КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

МАСЛОВСКАЯ
Лариса Викторовна

СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК

Специальность 01.01.07. - Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КИЕВ
1992

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Одесского университета им. И.И.Мечникова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ИЛЬИН Валерий Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор КАРЧЕВСКИЙ Михаил Миронович,
доктор физико-математических наук, профессор МАКАРОВ Владимир Леонидович.

Ведущая организация - институт кибернетики АН Украины.

Защита состоится "28" января 1993г. в 14 час. на заседании специализированного совета Д 068.18.16 при Киевском университете им. Т.Г.Шевченко по адресу: 252127, г.Киев-127, проспект академика Глушкова, 6, факультет кибернетики, аудитория 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского университета /ул.Владимирская, 58/.

Автореферат разослан "21" декабря 1992г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д 068.18.16
доцент А.В.Кузьмин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время метод конечных элементов завоевал всеобщее признание как эффективный метод решения разнообразных задач математической физики и техники. Это связано с большой универсальностью метода, который сочетает в себе положительные качества вариационных и разностных методов, позволяя сравнительно легко учитывать геометрические и физические параметры объектов исследования, а также различные граничные условия. Кроме того, это связано с его алгоритмичностью и простотой реализации, что привело к созданию универсальных вычислительных комплексов, которые позволяют решать многие задачи. Метод конечных элементов впервые был предложен в работах Куранта и Мак-Генри в 40-ых годах, однако в то время эти исследования остались незамеченными. Далее, в начале 50-ых годов метод снова был открыт независимо инженерами, которые начали применять его в расчетах напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций.

Фундамент для математического исследования метода конечных элементов был заложен в работах Самарского А.А., Яненко Н.Н., Марчука Г.И., Михлина С.Г., Бахвалова Н.С. и др., связанных с исследованием разностных и вариационных методов. Первыми работами по исследованию МКЭ были работы Оганесяна Л.А., Демьяновича Ю.К., Корнеева В.Г., Обэна Ж.П., Фридрихса К., Келлера и др. Важную роль в анализе МКЭ сыграли работы по аппроксимации конечными элементами в пространствах Соболева, полученные в конце 60-ых годов. Успехи численной реализации МКЭ связаны с бурным развитием методов решения разреженных линейных систем.

Широко используется МКЭ при решении задач механики твердого тела, в частности, в задачах о деформации пластин и оболочек. В настоящее время в практических расчетах тонкостенных конструкций численными методами чаще всего применяется классическая теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява /модель Койтера/, и теория, учитывающая деформацию поперечного сдвига /модель Тимошенко-Рэйсснера/. Каждая из них имеет свои достоинства и недостатки. Так, например, первая из них асимптотически точно описывает напряженное состояние тонких оболочек, но включает в себя производные высокого порядка от перемощений, она приводит к системе трех уравнений относительно вектора перемещений точек срединной поверхности, относительно каждого из касательных перемещений система имеет второй порядок, относительно нормального - четвертый. Отсюда - высокие требования к гладкости $w \in (H^1_\Omega)^2 \times H^2_\Omega$. Вторая модель описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, следствием этого является снижение требований к гладкости решения. Но в модели Тимошенко-Рэйсснера при старших производных присутствует малый параметр, что усложняет решение задачи.

Предметом наших исследований является модель Койтера, которая описывает широкий класс задач и служит механикам на протяжении длительного времени. Построение конформных конечноэлементных схем для этой модели приводит к необходимости обеспечивать при переходе через границы конечных элементов непрерывность не только нормальных перемещений, но и первых производных от них. Построение таких аппроксимаций приводит к высоким степеням сплайнов для нормального перемещения, а для оболочек произвольной формы является почти неразрешимой задачей. Чтобы обойти эту трудность часто используют неконформные элементы, т.е. элементы, имеющие меньшую гладкость, чем $H^2_я$ для нормального перемещения. Но и эти элементы не могут решить проблему, т.к., хотя они и экономичны, но дают часто недостаточную точность. Наиболее эффективными для задач теории пластин и оболочек оказались смешанные, гибридные и смешанно-гибридные МКЭ. Они основываются на смешанных вариационных формулировках, которые сводят решение краевой задачи к отысканию седловой точки функционала Рэйсснера, либо Рэйсснера-Лагранжа. Кроме трех компонент вектора перемещений компонентами седловой точки являются обычно линейные комбинации перемещений и производных от них, имеющие определенный механический смысл, например, моменты. Обычно эти величины тоже нужны, часто даже больше, чем перемещения. Введение этих величин в качестве новых неизвестных избавляет от необходимости численного дифференцирования, при котором происходит потеря точности. Для отыскания седловой точки функционала достаточно для перемещений использовать элементы класса $(H^1_R)^3$. Использование простых конечных элементов и, как следствие, быстрое формирование матрицы разрешающей системы и ее сравнительно небольшой порядок позволяют применять такие методы для решения нелинейных задач, где соответствующая линейная задача решается на каждой итерации.

Все это положительные качества смешанных методов. К положительным же свойствам относится и то, что матрица получаемой системы имеет число обусловленности порядка $O(h^{-2})$ в отличие от системы, которая получается на основании минимизации функционала энергии и которая имеет число обусловленности $O(h^{-4})$. Но, к сожалению, матрица смешанного конечноэлементного аналога не является положительно определенной и симметричной, хотя такими свойствами обладает матрица системы, получающейся при минимизации функционала энергии.

Впервые смешанные методы конечных элементов /СМКЭ/ были предложены Германом, Хэллалом и Виссером в 1967-1969г.г. для задач об изгибе пластины. Они получили теоретическое обоснование в работах Джонсона и Миюси в 1973г. Такие методы получили название схем Германа-Джонсона и Германа-Миюси. Позднее указанные методы, а также другие модификации смешанных и гибридных методов были обстоятельно исследованы в работах Брецци, Равьяра, Сьярле, Фалка, Осборна и других. В их работах была создана общая теория смешанных методов для бигармонического уравнения /Задача Дирихле/.

Как было указано в проблемной статье Зенкевича, написанной в 1970г, нерешенной проблемой в МКЭ является применение этого метода в расчетах оболочек. Эта проблема существует и в настоящее время, несмотря на большое количество конечных элементов, созданных для задач теории оболочек.

Анализ сходимости схем СМКЭ для основных краевых задач теории пологих оболочек для полигональной области был проведен в работах Филипповича и Масловской.

Для случая непологих оболочек в литературе имеются лишь теоремы сходимости для оболочек специального вида, например, для цилиндрических, либо пр неоправданно больших ограничениях на геометрию оболочки. Это работы Мийоси, Таласлидиса, Лютоборского. Очевидно, причиной отсутствия общих терем является трудность доказательства условия слабой эллиптичности, которое играет ключевую роль и которое в случае пластинки и пологой оболочки доказывает я элементарно.

Кроме того, до последнего времени отсутствовало исследование свойств матрицы смешанных дискретных /в частности конечноэлементных/ аналогов эллиптических краевых задач, в частности задач теории оболочек. Не были исследованы особенности поведения методов исключения для систем такого вида.

Все это говорит об актуальности темы диссертационной работы.

<u>Цель работы</u>.

I. Получение смешанных вариационных формулировок для основных краевых задач теории оболочек.

2. Исследование полученных смешанных схем. Доказательство условия слабой эллиптичности. Получение теорем существования, единственности, сходимости для случая областей с угловыми точками и точками смены граничных условии.

