МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Билущак Галина Ивановна

Винеровские интегралы в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных и их применение

01.01.02 - дифференциальные уравнения

01.01.01 - математический анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и программирования Львовского политехнического института

Научные руководители: доктор физико-математических наук, проф., академик АН Украины Королюк В.С.

кандидат физико-математических наук, доцент Козак П.П.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, ст. научный сотрудник Пташник Б.И.

кандидат физико-математических наук, доцент Ус Г.Ф.

Ведущая организация: Институт прикладной математики и механики АН Украины (г. Донецк).

Защита диссертации состоится "18" января 1993 г. в 14 часов в ауд. 43 на заседании специализированного совета К 068.18.11 при Киевском государственном университете им. Т.Г.Шевченко по адресу:
252127, г. Киев - 127, проспект Академика Глушкова, 6, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского государственного университета.

Автореферат разослан "15" декабря 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Сущанский В.И.

АБ-26,687

Общая характеристика.

Актуальность темы. Диссертация посвящена винеровским интегралам в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных и их применениям к решению систем интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Понятие интеграла Винера, введенное в 20-х годах XX ст., обобщалось многими авторами на случай пространства функций нескольких переменных и на декартовы произведения пространств (Т.Китагава, Дж.Йе, И.М.Ковальчик, Т.Тобиас, П.П.Козак и др.). Глубокие результаты по теории и применению весьма общих континуальных интегралов получены Ю.Л.Далецким. С.В.Фоминым доказана классическая теорема о включении интеграла по мере Винера в общую теорию абстрактного интеграла Лебега, а Е.В.Майковым показана неэквивалентность определений винеровского интеграла - интеграла по мере Винера и интеграла Винера, как предела многократных интегралов. Построение интеграла Винера по схеме Даниэля, технически более простой осуществлено Г.Е.Шиловым, а в работе Г.Е.Шилова и Фан Дык Тиня получены очень важные результаты, позволяющие сводить интеграл Винера к интегралу по гауссовской мере в пространстве всех числовых последовательностей. Результаты исследований по винеровской мере получили развитие в теории гауссовских мер в работах В.В.Баклана, А.Д.Шаташвили, Х.-С.Го и др. Интегрирование по винеровской мере широко применяется в теории вероятностей, в теории интегральных, дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений и систем. В работах Р.Камерона, В.Мартина, Т.Острома, М.Каца и др. изучались связи винеровских интегралов с дифференциальными и интегральными уравнениями. Вычислениям винеровских интегралов посвящены работы В.С.Владимирова, А.В.Сульдина, В.И.Ладохина, И.М.Гельфанда, Н.Н. Ченцова, А.С.Фролова, Е.А.Беговатова, Л.А.Яновича, А.Д.Егорова, П.И.Соболевского и др. Метод континуального интегрирования является удобным аппаратом для исследования многих вопросов теории вероятностей. Важные результаты в этом направлении получены И.И. Гихманом, А.В.Скороходом, Р.А.Минлосом, П.Леви, Ю.А.Розановым и др. Приложениям континуального интегрирования в квантовой физике посвящены работы Н.Н.Боголюбова, И.М.Гельфанда, А.М.Яглома, Р.А. Минлоса и др. Таким образом, теория и применения винеровских интегралов в пространствах функций конечного числа переменных достаточно хорошо разработана.

В последние годы в связи с проблематикой и успехами квантовой теории поля и с чисто математическим желанием осмыслить ситуацию в анализе, изучающем функции точки бесконечномерного пространства значительно возрос интерес к анализу функций бесконечного числа переменных. В частности, важные результаты получены здесь в работах Ю.М.Березанского, Ю.Г.Кондратьева, С.В.Фомина, Н.Н.Фролова, Ю.С.Самойленко, Г.Ф.Уса, В.И.Горбачук и др.

Представляет интерес обобщение понятия винеровской меры на случай пространства функций бесконечного числа переменных, что существенно расширит классы задач, которые решаются с помощью таких мер. Это и предлагается в данной диссертационной работе.

Научная новизна. В диссертации впервые введена винеровская мера в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных C^0_∞, которая обобщается на случай декартового произведения $C^0_{n,\infty}$ этих пространств. Интеграл по введенной мере $W(dx)$ называется винеровким интегралом в C^0_∞. Получены формулы преобразования этого интеграла при сдвиге, линейном и нелинейном преобразованиях пространств. Эти результаты были использованы для представления решений систем линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма и Вольтерра второго рода, а также систем линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений посредством винеровских интегралов в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных.

