АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ИССА Салем Абдалла

УПРАВЛЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

01.02.01. - теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк-1992

Работа выполнена в Донецком государственном университете.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.М.Ковалев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор А.Я.Савченко

доктор физико-математических наук И.Г.Лобас

Ведущая организация:
Харьковский государственный университет.

Защита состоится "13" января 1993 г. в 15 час. на заседании специализированного совета К 016.46.01 по присуждению ученой степени кандидата физико- математических наук при Институте прикладной математики и механики АН Украины по адресу: 340114, г.Донецк-114, ул. Розы Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики АН Украины.

Автореферат разослан "11" декабря 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук А.И.Марковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки является одной из важнейших проблем динамики. Ее исследованием занимались и продолжают заниматься многие авторы. Первые работы были посвящены вопросам аналитического построения решений и их геометрической интерпретации. Позднее много внимания было уделено изучению устойчивости различных движений твердого тела. Последние несколько десятилетий большое развитие получили задачи активного управления вращательным движением, чему в значительной мере способствовало интенсивное освоение космического пространства. В качестве управляющих устройств в задачах управления космическими летательными аппаратами наибольшее распространение получили реактивные двигатели, маховики и двустепенные гироскопы - гиродины. Возникающие в процессе исследования задачи по своей сути относятся к классу задач управления и стабилизации по части переменных, что наряду с нелинейностью является источником дополнительных трудностей и требует развития новых и совершенствования уже известных методов.

Понятие управляемости является одним из основных динамических свойств систем. Наряду с управляемостью (по всем переменным), где фундаментальные результаты для линейных систем принадлежат Р.Е.Калману, исследуется большое число различных видов управляемости. Достаточное развитие получила задача об управляемости по части переменных, что нашло отражение в монографиях Р.Габасова и Ф.Кирилловой, А.А.Красовского, Н.Н.Красовского, Я.Н.Ройтенберга. Решение задачи управляемости часто дополняется исследованием устойчивости полученного решения. Постановка задачи об устойчивости по отношению к части переменных принадлежит А.М.Ляпунову. Ввиду теоретической и прикладной важности она привлекла внимание ученых и получила достаточно большое развитие, став самостоятельным разделом теории устойчивости. Укажем монографии В.И.Воротникова, В.В.Румянцева и А.С.Озиранера, а также работы А.С.Андреева, К.Кордуняну, К.Ризито, К.Пайффера. В задаче стабилизации по части переменных хорошо разработан метод функций Ляпунова и вопросы стабилизируемости по первому приближению, полностью решена задача о стабилизируемости по части переменных линейных автономных систем (В.И.Воротников, В.И. Зубов, В.И.Коробов, В.В.Румянцев, Е.Я.Смирнов).

Практически все теоретические результаты использовались, а часто и инициировались при изучении различных вопросов управления вращательным движением твердого тела. Подробно изучена эта проблема в школе В.И.Зубова, где развиты методы стабилизации и решены различные задачи управления с помощью реактивных двигателей, маховиков и гироскопов, отраженные в монографиях В.И.Зубова, Е.Я.Смирнова. Широкий круг вопросов активного управления ориентацией космических аппаратов рассмотрен в книгах В.В.Крементуло, П.Д.Крутько, Б.В.Раушенбаха.

Данная диссертация посвящена исследованию теоретических вопросов управляемости и стабилизируемости по части переменных линейных и нелинейных динамических систем и решению различных задач управления вращательным движением твердого тела при помощи реактивных двигателей, маховиков и гиродинов.

Цель работы - получение условий управляемости по части переменных линейных и нелинейных автономных динамических систем;
- получение условий стабилизируемости по части переменных линейных и нелинейных систем на основе понятия условной асимптотической устойчивости;
- исследование управляемости и стабилизируемости систем дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела под действием реактивной силы, маховиков и гиродинов.

Методы исследования. Исследования, проводимые в диссертационной работе, основаны на методах аналитической механики, теории управления и устойчивости движения. Использованы обобщенная теорема А.М.Ляпунова об условной устойчивости, метод А.М.Ковалева ориентированных многообразий в теории управления, уравнения В.И.Зубова и П.В.Харламова движения систем твердых тел.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:
- доказаны необходимые и достаточные условия управляемости по части переменных линейных автономных систем, получен ряд теорем о частичной управляемости нелинейных автономных систем;
- доказаны необходимые и достаточные условия стабилизируемости по части переменных линейных автономных систем и теорема о стабилизируемости по первому приближению нелинейных автономных систем, при этом определение частичной стабилизируемости опирается на понятие условной асимптотической устойчивости;
- выделены случаи управляемости и стабилизируемости в задачах управления вращательным движением твердого тела при помощи одного реактивного двигателя, одного маховика, одного гиродина.