3. Исследование свойств смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач. Применимость методов исключения для систем такого вида. Построение обобщенного алгоритма Холесского.

4. Исследование гладкости решений основных краевых задач теории оболочек в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий.

Научная новизна.

В работе построены и исследованы две новые схемы смешанного метода конечных элементов для основных краевых задач теории оболочек. По аналогии с соответствующими схемами для пластин они названы схемами Германа-Джонсона и Германа-Миийоси.

При исследовании этих схем кардинальную роль играло условие слабой эллиптичности, обоснования которого для случая непологой оболочки не было ранее.

Новыми являются также интерполянты лагранжевого типа, которые обобщают интерполянты Джонсона и Фалка-Осборна.

Новыми являются теоремы аппроксимации в весовых пространствах Соболева, которым принадлежат решения соответствующих краевых задач. Эти теоремы позволили получить теоремы сходимости для схемы Германа-Джонсона в случае минимальной гладкости решения, например, в случае невыпуклых полигональных областей.

Для случая схемы Германа-Миийоси был введен нелокальный интерполянт, т.е. интерполянт, относящийся не к одному треуг. а сразу ко всей области. Исследование его свойств и получение теорем аппроксимации потребовало нового подхода, отличного от стандартного.

Новыми являются алгебраические главы, в которых изучаются свойства матриц смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач. Показано, что свойства этих матриц близки к свойствам симметричных положительно определенных матриц: они структурно симметричны, положительно полуопределены, невырождены. Для решения таких систем строится и обосновывается обобщенный алгоритм Холесского, включающий в себя нумерацию и исключение, что дает возможность применить для обработки этих матриц методы, основанные на теории графов. Для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач этот алгоритм устойчив. Ограничения на нумерацию для задач теории пластин и оболочек легко могут быть реализованы за счет ввода входных данных. При этом выбирается один из возможных вариантов алгоритма нумерации, которые известны для симметричных положительно определенных матриц. Все это говорит о том, что с матрицей можно обращаться почти как с симметричной положительно определенной. Все преимущества, даваемые симметричностью и положительной определенностью при решении системы методами исключения, здесь сохраняются, число же обусловленности матрицы $O(h^{-2})$. Это очень важно для практики.

Исследования гладкости решений основных краевых задач теории оболочек в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий основаны на методике Кондратьева. Новым там является исследование поведения корней уравнений, определяющих гладкость решения, и заключение о гладкости.

Достоверность научных положений и выводов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью математических методов, применяемых при их решении, а также подтверждается многочисленными расчетами, проведенными Филипповичем А.П., Голушковым В.Г., Кобозевой А.А. и др. под руководством и при участии автора работы.

Практическая ценность.

Результаты работы, особенно обобщенный алгоритм Холесского, использовались при выполнении хоздоговорной тематики, которая велась с Пермским моторостроительным заводом и Омским объединением "Азот".

Результаты диссертации использовались также при чтении спецкурсов "Метод конечных элементов" и "Численные методы алгебры" для студентов специальности 0617 механико-математического факультета Одесского госуниверситета.

Имеющиеся на кафедре программы, связанные с решением систем специального вида, могут быть использованы при решении смешанными МКЭ эллиптических краевых задач.

Аппробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на IУ и У Всесоюзных конференциях "Вариационно-разностные методы в математической физике" /Новосибирск, 1980, Москва, 1983/, на У, УI, X Всесоюзных конференциях "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности" /Караганда, 1977, Ташкент, 1979, Красноярск, 1987/, на IУ, У, УI Всесоюзных школах-семинарах "МКЭ в строительной механике" /Львов, 1979, Рига, 1981, Киев, 1983/, на УI тематической конференции "Практическая реализация численных методов расчета конструкций" /Ленинград, 1983/, на республиканской научно-технической конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" /Харьков, 1988/, на II и III республиканском симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнения /Одесса, 1978, Одесса, 1982/, на УIII всесоюзной конференции по современным проблемам дифференциальной геометрии /Одесса, 1984/, на республиканской конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям /Одесса, 1987/, на IУ всесоюзной конференции "Смешанные задачи механики деформируемого тела" / Одесса, 1989/.

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре Бахвалова Н.С. на механико-математическом факультете МГУ /1988, 1989/, на семинаре Николаева Е.С. на факультете ВМиК МГУ /1989/, на семинаре Ильина . . на факультете ВМиК МГУ /1990/, на семинаре Вычислительного центра Сибирского филиала АН СССР в Новосибирске /1990/, на семинаре Ляшко А.Д. в Казанском университете /1990/, на семинаре кафедры вычислительной математики Киевского университета /1992/. Результаты работы многократно обсуждались на семинаре по МКЭ кафедры вычислительной математики Одесского госуниверситета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-20]. В список работ не включены тезисы /за исключением одних/ и многочисленные депонированные работы /за исключением двух/.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, шести шести глав, списка литературы. Объем работы - 269 страниц машинописного текста. Библиография содержит 178 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показана актуальность темы, сформулирована цель исследования, приводится краткая аннотация работы.

В первой главе дан краткий обзор работ по применению и анализу МКЭ в задачах теории пластин и оболочек. Особое внимание уделено работам по СМКЭ. Известно весьма мало работ в этом направлении, причем они имеют частный характер. Поэтому обоснование СМКЭ для задач теории оболочек играет важную роль.

Во второй главе рассмотрены различные вариационные формулировки краевых задач линейной теории оболочек /модель Койтера/. Пусть Ω - ограниченная область в плоскости E^2 с границей $\partial\Omega$, которая предполагается липшицевой. Тогда оболочка S - образ $\bar{\Omega}$ при отображении $r: E^2 \to E^3$, где E^3 - трехмерное евклидово пространство. В действительности S - срединная поверхность оболочки, но так как мы рассматриваем только тонкие оболочки, то отождествляем оболочку с ее срединной поверхностью. Отображение $r = r(x^1, x^2)$, где x^1, x^2 - криволинейные координаты оболочки, удовлетворяет следующим условиям: 1/ $r = r(x^1, x^2) \in C^3(\bar{\Omega})$, 2/ все точки оболочки регулярны в том смысле, что два вектора $a_\alpha = \partial_\alpha r$, $\alpha = 1,2$, линейно независимы, т.е. их векторное произведение $a_1 \times a_2 \neq 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для компонент вектора перемещений $w = (w_1, w_2, w_3)^T$

$$(n^{\beta\alpha} + b^\alpha_\lambda m^{\beta\lambda})|_\beta + b^\alpha_\lambda m^{\beta\lambda}|_\beta + q^\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2, \qquad (1)$$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - q^3 = 0. \qquad (2)$$

Здесь компоненты тензоров изгибающих моментов и растягивающих сил

$$m^{\alpha\beta}(\rho(w)) = e^3/12\, E^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(w),$$

$$n^{\alpha\beta}(\gamma(w)) = e\, E^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(w),$$

компоненты тензоров изгибной и мембранной деформаций

$$\rho_{\alpha\beta}(w) = w_3|_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} w_3 + b^\lambda_\alpha w_{\lambda|\beta} + b^\lambda_\beta w_{\lambda|\alpha} + b^\lambda_{\alpha|\beta} w_\lambda,$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(w) = 1/2\,(w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w_3.$$

Первые два уравнения, записанные формулой (1), являются уравнениями второго порядка относительно касательных перемещений w_1, w_2, а уравнение (2) - уравнением четвертого порядка относительно нормального перемещения w_3. Для любой из краевых задач на каждом куске границы ненулевой меры задаются четыре условия, два из них связываются с касательными перемещениями, два - с нормальным. Условия предполагаются однородными. На каждом куске границы возможных вариантов 16 /ради краткости мы их не выписываем/. Однако это задание должно обеспечивать единственность решения соответствующей краевой задачи, поэтому не может быть задано, например, на всей границе условие свободного края. Каждый из наборов граничных условий имеет определенный механический смысл.

