., Деркач В.С. Протяжение Q -квазиконформных функций / Рукопись деп. во ВИНИТИ I7.03.92 г., № 909-В92.

Ответственный за выпуск доц.к.-ф.-м.н. Деркач Р.С.

Подп. к печ. 07.12.92. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1.0, Уч.-изд. л. 1.0 Тираж 100 экз. Зак. № 4325. Бесплатно.

Харьковское межвузовское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.