<u>Практическая ценность.</u> Полученные в работе результаты могут быть использованы при разработке систем управления современными техническими объектами, включая искусственные спутники, космические летательные аппараты, роботы-манипуляторы и др.

<u>Апробация работы.</u> Основные результаты диссертации были доложены на Республиканской конференции "Динамика твердого тела и устойчивость движения" (Донецк, 1990 г.), на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Донецкого государственного университета и отдела прикладной механики Института прикладной математики и механики АН Украины.

<u>Структура диссертации.</u> Работа состоит из пяти глав, заключения, списка литературы из 56 наименований и содержит 117 страниц машинописного текста, 4 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

<u>Первая глава</u> является вводной. В ней рассмотрены актуальность тематики, история вопроса, предмет и метод исследования, дана краткая аннотация работы.

Во <u>второй главе</u> рассмотрены вопросы управляемости и стабилизируемости по части переменных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

где $x \in D \subseteq R^n$, $u = u(t) \subset U \subseteq R^m$, $t \in T = [0,\infty)$.

Для введения свойства управляемости по части переменных фазовый вектор разбивается на два подвектора $x^T = (x_\alpha^T, x_\beta^T)$, где $x_\alpha \in D_\alpha \subseteq R^\alpha$, $x_\beta \in D_\beta \subseteq R^\beta$. Принимается следующее определение.

Определение 1. Система (1) называется управляемой по переменной x_α в области D, если $\forall x_{\alpha 0}$, $x_{\alpha 1} \in D_\alpha$ существует момент $t_1 \in T$ и допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям $x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}$, $x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}$, $x(t) \in D$ при $0 \leq t \leq t_1$.

Изучение системы (1) опирается на анализ линеаризованной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{2}$$

Доказаны необходимые и достаточные условия управляемости системы (2) по координате $x_\alpha = a^T x$ и по переменной $x_\alpha = (a_1, \ldots, a_k)^T x$, выраженные в ранговой форме. Получены различные следствия и приведены иллюстративные примеры.

Исследование нелинейной системы (1) проводится методом ориентированных многообразий. Необходимые условия получены с использованием инвариантных многообразий систем управления. Для получения необходимых и достаточных условий вектор $f(x,u)$ представлен в виде линейной комбинации векторных полей $f_1(x),\ldots,f_s(x)$

$$f(x,u) = k_1(x,u)f_1(x) + \ldots + k_l(x,u)f_l(x) +$$

$$+ k_{l+1}(x,u)f_{l+1}(x) + \ldots + k_s(x,u)f_s(x),$$

где $k_{l+1}(x,u)\geqslant 0,\ldots,k_s(x,u)\geqslant 0$ $\forall (x,u)\in D\times U$, а коэффициенты $k_1(x,u),\ldots,k_l(x,u)$ принимают как положительные, так и отрицательные значения.

Доказана следующая теорема.

Теорема I. Если система (1) локально управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)x$, то система уравнений в частных производных

$$(f_i(x),\ \nabla V(x)) = \lambda_i(x)V(x) + G_i(x),$$

$$(G_1 = G_2 = \ldots = G_l = 0,\quad i = 1,\ldots,s)$$

не имеет решения $V(x)=\alpha^T x$ для любого $\alpha\in R^\alpha$ и любых непрерывных в D функций $\lambda_i(x)$ $(i = 1,\ldots,s)$ и знакопостоянных одного знака в D функций $G_j(x)$ $(j = l+1,\ldots,s)$.

Свойство стабилизируемости по части переменных исследуется на основе понятия условной устойчивости и вводится следующим определением.