Пусть W - подпространство пространства $(H^1_\Omega)^2 \times H^2_\Omega$, связанное с главными граничными условиями, Для произвольных $w, \omega \in W$ определим билинейные формы

$$a(m(w), m(\omega)) = \int_\Omega m^{\alpha\beta}(\rho(w))\rho_{\alpha\beta}(\omega)\sqrt{a}\,dx,$$

$$c(\gamma(w), \gamma(\omega)) = \int_\Omega n^{\alpha\beta}(\gamma(w))\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\sqrt{a}\,dx$$

и линейную форму

$$\langle q, \omega \rangle = \int_\Omega q^i \omega_i \sqrt{a}\,dx.$$

Основная вариационная формулировка задачи состоит в определении $w \in W$, удовлетворяющего вариационному уравнению

$$a(m(w), m(\omega)) + c(\gamma(w), \gamma(\omega)) = \langle q, \omega \rangle, \ \forall \omega \in W. \quad (3)$$

Условие сильной W-эллиптичности, которое было доказано Сьярле и Бернаду,

$$a(m(w), m(w)) + c(\gamma(w), \gamma(w)) \geq A\|w\|_W, \ \forall w \in W,$$

обеспечивает существование и единственность решения (3). Нахождение решения (3) эквивалентно задаче минимизации на пространстве W энергетического функционала

$$\mathcal{J}(w) = 1/2\, a(m(w), m(w)) + 1/2\, c(\gamma(w), \gamma(w)) - \langle q, w \rangle.$$

Методами теории двойственности получаем функционал

$$L(w, m) = a(m(w), m) + 1/2\, c(\gamma(w), \gamma(w)) - 1/2\, a(m, m) - \langle q, w \rangle,$$

где $m = (m^{11}, m^{22}, m^{12}) \in M = (L_{2,a})^3$ – тензор новых независимых переменных, которые введены для того, чтобы понизить порядок производных от w_3 в вариационной формулировке. Эти переменные являются двойственными по отношению к w_3. Для касательных перемещений двойственные переменные не вводятся, т.к. в $\mathcal{J}(w)$ присутствуют производные от w_1, w_2 только первого порядка. Правда, двойственные переменные для w_1, w_2 тоже можно было бы ввести. Функционал L естественно назвать функционалом Рейсснера-Лагранжа. Двойственно-основная формулировка краевой задачи состоит в отыскании седловой точки $(w, m) \in W \times M$. Методами теории двойственности доказывается, что такая седловая точка существует и единственна, причем первая ее компонента является решением основной вариационной задачи, а вторая $m = m(w)$.

Необходимым условием существования седловой точки является удовлетворение системе вариационных уравнений

$$a(m, \mu) - a(m(w), \mu) = 0, \quad \forall \mu \in M, \qquad (4)$$

$$a(m(\omega), m) + c(\gamma(w), \gamma(\omega)) = \langle q, \omega \rangle, \quad \forall \omega \in W, \quad q \in W'. \qquad (5)$$

Далее расширяется пространство допустимых значений для w и сужается для m. Вводятся в рассмотрение банаховы пространства $\tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}, \tilde{W}, \tilde{V}, Y$, такие что

$\tilde{M} \subset \tilde{\tilde{M}} \subset M$, вложения непрерывны и плотны,

$W \subset \tilde{W} \subset \tilde{V}$, вложения непрерывны и плотны,

$\tilde{V} = \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2 \times \tilde{V}_3 \overset{c}{\subset} Y$. Значок $\overset{c}{\subset}$ обозначает компактность вложения.

Пусть $\tilde{p}(w)\in\mathcal{L}(\tilde{W},\tilde{M}')$, $\tilde{\gamma}(w)\in\mathcal{L}(\tilde{W},M)$, такие что $\tilde{p}(w)=p(w)$, $\tilde{\gamma}(w)=\gamma(w)$, $\forall w\in W$. Тогда под $a(\tilde{m}(w),m)$, $m\in\tilde{\tilde{M}}$, $w\in\tilde{W}$ можно понимать отношение двойственности между $\tilde{\tilde{M}}$ и $\tilde{M}'$, которое отождествляется с единственным расширением скалярного произведения $a(\tilde{m}(w),m)$ в M. Обозначим $\tilde{b}(m,w)=a(\tilde{m}(w),m)$, $m\in\tilde{M}$, $w\in\tilde{W}$, $\tilde{c}(w,\omega)=c(\tilde{\gamma}(w),\tilde{\gamma}(\omega))$, $w\in\tilde{W}$, $\omega\in\tilde{W}$.

Задача $\tilde{P}$. Найти пару $(m,w)\in\tilde{M}\times\tilde{W}$, такую что для $q\in\tilde{W}'$

$$a(m,\mu)-\tilde{b}(\mu,w)=0, \qquad \forall\mu\in\tilde{M},$$
$$\tilde{b}(m,\omega)+\tilde{c}(w,\omega)=\langle q,\omega\rangle, \qquad \forall\omega\in\tilde{W}.$$

Условием слабой эллиптичночти называется следующее условие

$$\sup_{(m,\omega)\in\tilde{M}\times\tilde{W}}\frac{\tilde{b}(m,w)+\tilde{c}(w,\omega)}{\|m\|_{\tilde{M}}+\|\omega\|_{\tilde{V}}}\geq A\|w\|_{\tilde{V}}. \qquad (6)$$

Доказано, что если пара $(m,w)\in M\times W$ - решение (4), (5), кроме того, $m\in\tilde{M}$ и выполняется условие слабой эллиптичности, то (m,w) является решением $\tilde{P}$ и это решение единственно. Заметим, что при переходе к расширенной вариационной формулировке от основной условия для перемещений остаются главными граничными условиями, условия для перерезывающей силы - естественными, а вот условие для нормальной производнои от w_3, которое было главным, становится естественным, а условие для нормального момента, которое было естественным, становится главным. Связано это с тем, что при введении новых функции мы переходим от системы (1), (2) к системе шести уравнений второго порядка. Новые три уравнения дают связи между моментами и перемещениями.