Практическая ценность. Практически задачи с функциями бесконечного числа переменных возникают при описании процессов, зависящих от изменяющегося в ходе развития процесса количества параметров, например, в квантовой теории поля, в математической статистике и др. Результаты диссертационной работы дают возможность представлять решения таких задач посредством винеровских интегралов.

Аппробация работы. Результаты работы докладывались в 1983-1991 годах на Всесоюзном семинаре "Распознавание и оптимальное управление развитием систем / Славское, Львовской обл., 1988г./, республиканской конференции "Эволюционные стохастические системы: теория и применение в физике и биологии" / Кацивели, 1989г./, на семинаре при Западном Научном Центре АН УССР и семинарах по дифференциальным уравнениям Львовского и Киевского Госуниверситетов, а также на научно-технических конференциях и семинарах Львовского политехнического института в 1984-1989 г.г.

Публикация результатов исследований. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I - 5].

Структура и основные положения диссертации. Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации 96 страниц машинописного текста. Библиография содержит I02 наименования.

Во введении дан краткий обзор работ по данной тематике и анализ основных результатов диссертации.

В первой главе вводится понятие винеровской меры в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных и на декартовом произведении пространств, рассматриваются преобразования этой меры при линейных и нелинейных заменах переменных. При этом существенно используется тот факт, что винеровский интеграл в пространстве функций бесконечного числа переменных выражается через предел последовательности винеровских интегралов в пространствах функций конечного числа переменных.

В § I.I дано определение винеровской меры и соответствующего интеграла в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных, а также кратного винеровского интеграла на декартовом произведении этих пространств. Для этого рассматривается пространство C^0_∞ всех вещественных непрерывных функций бесконечного числа переменных, определенных на $Q_\infty = \{0 \le t_k \le 1,\ k=\overline{1,\infty}\}$, обращающихся в нуль на координатных гранях, с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in Q_\infty}|x(t)|$. В этом пространстве, в отличие от пространств функций конечного числа переменных, понятие винеровской меры вводится как предел последовательности мер в пространствах функций конечного числа переменных. Эту меру обозначим символом $W(dx)$. Винеровская мера в декартовом произведении пространств $C^0_{n,\infty} = C^0_\infty \times \ldots \times C^0_\infty$ равна произведению винеровских мер в C^0_∞. Интеграл по этой мере обозначим $\int\limits_{C^0_{n,\infty}} \mathcal{F}(x) W(dx)$. Класс интегрируемых на $C^0_{n,\infty}$ функционалов обозначим через $L_1(C^0_{n,\infty})$, а класс функционалов, удовлетворяющих условию $\int\limits_{C^0_{n,\infty}} |\mathcal{F}(x)|^2 W(dx) < \infty$ – через $L_2(C^0_{n,\infty})$.

Рассмотрим проектор $P_m : C^0_{n,\infty} \to C^0_{n,m} = C^0_m \times \ldots \times C^0_m$ такой, что $P_m x = P_m(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = x_m(t_{(m)}) \equiv$ $\equiv (x_1(t_{(m)}), \ldots\ x_n(t_{(m)}))$, $t \equiv (t_1, \ldots, t_m, \ldots)$, $t_{(m)} \equiv (t_1, \ldots, t_m)$.

Функционалу $\mathcal{F}(x)$, определенному на $C^0_{n,\infty}$ соответствует на $C^0_{n,m}$ функционал $\mathcal{F}_m(x_m) = \mathcal{F}(P_m)$.

Показывается, что если функционал $\mathcal{F}(x)$ непрерывен, а функционалы $\mathcal{F}_m(x_m)$ ограничены в совокупности интегрируемым функционалом, то имеет место равенство

$$\int\limits_{C^0_{n,\infty}} \mathcal{F}(x)\, W(dx) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{C^0_{n,m}} \mathcal{F}_m(x_m)\, W(dx_m), \tag{I}$$

где $W(dx_m)$ - сужение меры $W(dx)$ на $C^0_{n,m}$.

В § I.2 рассматриваются понятия функций ограниченной вариации, интеграла Римана-Стилтьеса и обобщенного интеграла Стилтьеса.в C^0_{∞}.

§ I.3 посвящен преобразованию кратных винеровских интегралов при сдвиге пространства. Здесь же обобщается известная теорема Пэли-Винера.

В § I.4 рассматриваются преобразования кратного винеровского интеграла при линейных заменах переменных в $C^0_{n,\infty}$, задающихся интегральными операторами Фредгольма второго рода

$$y_i(t) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t,s)\, x_j(s)\, ds \qquad (i=\overline{1,n}) \tag{2}$$

и Вольтерра второго рода.