Определение 2. Система (1) называется стабилизируемой по переменной x_α, если существует управление $u(x(t))$ такое, что соответствующее ему решение системы $\dot{x} = f(x,u(x))$ удовлетворяет условиям: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_{\alpha 0}= x_\alpha(0)$: $\|x_{\alpha 0}\|<\delta$ $\forall\ t>0$ $\|x_\alpha(t)\|<\varepsilon$; $x_\alpha(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Доказаны необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (2) по части переменных. С использованием обобщенной теоремы Ляпунова об условной устойчивости доказана теорема о стабилизируемости по первому приближению.

Теорема 2. Пусть линеаризованная система (2) стабилизируема по переменной x_α и $\varphi(x,u) = O(\|x\|,\|u\|)$. Тогда система $\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x,u)$ стабилизируема по переменной x_α.

В третьей главе исследуется задача о стабилизации равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси с помощью одного реактивного двигателя. Записаны уравнения возмущенного движения

$$\dot{x}_1 = a_1 u + a_1 x_2 x_3,$$

$$\dot{x}_2 = a_2 \omega x_3 + \alpha_2 u + a_2 x_1 x_3, \qquad (3)$$

$$\dot{x}_3 = a_3 \omega x_2 + \alpha_3 u + a_3 x_1 x_2,$$

где ω - угловая скорость равномерного вращения , a_i - динамические параметры, α_i - координаты единичного вектора момента реактивной силы.

Показано, что система (3) управляема и стабилизируема по линейному приближению, если ее параметры не удовлетворяют следующим условиям:

1. $\omega = 0$, 2. $\alpha_3 = 0$, 3. $\alpha_1 = 0$, 4. $a_2\alpha_3^2 - a_3\alpha_2^2 = 0$,

которые определяют критические случаи. Для исследования управляемости в этих случаях применены методы нелинейной теории и доказано, что система (3) управляема в случаях 1-3 за исключением значений $a_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, при которых , а также в случае 4, система (3) неуправляема. Причиной неуправляемости является существование инвариантных многообразий системы (3), которые соответствуют либо равномерным вращениям вокруг второй главной оси, либо движениям в плоскости $\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 = 0$.

Для исследования стабилизируемости применена теория критических случаев. Положение равновесия изучено с помощью теоремы Барбашина-Красовского. В качестве функции Ляпунова выбрана кинетическая энергия $2E = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2$, а в качестве стабилизирующего управления принято $u = -(A_1\alpha_1 x_1 + A_2\alpha_2 x_2 + A_3\alpha_3 x_3)$. Показано, что при $\alpha_1 \neq 0$ положение равновесия является стабилизируемым. В случаях 2,3 установлено, что при любом выборе управления в виде $u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \varphi(x_1, x_2, x_3)$, где функция φ нелинейно зависит от x, нулевое решение системы (3) нельзя сделать асимптотически устойчивым, можно лишь подобрать значения c_i так, что нулевое решение будет устойчиво неасимптотически. В случае 4 при приведении линеаризованной системы (3) к каноническому виду оказывается, что собственное значение λ, соответствущее неуправляемому подпространству, равно $\lambda = -a_2\alpha_3\alpha_2^{-1}\omega$ и, в отличие от предыдущих случаев, отлично от нуля. Поэтому вопрос о стабилизируемости решается по линейному приближению : $\lambda<0$ - движение стабилизируемо, $\lambda>0$ - движение нестабилизируемо.

Для управления ориентацией твердого тела динамические уравнения (3) рассмотрены совместно с кинематическими уравнениями Эйлера. В линейной постановке показано, что расширенная система управляема и стабилизируема при тех же условиях, что и система (3).

Четвертая глава посвящена задаче управления вращательным движением твердого тела при помощи одного маховика. Управление вращательным движением тела-носителя при помощи установленных на нем маховиков основано на перераспределении кинетического момента механической системы "носитель - управляющее устройство" между составляющими систему телами при изменении кинетического момента несомых тел. При этом суммарный кинетический момент тела-носителя и маховиков остается постоянным во время движения. Это приводит к неуправляемости (по всем переменным) системы уравнений, описывающей движение данной механической системы, и вызывает необходимость рассмотрения вопросов управляемости и стабилизируемости по части переменных.