Далее строятся две конкретные расширенные вариационные формулировки, на основе которых далее получаются две схемы СМКЭ - Германа-Джонсона и Германа-Миноси. Положим $\tilde{W}$ - подпространство пространства $(H_0^1)^2\times W^1_{p,\Omega}$, $p>2$, связанное с главными граничными условиями $w_1=0,\ w_2=0,\ w_3=0$, $\widetilde{V}$ - подпространство пространства $(H^1_\Omega)^3$, связанное с главными граничными условиями $w_1=0,\ w_2=0,\ w_3=0$, $\widehat{M}=(H^1_{\beta,\Omega})^3$, $\widetilde{M}=(W^1_{q,\Omega})^3$, $1/p+1/q=1$, либо их подпространствам, связанным с главным граничным условием $M_n=0$. Решение краевой задачи предполагается имеющим следующую гладкость $w\in(H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2\times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}$, $k\geq 1$, $0\leq\sigma<2k$. Из теорем вложения следует, что $w\in(H^2_{\beta,\Omega})^2\times H^3_{\beta,\Omega}$, где $\beta=0$, если $\sigma-2(k-1)\leq 0$, и $\beta=\sigma-2(k-1)<2$, в противном случае. Это предположение о гладкости обосновывается в главе 6. При такой гладкости решения определение пространств $\widetilde{W}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{M}$, $\widehat{M}$ корректно, причем $1\leq q<4(2+\beta)$. Определим на $\widetilde{W}$

$$\langle m,\widetilde{\rho}(w)\rangle=\langle m^{\alpha\beta},(w_{3|\alpha\beta}-c_{\alpha\beta}w_3+b^\lambda_\alpha w_{\lambda|\beta}+b^\lambda_\beta w_{\lambda|\alpha}+b^\lambda_{\alpha|\beta}w_\lambda)\rangle-\langle M_n(m),\partial_n w_3\,\delta_{(\partial\Omega^n)}\rangle,$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(w)=1/2\,(w_{\alpha|\beta}+w_{\beta|\alpha})-b_{\alpha\beta}w_3$$

Здесь $\partial\Omega^n$ та часть $\partial\Omega$, на которой $\partial_n w_3=0$. Под $w_{3|\alpha\beta}$ понимается производная в смысле сингулярных распределений, $\delta_{(\partial\Omega^n)}$ - дельта функция Дирака. Тогда

$$\widetilde{b}(m,w)=\int_\Omega[-m^{\alpha\beta}_{|\alpha}w_{3|\beta}+m^{\alpha\beta}(b^\nu_\alpha w_{\nu|\beta}+b^\nu_\beta w_{\nu|\alpha}+b^\nu_{\alpha|\beta}w_\nu-c_{\alpha\beta}w_3)]\sqrt{a}\,dx+$$

$$+\int_{\partial\Omega^+}M_{nt}(m)\,\partial_t w_3\,ds,\quad m\in\widetilde{M},\ w\in\widetilde{W},$$

$$\widetilde{c}(w,\omega)=\int_\Omega n^{\alpha\beta}(\widetilde{\gamma}(w))\,\gamma(\omega)\sqrt{a}\,dx,\quad w,\omega\in\widetilde{W}$$

Здесь $\partial\Omega^+$ та часть $\partial\Omega$, на которой $w_3\neq 0$. Она может иметь нулевую меру. Интегралы понимаются, как отношения двойственности соответствующих пространств.

Вторая вариационная формулировка, которая используется при построении схемы Германа-Джонсона, связана с регулярной триангуляцией. Пространства $\widetilde{W}$, $\widetilde{V}$ определяются, как и в предыдущем случае. Пусть T_1, T_2 -произвольная пара треугольников имеющая общую сторону T_{12}. Тогда $\widetilde{M}=(H^1_{h,\beta,\Omega})^3=\{m\,/\,m\in(L_{2,\Omega})^3$, $m\in(H^2_{\beta,T})^3,\ \forall T\subset T_h,\ M_n(m_{T_1})|_{\partial T_{12}}=M_n(m_{T_2})|_{\partial T_{12}}\}$,

либо его подпространству, связанному с главным граничным условием $M_n = 0$. Равенство понимается в смысле совпадения следов $M_n(m_{T_1})|_{\partial T_{12}}, M_n(m_{T_2})|_{\partial T_{12}} \in H^{1/2}_{\beta, \partial T_{12}}$. Пространство $\widetilde{\widetilde{M}} = (W^1_{h,q}, \Omega)^3, 1 \le q < 2$, определяется аналогично, $\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{c}$ определяются так же, как в предыдущем случае, ~~билинейная~~ но для $\forall T$ билинейная форма $\tilde{b}(m, w)$ имеет вид
$$\tilde{b}(m,w) = \sum_{T \in T_h} \Big\{ \int_T [-m^{\alpha\beta}|_\alpha \cdot w_{3|\beta} + m^{\alpha\beta}(b^\nu_\alpha w_{\nu|\beta} + b^\nu_\beta w_{\nu|\alpha} + b^\nu_{\alpha|\beta} w_\nu - c_{\alpha\beta} w_3)] \sqrt{a}\, dx + \int_{\partial T} M_{nt}(m) \cdot \partial_t w_3\, ds \Big\}.$$

При указанном выборе пространств и билинейных форм доказывается неравенство: $\exists A_1 > 0, A_2 > 0$, такие что
$$\sup_{(m,w) \in \tilde{M} \times \tilde{W}} \frac{\tilde{b}(m,w) + \tilde{c}(w,w)}{\|m\|_{\tilde{M}} + \|w\|_{\tilde{V}}} + A_1 \|w\|_Y \ge A_2 \|w\|_{\tilde{V}},$$
где $Y = (L_{2,\Omega})^3$. При этом исключаются те граничные условия, для которых на части границы ненулевой меры $M_n = 0, w_3 \ne 0$. Использование этого неравенства дает возможность доказать условие слабой эллиптичности (6). Значит, решение краевой задачи является решением любой из двух расширенных вариационных задач и других решений у этих задач не существует.

В главе 3 на основании расширенных вариационных формулировок строятся смешанные схемы МКЭ. Показано, что условие слабой эллиптичности имеет место для дискретного случая при достаточно малых h. Доказаны теоремы существования и единственности конечноэлементных задач. Исследованы свойства матриц, даны оценки их чисел обусловленности. Получены квазиоптимальные оценки скорости сходимости. Ради упрощения выкладок здесь предполагается, что область Ω полигональна и связна. Вводятся конечномерные пространства $M_h \subset \tilde{M}, W_h \subset \tilde{W}$.

Задача $\tilde{P}_h$. Найти пару $(m_h, w_h) \in M_h \times W_h$, такую что
$$a(m_h, \mu_h) - \tilde{b}(\mu_h, w_h) = 0, \qquad \forall \mu_h \in M_h,$$
$$\tilde{b}(m_h, \omega_h) + \tilde{c}(w_h, \omega_h) = \langle q, \omega_h \rangle, \qquad \forall \omega_h \in W_h.$$
Для схемы Германа-Джонсона $M_h = \{ m_h \mid m_{h|T} = B^{-1} M_n^T$

$M_{n_i}^T \in P^{z_3-1}$, $z_3 \geq 1$, $i=1,2,3$, $M_n^{T_1}|_{\partial T_{12}} = M_n^{T_2}|_{\partial T_{12}}\}$,
либо его подпространству, связанному с условием $M_n = 0$. Здесь P^z - пространство многочленов степени не выше z. Определим $W_h = \widetilde{W} \cap (X_h^{z_1} \times X_h^{z_2} \times X_h^{z_3})$, $z_i \geq 1$, $i=1,2,3$, где $X_h^z = \{w_h \in C^0_{\bar\Omega}$, $w_h^T \in P^z, \forall T \subset T_h\}$. Для схемы Германа-Мийоси $M_h = \widetilde{M} \cap (X_h^{z_3})^3, z_3 \geq 2$, $W_h = \widetilde{W} \cap (X_h^{z_1} \times X_h^{z_2} \times X_h^{z_3})$, $z_1, z_2 \geq 1$. Доказано, что условие слабой эллиптичности : $\exists A>0$, такое что

$$\sup_{(\mu_h, w_h) \in M_h \times W_h} \frac{\tilde{b}(\mu_h, w_h) + \tilde{c}(w_h, w_h)}{\|\mu_h\|_{\widetilde{M}} + \|\delta(w_h)\|_M} \geq A\|w_h\|_{\widetilde{W}} \quad (7)$$