В § I.5 устанавливаются формулы преобразований кратных винеровских интегралов при нелинейных заменах вида

$$y_i(t) = x_i(t) + A_i(x;t) \qquad (i=\overline{1,n}), \tag{3}$$

где $A_i(x;t)$ $(i=\overline{1,n})$ - определенные на $C^0_{n,\infty} \times Q_\infty$ нелинейные функционалы как с гладкими, так и с полугладкими вариациями.

Глава II посвящена представлению решений систем линейных интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в виде кратных винеровских интегралов.

В § 2.I представлены решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Следуя Т.Острому, решение системы

$$u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t,s)\, u_j(s)\, ds = f_i(t) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{4}$$

представлено / теорема 2.I/ в виде

$$u_i(t)=\int\limits_{C^0_{n,\infty}} x_i(t)\,\rho(x)\,W(dx) \quad (i=\overline{1,n}), \tag{5}$$

где $\rho(x)$ - плотность винеровской меры, которая определяется рассмотренным выше линейным преобразованием пространства $C^0_{n,\infty}$.

Аналогичное представление / теорема 2.2 / справедливо для решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \rho_{ij}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t) \quad (i=\overline{1,n}). \tag{6}$$

§ 2.2 посвящен представлению решений характеристической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений. Так, например / теорема 2.4 /, решение задачи

$$\mathcal{D}_{t}^{n_i}\left[u_i(t)\right]+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{\nu^j_\tau=\overline{1,n^j_\tau}\\ \tau=\overline{1,\infty}}} a^{ij}_{\nu_i}(t)\,\mathcal{D}_{t}^{n_j-\nu_j}\left[u_i(t)\right]= \tag{7}$$

$$=f_i(t) \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\left.\frac{\partial^{\ell^i_\tau} u_i}{\partial t_\tau^{\ell^i_\tau}}\right|_{t_\tau=0}=0 \qquad \left(\tau=\overline{1,\infty},\ \ell^i_\tau=\overline{0,n^i_\tau-1},\ i=\overline{1,n}\right) \tag{8}$$

выражается формулой

$$u_i(t)=\int\limits_0^t\prod_{\tau=1}^{\infty}\frac{(t_\tau-s_\tau)^{\nu^i_\tau-1}}{(\nu^i_\tau-1)!}\,\varphi_i(s)\,ds \quad (i=\overline{1,n}), \tag{9}$$

где

$$\varphi_i(s)=\int\limits_{C^0_{n,\infty}} x_i(s)\,\rho(x)\,W(dx) \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\rho(x) = \Delta \cdot \exp\Big\{ -\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\infty} \{\mathcal{D}_{s'}[f_i(s)]\}^2 ds + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\infty} \{\mathcal{D}_{s'}[f_i(s)]\} d_s \mathcal{F}_i(x;s) - \Phi(x) \Big\}, \tag{11}$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\infty} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_{t'}\Big[\int_0^t K_{ij}(t,s) x_j(s) ds\Big] \Big\}^2 dt + 2\sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q_\infty} \Big\{\mathcal{D}_{t'}\Big[\int_0^t K_{ij}(t,s) x_j(s) ds\Big]\Big\} dx_i(t), \tag{12}$$

$$\mathcal{F}_i(x;t) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_0^t K_{ij}(t,s) x_j(s) ds\Big] \quad (i=\overline{1,n}), \tag{13}$$

$$K_{ij}(t,s) = \sum_{\substack{\nu_\tau^i = \overline{1,n_\tau^i} \\ \tau=\overline{1,\infty}}} a^{ij}_{\nu^i} \prod_{\tau=1}^{\infty} \frac{(t_\tau - s_\tau)^{\nu_\tau^i - 1}}{(\nu_\tau^i - 1)!} \quad (i,j=\overline{1,n}), \tag{14}$$

$$\Delta = \exp\Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\infty} a_1^{ii}(t)\, dt \Big\} \tag{15}$$

В § 2.3 получены формулы, выражающие решения характеристических задач для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений / теоремы 2.5 – 2.8 / в виде кратных винеровских интегралов.

В главе III решения систем нелинейных интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений представлены посредством кратных винеровских интегралов.