имеет место при достаточно малом h. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи $\tilde{P}_h$. Эта задача эквовалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$K_0 \binom{m}{w} = \begin{cases} Am - Bw = 0, & (8) \\ B^T m + Cw = f, & (9) \end{cases}$$

где A - симмётричная положительно определенная $M \times M$ матрица, C - симметричная положительно полуопределенная матрица размера $N \times N$. Условие слабой эллиптичности (7) влечет линейную независимость столбцов матрицы $\left\|{}^{-B}_{C}\right\|$. Отсюда - невырожденность матрицы K. Даны оценки сингулярных чисел матрицы K_0 : $A_1 h^2 \leq \sigma_{min}(K_0) \leq \sigma_{max}(K_0) \leq H_0$, откуда следует, что $cond(K_0) = O(h^{-2})$.

Вводятся специальные интерполянты, которые, в отличие от соответствующих для пластинки, связаны не со всей болинейной формой $\tilde{b}(m, w)$, а только с ее частью $\tilde{b}_1(m, w_3)$. Для схемы Германа-Джонсона

$$\tilde{b}_1(m, w_3) = \sum_{T \subset T_h} \left\{ \int_T m^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} w_3 \sqrt{a}\, dx + \int_{\partial T} M_n \partial_n w_3\, ds \right\},$$

для схемы Германа-Мийоси

$$\tilde{b}_1(m, w_3) = -\int_\Omega (\partial_\alpha m^{\alpha\beta} \partial_\beta w_3 + 1/2\, m^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} w_3)\sqrt{a}\, dx + \int_{\partial\Omega_1} M_{nt}\, \partial_t w_3\, ds$$

Изучены свойства интерполянтов сначала для случая ортогональных координат с длиной дуги в качестве параметра на координатных линиях, а затем для случая общей системы криволинейных координат, причем при переходе к общей системе для некоторых интерполянтов пришлось видоизменить их определение. Один из интерполянтов, используемый в схеме Германа-Мийоси, является глобальным, т.е. строится сразу для всей области.

Получены теоремы аппроксимации в весовых пространствах Соболева, а затем теоремы сходимости. Сформулируем некоторые из них.

Теорема сходимости для схемы Германа-Джонсона.

Пусть $w \in (H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2 \times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}$, $k \geq 1$, $0 \leq \sigma < 2k$, - решение краевой задачи, $(m_h, w_h) \in M_h \times W_h$ - решение задачи $\widetilde{P}_h$. Тогда существует константа A, не зависящая от h, такая что

1) $\|m(w) - m_h\|_{(L_{2,\Omega})^3} + \|\gamma(w) - \gamma(w_h)\|_{(L_{2,\Omega})^3} + \|w - w_h\|_{(H^1_\Omega)^3} \leq$

$\leq A R(h) \equiv A\Big(h^{s_3 - \sigma_3/2} |w_3|_{H^{s_3+1}_{\sigma_3,\Omega}} + h^{s_5 - \sigma_5/2} |m(w)|_{(H^{s_5}_{\sigma_5,\Omega})^3} +$

$+ \sum_{i=1}^{2} h^{s_i - \sigma_i/2} |w_i|_{H^{s_i+1}_{\sigma_i,\Omega}}\Big) \leq A h^{\varkappa_4} \|w\|_{(H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2 \times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}}$,

2) если $r_i \geq 2$, $i = 1,2,3$, $k - \sigma/2 \geq 1$, то

$\|m(w) - m_h\|_{(H^1_{h,\Omega})^3} \leq A h^{-1} R(h)$;

3) если $r_3 \geq 2$, то

$\|w - w_h\|_{(L_{2,\Omega})^2 \times H^1_\Omega} \leq A\Big(h^{s_3 - \sigma_3/2 - \beta/2} |w_3|_{H^{s_3+1}_{\sigma_3,\Omega}} +$

$+ h^{1-\beta/2} R(h)\Big) \leq A h^{\varkappa_5} \|w\|_{(H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2 \times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}}$,

4) если $r_i \geq 2$, то

$\|w - w_h\|_{(L_{2,\Omega})^3} \leq A h^{1-\beta/2} R(h)$,

5) если $r_3=1$, $k-\sigma/2\geq 2$, то

$$\|w-w_h\|_{(L_{2,\Omega})^3}\leq Ah^2\|w\|_{(H^2_\Omega)^2\times H^4_\Omega},$$

где $\varkappa_4=\min(r_1,r_2,r_3,k-\sigma/2)$; $\varkappa_5=\min(r_1+1,r_2+1,r_3,k+1-\sigma/2)-\beta/2$; $s_i=r_i$, $\sigma_i=0$ при $r_i<k-\sigma/2$, $s_i=k$, $\sigma_i=\sigma$ при $r_i\geq k-\sigma/2$, $i=1,2$; $s_3=r_3$, $\sigma_3=0$ при $r_3<k+1-\sigma/2$, $s_3=k+1$, $\sigma_3=\sigma$ при $r_3\geq k+1-\sigma/2$; $s_5=r_3$, $\sigma_5=0$ при $r_3<k-\sigma/2$, $s_5=k$, $\sigma_5=\sigma$ при $r_3\geq k-\sigma/2$.

Теорема сходимости для схемы Германа-Миіоси.

Пусть $w\in(H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2\times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}$, $k-\sigma/2\geq 1$, $0\leq\sigma<2k$ **- решение краевой задачи,** $(m_h,w_h)\in M_h\times W_h$ **- решение задачи** $\widetilde{P}_h$ **, причем** $r_3\geq 2$ **. Тогда при условии квазирегулярности разбиения существует константа** $A>0$ **, такая что** $A\neq A(h)$ и

$$1)\ \|m(w)-m_h\|_{(L_{2,\Omega})^3}+\|\gamma(w)-\gamma(w_h)\|_{(L_{2,\Omega})^3}\leq$$

$$\leq AR_1(h)\equiv A\Big(h^{s_4+1-\sigma_4/2}|m(w)|_{(H^{s_4+1}_{\sigma_4,\Omega})^3}+$$

$$+h^{s_3-1-\sigma_3/2}|w_3|_{H^{s_3+1}_{\sigma_3,\Omega}}+\sum_{i=1}^{2}h^{s_i-\sigma_i/2}|w_i|_{H^{s_i+1}_{\sigma_i,\Omega}}\Big)\leq$$

$$\leq Ah^{\varkappa_8}\|w\|_{(H^{k+1}_{\sigma,\Omega})^2\times H^{k+2}_{\sigma,\Omega}},$$

$$2)\ \|w-w_h\|_{(L_{2,\Omega})^2\times H^1_\Omega}\leq AhR_1(h),$$

$$3)\ \|m(w)-m_h\|_{(H^1_\Omega)^3}\leq Ah^{-1}R_1(h),$$

где $\varkappa_8=\min(r_1,r_2,r_3-1,k-\sigma/2)$; $s_4=r_3$, $\sigma_4=0$ при $r_3<$

$<k-1-\sigma/2,\ s_4=k-1,\ \sigma_4=\sigma$ при $z_1>k-1-\sigma/2$.
При $z_1=1$ а также при $k-\sigma/2<1$ рассмотренная методика не позволяет доказать сходимость для схемы Германа-Мийоси.

Схема Германа-Джонсона, как видно из теорем, более экономична, чем схема Германа-Мийоси. Например, для схемы Германа-Джонсона при $z_1=z_2=z_3=1,\ k-\sigma/2\geq 1-\varkappa_4=1$, а для схемы Германа-Мийоси при $z_1=z_2=1,\ z_3=2,\ k-\sigma/2\geq 1-\varkappa_p=1$, при этом число узловых параметров на одном треугольнике в первом случае - I5, причем три из них могут быть конденсированы, во втором случае на одном треугольнике 30 параметров, причем ни один из них не может быть конденсирован.

<u>Четвертая глава</u> посвящена изучению смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач, которые не обязательно являются краевыми задачами теории пластин и оболочек.

Матрицы этих аналогов при определенной нумерации узловых параметров имеют вид

$$K_0=\begin{Vmatrix} A & -B \\ B^T & C \end{Vmatrix}, \qquad (1c)$$

где A - симметричная положительно определенная $M\times M$ - матрица, C -симметричная положительно полуопределенная $N\times N$ матрица, столбцы матрицы $\begin{Vmatrix} -B \\ C \end{Vmatrix}$ линейно независимы.

Показано, что матрица K_0 невырождена, положительно полуопределена, все ее собственные значения имеют положительные вещественные части, все ведущие миноры положительны. Матрица K_0 единственным образом представима в виде $K_0=L_0\overline{L}_0^T$, где L_0 - нижняя треугольная матрица, а $\overline{L}_0^T$ отличается от L_0^T только знаками перед элементами, стоящими в позициях (i,j), $i\leq M,\ j>M$, т.е. $\overline{L}_0^T=I_1L_0^TI_1$, где $I_1=\begin{Vmatrix} I_M & 0 \\ 0 & -I_N \end{Vmatrix}$, $I_M,\ I_N$ - единичные $M\times M$- и $N\times N$-

матрицы. Таким образом, свойства этих матриц близки к свойствам симметричных положительно определенных матриц. Возникает естественное желание попытаться применить к ним подходы и методы, которые хорошо зарекомендовали себя при решении систем линейных алгебраических уравнений с симметричными положительно определенными матрицами, в частности, использовать для разложения матрицы алгоритм, который является аналогом алгоритма Холесского. Вопрос этот не является тривиальным, т.к. не при всякой нумерации неизвестных метод исключения обладает численной устойчивостью. По аналогии с краевыми задачами для пластин и оболочек неизвестные мы будем называть моментами и перемещениями, хотя для других задач они имеют другой механический смысл. Например, для уравнения теплопроводности - это температура и тепловой поток. Очевидно, что если первыми будут занумерованы перемещения, то на первом же шаге исключения на диагонали может стоять нуль, потребуются перестановки. Для случая же симметричной положительно определенной матрицы численная устойчивость алгоритма исключения имеет место при любом порядке неизвестных. В нашем случае порядок играет существенную роль. Если перенумеровать сначала моменты, а затем перемещения, то матрица будет иметь вид (10) . Алгоритм исключения будет устойчивым, но произойдет большое заполнение в матрице, так, например, нижняя главная подматрица порядка оказывается полностью заполненной. Нумерация, кроме устойчивости, должна обеспечивать эффективность алгоритма. Предлагаемые способы нумерации неизвестных дают возможность применить аналог алгоритма Холесского в сочетании с методами обработки разреженных матриц, основанными на теории графов, которые используются для симметричных положительно определенных матриц.

Перенумеруем перемещения произвольным образом. При этом рационально использовать какой-либо из известных алгоритмов, учитывающих избранный способ хранения и последующего исключения, например, алгоритм Катхилла-Макки, Кинга и др. Затем перед каждым перемещением вставим все связанные с ним моменты, которые еще не попали в нумерацию. Тогда матрица системы будет иметь следующий вид

$$K = \begin{Vmatrix} A_{11} & -B_{12} & A_{13} & -B_{14} & \cdots & A_{1,2p-1} & -B_{1,2p} \\ B_{12}^T & C_{22} & 0 & C_{24} & \cdots & 0 & C_{2,2p} \\ A_{13}^T & 0^T & A_{33} & -B_{34} & \cdots & A_{3,2p-1} & -B_{3,2p} \\ B_{14}^T & C_{24}^T & B_{34}^T & C_{44} & \cdots & 0 & C_{4,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1,2p-1}^T & 0^T & A_{3,2p-1}^T & 0^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1} & -B_{2p-1,2p} \\ B_{1,2p}^T & C_{2,2p}^T & B_{3,2p}^T & C_{4,2p}^T & \cdots & B_{2p-1,2p}^T & C_{2p,2p} \end{Vmatrix}.$$

Доказано, что при указанной нумерации неизвестных диагональные блоки D_{ii}, $i=1,\dots,2p$, получающиеся при исключении, являются положительно определенными, все ведущие миноры матрицы K положительны и матрица K единственным образом представима в виде $K=L\bar{L}^T$, где L - нижняя треугольная матрица, $\bar{L}^T = I_2 L^T I_2$, где $I_2 = diag\,(I_{M_1}, -I_{N_2}, \dots, I_{M_{2p-1}}, -I_{N_{2p}})$, $I_{M_{2s-1}}, I_{N_{2s}}$ - единичные $(M_{2s-1}\times M_{2s-1})$- и $(N_{2s}\times N_{2s})$ - матрицы, M_{2s-1}, N_{2s} - размеры квадратных диагональных блоков $A_{2s-1,2s-1}$ и $C_{2s,2s}$ соответственно. Для вычисления элементов L нетрудно получить следующие формулы $l_{11}=k_{11}^{1/2}$, $l_{i1}=k_{i1}\,l_{11}^{-1}$, $l_{ii} = (k_{ii}-\sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\bar{l}_{si})^{1/2}$, $i>1$, $l_{ij}=(k_{ij}-\sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\bar{l}_{sj})\,l_{ii}^{-1}$, $i>j$.