§ 3.I посвящен представлению решений систем нелинейных интегральных уравнений в виде ряда Фурье-Эрмита, коэффициенты которого выражаются постерством кратных винеровских интегралов, что является обобщением результатов Р.Камерона, В.Мартина и Дж. Шапиро. Для этого понятие ряда Фурье-Эрмита, введенное Р.Камероном и В.Мартином, обобщается на случай пространства $C^0_{n,\infty}$.

Так, решение системы нелинейных уравнений

$$x_i(t)+A_i(x;t)=y_i(t) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{I6}$$

представлено / теорема 3.I) в виде ряда Фурье по системе ортонормальных функционалов

$$x_i(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k^1,\ldots,k^N=0}^{N}\Psi_{k^1,\ldots,k^N}(y)\,A^i_{k^1,\ldots,k^N}(t) \quad (i=\overline{1,n}), \tag{I7}$$

где

$$A^i_{k^1,\ldots k^N}(t)=\int\limits_{C^0_{n,\infty}} x_i(t)\,\Psi_{k^1,\ldots,k^N}\left[G_1(x;\cdot),\ldots,G_n(x;\cdot)\right]\times$$

$$\times\,\rho(x)\,W(dx) \quad (i=\overline{1,n}); \tag{I8}$$

$$G_i(x;t)=x_i(t)+A_i(x;t) \quad (i=\overline{1,n}). \tag{I9}$$

Как частный случай системы (I6), рассматривается решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра / теорема 3.2 /

$$x_i(t)+\int_0^t F_i(x(s),s,t)\,ds=f_i(t) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{20}$$

Решение системы (20) выражается формулой (I7), где

$$A^{i}_{k^1,\ldots,k^N}(t)=\int\limits_{C^0_{n,\infty}} z_i(t)\cdot\Psi_{k^1,\ldots,k^N}\Big[z_1+\int\limits_0^{(\cdot)}\mathcal{F}_1(z,\cdot,s)\,ds;\ldots$$

$$\ldots;z_n+\int\limits_0^{(\cdot)}\mathcal{F}_n(z,\cdot,s)\,ds\Big]\rho(z)\,W(dz)\quad(i=\overline{1,n}),\tag{21}$$

$$\rho(z)=\exp\{-\mathcal{P}(z)\}\,\Delta(z),\tag{22}$$

$$\mathcal{P}(z)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_\infty}\Big\{\mathcal{D}_{t^1}\Big[\int\limits_0^t\mathcal{F}_i(t,s,z)\,ds\Big]\Big\}^2dt+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_\infty}\Big\{\mathcal{D}_{t^1}\Big[\int\limits_0^t\mathcal{F}_i(t,s,z)\,ds\Big]\Big\}dz_i(t),\tag{23}$$

$$\Delta(z)=\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{Q_\infty}\Big[\frac{\partial}{\partial u_j}\mathcal{F}_j(t,s,u(s))\Big]dt\Big\}\tag{24}$$

Аналогичные формулы, выражающие решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в виде рядов Фурье установлены в § 3.2 / теоремы 3.3 и 3.4 /.

Такие же представления решений для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений получены в § 3.3 / теоремы 3.5 и 3.6 /.

Основные положения диссертации опубликованы в работах:

1. Билущак Г.И., Козак П.П. Винеровская мера в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных // ДАН УССР.- Сер.А.- 1984.- № 8.-С. 5 - 8.
2. Билущак Г.И., Козак П.П. Представление решений линейного интегрального уравнения в виде винеровского интеграла в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных // ДАН УССР.- Сер.А.- 1986.- № 4.- С. 3 - 6.

3. Билущак Г.И. Обобщение теоремы Пэли-Винера на случай пространства непрерывных функций бесконечного числа переменных //Вест. ЛПИ.- 1986.- № 203.- С. 12 - 14.
4. Билущак Г.И. Кратный винеровский интеграл в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных // Укр. матем. журн.- 1987.- 39, № 4.- С. 418 - 424.
5. Билущак Г.И. Преобразование кратного винеровского интеграла в провтранстве непрерывных функций бесконечного числа переменных при нелинейном преобразовании пространства // Деп. Укр.НИИНТИ.- 10.10.88 № 2574-Ук 88.

Підп. до друку 9.06 1992. Формат 60x84 I/16
Папір друкар. № 2. Офс. друк. Умов.друк.арк. /
Умовн.фарб.-відб. 1 Умовно-видав. арк. 0,93
Тираж 100 прим. Зам. 81 . Безплатно

ЛПІ 290646 Львів-13, Миру, 12

Дільниця оперативного друку дослідного заводу ЛПІ
Львів, вул. І-го Травня, 286