<u>Теорема</u>. Справедливы следующие неравенства: для $s=1,2,\dots,p$ $k\le s$

$$\max_{L_{2k-1,2s},\,L_{2k,2s}} |l_{ij}| \le N_{2s}^{1/2}(\max_{C_{2s,2s}} c_{ii})^{1/2} + N_{2s}^{1/2}(M_1+M_3+\dots+M_{2k-1})^{1/2}.$$

$$\cdot \lambda_{min}^{-1/2}(A_{2k-1}) \cdot \max_{B1_{2k-1,2s}} |b_{ij}| ;$$

для $s = 0, 1, \ldots, p-1,\ k \leq s$

$$\max_{L_{2k,2s+1},\, L_{2k+1,2s+1}} |l_{ij}| \leq M_{2s+1}^{1/2} (\max_{A_{2s+1,2s+1}} a_{ii})^{1/2} + M_{2s+1}^{1/2} (M_1 + M_3 + \ldots + M_{2k-1})^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \max_{A1_{2k-1,2s+1}} |a_{ij}| \cdot \lambda_{max}^{1/2}(A_{2k-1}) \cdot \lambda_{min}^{-1}(A_{2k-1}).$$

Здесь $B1^T_{2k-1,2s} = (B^T_{1,2s}, B^T_{3,2s}, \ldots, B^T_{2k-1,2s})$, $AL^T_{2s-1,2s+1} =$

$$= (A^T_{1,2s+1}, A^T_{3,2s+1}, \ldots, A^T_{2s-1,2s+1}),\ A_{2s-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1,2s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,2s-1} & \ldots & A_{2s-1,2s-1} \end{Vmatrix}.$$

Из оценок теоремы следует устойчивость по Уилкинсону обобщенного алгоритма Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач, т.к. возможный рост элементов при исключении незначителен, он лишь немногим в этом смысле уступает алгоритму Холесского для симметричных положительно определенных матриц, там коэффициент роста равен единице.

Далее требования на нумерацию ослабляются, при этом устойчивость алгоритма сохраняется, хотя оценки возможного роста элементов при исключении ухудшаются. Однако за такое ослабление приходится платить более жесткими условиями. Перенумеруем неизвестные таким образом, чтобы перед каждой группой перемещений стоял по крайней мере один связанный с ней момент. Тогда матрица системы имеет следующий вид

$$K = \begin{Vmatrix} A_{11} & -B_{12} & \ldots & A_{1,2p-1} & -B_{1,2p} \\ B^T_{12} & C_{22} & \ldots & B_{2,2p-1} & C_{2,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^T_{1,2p-1} & -B^T_{2,2p-1} & \ldots & A_{2p-1,2p-1} & -B_{2p-1,2p} \\ B^T_{1,2p} & C^T_{2,2p} & \ldots & B^T_{2p-1,2p} & C_{2p,2p} \end{Vmatrix},$$

где A_{ii} - положительно определенные $M_i \times M_i$ - матрицы, C_{ii} - положительно полуопределенные $N_i \times N_i$ - матрицы. Заметим, что матрица может оканчиваться блочной строкой, соответствующей моментам. Предположим, что столбцы матриц

$$R_{2i} = \left\| \begin{matrix} -B_{12} & -B_{14} & \dots & -B_{2,2i} \\ C_{22} & C_{24} & \dots & C_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -B^T_{2,2i-1} & -B^T_{4,2i-1} & \dots & -B_{2i-1,2i} \\ C_{2,2i} & C^T_{4,2i} & \dots & C_{2i,2i} \end{matrix} \right\|, \quad i=1,\dots,p,$$

линейно независимы. Тогда диагональные блоки, получающиеся при исключении, являются положительно определенными. Кроме того, имеет место теорема, аналогичная предыдущей. Из нее следует устойчивость по Уилкинсону обобщенного алгоритма Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач и в этом случае.

Доказано, что если столбцы матрицы R_{2i} линейно независимы, то у матрицы, полученной из R_{2i} вычеркиванием строчки и столбца, соответствующих перемещению, или добавлением строчки, соответствующей моменту, столбцы тоже линейно независимы.

В пятой главе результаты предыдущей главы применяются к конкретным схемам СМКЭ для краевых задач теории пластин и оболочек, а именно к схемам Германа-Джонсона и Германа-Мийоси. Доказывается, что практически все алгоритмы упорядочения неизвестных, которые созданы для симметричных положительно определенных матриц, могут быть использованы в рассматриваемых схемах лишь при их небольшой модификации. Модификация обычно сводится к выбору одного из возможных вариантов алгоритма упорядочения и, как правило, может быть обеспечена за счет специального ввода входных данных. При этом не требуется ни дополнительной памяти, ни дополнительного времени. Практически с этими матрицами можно оперировать так же, как с симметричными положительно определенными матрицами.

Исследован и реализован первый способ нумерации, при этом перемещения нумеровались при помощи обратного алгоритма Катхилла-Макки, а затем перед каждым перемещением вставлялись в произвольном порядке моменты, которые еще не попали в нумерацию. Количество арифметических действий, необходимых для реализации алгоритма, и память асимптотически такие же, как и для алгоритма Холесского, использующего нумерацию обратного алгоритма Катхилла-Макки сразу для всех неизвестных.

Все алгоритмы нумерации неизвестных, основанные на теории графов, нумеруют неизвестные так, что на каждом этапе нумерации, связанном с упорядочением группы моментов и следующей за ней группы перемещений, выделяется некоторая подобласть или система подобластей основной области, на которой ищется решение вспомогательной краевой задачи. Это дает возможность при доказательстве линейной независимости столбцов матриц R_i использовать единственность решения вспомогательной краевой задачи и ее дискретных аналогов. Этот метод оказался эффективным для исследования всех алгоритмов упорядочения при их небольшой модификации. Каждый этап нумерации, который связывается с группой перемещений и следующей за ней группой моментов, выделяет из области Ω некоторую подобласть или конечное число подобластей $\Omega_n \subset \Omega$, каждая из которых является объединением треугольников. Та часть границы $\partial\Omega_n$, которая не принадлежит $\partial\Omega$, называется фиктивной. На фиктивной границе можно считать $M_n = 0$, $Q_n = 0$. Для обеспечения единственности решения вспомогательной задачи условия на границе удобно считать смешанными. Если они таковыми не являются, то их можно заменить приближенно смешанными, пользуясь штрафами.

Если на каждом этапе нумерации все моменты в Ω_n занумерованы, M_k на фиктивной границе считается равным нулю, а задание остальных граничных условий обеспечивает единственность решения краевой задачи на Ω_n, то столбцы матриц $R_{2i}, i=1,\dots,p$ линейно независимы.

<u>Теорема.</u> Пусть алгоритм нумерации таков, что перед каждым перемещением нумеруются все его близкие соседи-моменты, которые еще не попали в нумерацию, то столбцы матриц $R_{2i}, i=1,\dots,p$, линейно независимы.

Сосед данного узла называется близким, если он относится к середине той стороны, которой принадлежит данный узловой параметр.

Доказано, что если при нумерации всех неизвестных использовать обратный алгоритм Катхилла-Макки, то для применимости обобщенного алгоритма Холесского достаточно, чтобы начальный узел был моментом и принадлежал $\partial\Omega$, кроме того, список смежности каждого узла в массиве ADJNCY должен содержать сначала перемещения, а затем моменты. Это требование легко реализовать.

Для алгоритма минимальной степени доказано, что перемещение, отнесенное к вершине, нумеруется в последнем среди всех близких к этому перемещению суперузлов.

<u>Теорема.</u> При дополнительном требовании, чтобы в любом суперузле нумеровались сначала все принадлежащие ему моменты, а затем перемещения, алгоритм минимальной степени упорядочения неизвестных обеспечивает применимость обобщенного алгоритма Холесского.

Легко видеть, что для выполнения условий этой теоремы при реализации алгоритма минимальной степени, приведенной в книге Джорджа и Лю "Численное решение больших разреженных систем уравнений", достаточно ввести исходные данные следующим образом: I/ сначала все середины сторон, затем вершины, 2/ при построении структуры смежности в массиве ADJNCY для каждого узла в списке соседей сначала должны идти вершины, а затем середины сторон, 3/ при перечислении соседей узла как номера вершин, так и номера середин сторон должны идти в порядке возрастания. Здесь речь идет о нумерации сетки, состоящей из вершин и середин сторон треугольников. Остальные параметры затем вставляются. Такая реализация сокращает время. Ее удобно применять в любом алгоритме. Сначала нумеруется некая начальная сетка, а затем производятся вставки.

В методе вложенных сечений для обеспечения применимости обобщенного алгоритма Холесского достаточно в каждом разделителе нумеровать сначала моменты, а затем перемещения.

В методе параллельных сечений достаточно, например, в каждой из подобластей перемещения нумеровать по алгоритму Катхилла-Макки, а затем перед каждым перемещением вставлять все связанные с ним моменты, которые еще не попали в нумерацию. В последней части, образованной разделителями, нумерация производится по тому же правилу.

Во фронтальном методе применимость обобщенного алгоритма Холесского обеспечивается, если при нумерации узлов, относящихся к вершине или к середине стороны, нумеруются сначала моменты, а затем перемещения.

Все эти дополнительные условия выбирают один из возможных вариантов алгоритма, не выводя нас за его пределы. Их легко реализовать за счет специального ввода входных данных.

В шестой главе на основании методики Кондратьева проведено исследование гладкости решений основных краевых задач теории пластин и пологих оболочек в окрестности угловых точек и точек смены граничных условий. Гладкость решений основных краевых задач теории пластин зависит от расположения корней характеристических функций. Эти корни можно найти, если исследовать следующие трансцендентные уравнения

$$\operatorname{sh} z + ABz = 0, \quad \operatorname{ch} z + Cz^2 + D = 0,$$

где A, B, C, и D - константы. В диссертации исследовано поведение корней этих уравнений, затем сделаны выводы о гладкости. Аналогичные исследования проведены для плоской задачи теории упругости. Поведение решения краевой задачи для системы уравнений пологой оболочки определяется главной частью оператора задачи. Выделение же главной части приводит к двум независимым краевым задачам: для нормального перемещения получаем краевую задачу для бигармонического уравнения, а для касательных перемещений получаем плоскую задачу теории упругости. Отсюда - выводы о гладкости решений основных краевых задач для пологой оболочки: если правая часть $q \in (H^{k-1}_{\sigma_1})^2 \times H^{k-2}_{\sigma_1}$, то решение $w \in (H^{k+1}_{\sigma})^2 \times H^{k+2}_{\sigma}$, $k \geq 1$, $\sigma_1 < \sigma$, причем $k - \sigma/2 \geq 0$ либо $k - \sigma/2 \geq 1$ в зависимости от угла и вида краевых условий.

В случае непологой оболочки не происходит разделения на две независимые подзадачи. Необходимо исследование всей системы. Однако в силу положительной определенности оператора краевой задачи можно сделать вывод, что $k - \sigma/2 \geq 0$. На основании теорем вложения в любом случае

$$w \in (H^2_{\beta,\Omega})^2 \times H^3_{\beta,\Omega}, \quad 0 \leq \beta < 2.$$

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Масловская Л.В. О сходимости вариационно-разностных методов для одной нелинейной краевой задачи теории гибких пластин// ЖВМ и МФ. - 1978. - Т.18,№4. - С.943-951.

2. Масловская Л.В. О сходимости вариационно-разностных методов для одной нелинейной краевой задачи теории гибких пластин// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы У Всесоюзной конференции. - Новосибирск, 1978. - Ч.2. - С.88-95.

3. Масловская Л.В. О сходимости одной разностной схемы для задачи о сильном изгибе тонких пластин // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1978. - Т.9, №1. - С.113-125.

4. Масловская Л.В. Смешанный метод конечных элементов в задачах об изгибе пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы УІ Всесоюзной конференции. - Новосибирск, 1980. - Ч.2. - С.85-90.

5. Масловская Л.В. Смешанный метод конечных элементов для основных краевых задач теории пластин в областях с угловыми точками // Методы аппроксимации и интерполяции. - Новосибирск, 1981. - С.75-84.

6. Масловская Л.В. Поведение решений бигармонического уравнения в областях с угловыми точками // Дифференциальные уравнения. - 1983. - Т.19, №12. - С.2172-2175.

7. Масловская Л.В., Филиппович А.П. Полусмешанный метод конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек // Сборник научных трудов. - М.: ОВМ АН СССР, 1984. - С.172-182.

8. Масловская Л.В., Филиппович А.П., Голушков В.Г. О смешанных вариационных формулировках задач теории оболочек // Извес-

тия вузов. Математика. - 1985. - №9/280/. - С.37-43.

9. Масловская Л.В., Филиппович А.П. Полусмешанный метод конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек // ЖВМ и МФ. - 1985. - Т.25, №8. - С.1235-1245.

10. Масловская Л.В. Сходимость полусмешанного метода конечных элементов для основных краевых задач теории пологих оболочек в весовых пространствах Соболева // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы X Всесоюзной конференции. - Новосибирск, 1988. - С.172-177.

11. Масловская Л.В. Сходимость полусмешанного метода конечных элементов для основных краевых задач теории пологих оболочек в весовых пространствах Соболева // Известия вузов. Математика. - 1988.-№3. - С.36-43.

12. Масловская Л.В. Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач // ЖВМ и МФ. - 1989. - Т.29, №1. - С.67-74.

13. Масловская Л.В., Кобозева А.А., Пятова Н.Н. Эффективные методы решения смешанных дискретных аналогов краевых задач механики твердого деформируемого тела. Тезисы докладов республиканской научно-технической конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела". -Харьков, 1989. -2с.

14. Масловская Л.В., Орлов С.В. Асимптотика решений краевых задач для гармонического и бигармонического операторов в окрестности угловых точек и точек смены граничных условий. - Деп. в УкрНИИНТИ. - 1989. - №530-Ук-89, 64с.

15. Масловская Л.В., Орлов С.В. О гладкости и асимптотике решений краевых задач теории оболочек. - Деп. в УкрНИИНТИ.- 1990. - №1151-Ук-90, 40с.

16. Масловская Л.В. Неулучш[illegible]
ного метода конечных элементов для основных краевых задач теории пологих оболочек в полигональных областях // ЖВМ и МФ. - 1990. - Т.30, №4. - С.513-520.

17. Кобозева А.А., Масловская Л.В. Программная реализация обобщенного алгоритма Холесского для некоторых смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач // ЖВМ и МФ. - 1990. - Т.30, №3. - С.420-429.

18. Масловская Л.В., Голушков В.Г. О смешанных вариационных формулировках задач теории оболочек // Известия вузов. Математика. - 1991. - №2. - С.69-78.

19. Масловская Л.В. Об условиях применимости обобщенного алгоритма Холесского // ЖВМ и МФ. - 1992. - Т.32, №3. - С.330-317.

20. Кобозева А.А., Масловская Л.В. Обобщенный алгоритм Холесского в задачах теории пластин и оболочек // ЖВМ и МФ. - 1992. - Т.32, № . - С.

Подп. к печати 8.12.92.г. Формат 60 х 84 1/16.
Об"ем 2,0 п.л. Заказ № 5349. Тираж 100 экз. Бесплатно.
Гортипография Одесского облполиграфиздата, цех № 3.
Ленина, 49.