В качестве опорного движения выбрано равномерное вращение тела-носителя вокруг первой главной оси при покоящемся маховике. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$A_1\dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2x_3 + (e_2x_3 - e_3x_2)x_4 - e_1u,$$

$$A_2\dot{x}_2 = (A_3 - A_1)(x_1 + \omega)x_3 + (e_3\omega + e_3x_1 - e_1x_3)x_4 - e_2u, \qquad (4)$$

$$A_3\dot{x}_3 = (A_1 - A_2)(x_1 + \omega)x_2 + (-e_2\omega + e_1x_2 - e_2x_1)x_4 - e\,u,$$

$$\dot{x}_4 = u,$$

где ω - угловая скорость равномерного вращения, A_i - моменты инерции, e_i - координаты единичного вектора оси вращения маховика.

Выпишем матрицы управляемоти Q линеаризованной системы (4). На основе ее анализа выделены четыре случая:

1. $\alpha \neq 0$: rank Q = 3
2. $\alpha = 0$, $e_2^2 + e_3^2 \neq 0$: rank Q = 2
3. $e_2^2 + e_3^2 = 0$: rank Q = 1
4. $\omega = 0$: rank Q = 1.

Здесь $\alpha = A_3(A_1 - A_3)e_2^2 + A_2(A_1 - A_2)e_3^2$.

Система (4) неуправляема по всем переменным. Для исходной системы представляет интерес изучение ее управляемости и стабилизируемости по отношению к угловой скорости тела-носителя, что для системы (4) соответствует управляемости и стабилизируемости по переменным x_1, x_2, x_3. Применяя результаты второй главы к исследованию линеаризованной системы, получаем, что система (4) в линейном приближении управляема в случаях 1, 2 при $e_1 \neq 0$, в остальных случаях система (4) в линейном приближении неуправляема по переменным x_1, x_2, x_3.

Исследование локальной управляемости системы (4) по переменным x_1, x_2, x_3 в окрестности положения равновесия $\omega = 0$ проведено с помощью теоремы 1. Анализ свелся к изучению вопроса о существовании решений $V = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$ у системы уравнений в частных производных

$$\frac{e_1}{A_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_4} = \lambda_1 V,$$

$$\frac{1}{A_1}\Big[(A_2 - A_3)x_2 x_3 + (e_2 x_3 - e_3 x_2)x_4\Big]\frac{\partial V}{\partial x_1} +$$

$$+ \frac{1}{A_2}\Big[(A_3 - A_1)x_3 x_1 + (e_3 x_1 - e_1 x_3)x_4\Big]\frac{\partial V}{\partial x_2} +$$

$$+ \frac{1}{A_3}\Big[(A_1 - A_2)x_1 x_2 + (e_1 x_2 - e_2 x_1)x_4\Big]\frac{\partial V}{\partial x_3} =$$

$$= \lambda_2 V + G(x_1 x_2 x_3 x_4),$$

где $\lambda_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\lambda_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$- непрерывные функции в некоторой окрестности нуля, а $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$ - знакопостоянная функция в той же окрестности.

Доказано, что данная система таких решений не допускает, и исследуемая система (4) является управляемой по угловой скорости тела-носителя при любом положении маховика относительно тела-носителя.

Для исследования стабилизируемости применена теорема 2. Доказано, что в случае 1, 2 возможна стабилизация по переменным x_1, x_2, x_3, случай 3 является критическим. Стабилизация положения равновесия (случай 4) изучена с помощью обобщения теоремы Барбашина-Красовского на задачи устойчивости по части переменных.

<u>Пятая глава</u> посвящена одному из наиболее эффективных способов управления вращательным движением твердого тела - при помощи

двустепенных гироскопов - гиродинов. В отличие от маховиков, влияние которых на суммарный кинетический момент осуществляется за счет их ускорения или торможения, изменения суммарного кинетического момента при использовании гиродинов происходит в основном за счет поворотов оси вращения ротора при поворотах гирокамеры в подвесе. Управлениями при этом являются проекции прикладываемых к рамке гироскопа моментов сил на соответствующие оси вращения. Уравнения движения тела-носителя с одним гиродином имеют пятый порядок и являются достаточно громоздкими. Рассмотрен случай динамически симметричной гирокамеры и сферического ротора. Вместо угловой скорости гирокамеры введена новая переменная λ, равная абсолютному кинетическому моменту гирокамеры относительно ее центра масс. Это позволило преобразовать уравнения движения к удобному виду

$$\theta_o\dot{\omega} = (\theta_o\omega + \lambda l_o)\times\omega + h\left[n\times\omega - k^T\omega l_o + l_o^T\omega k + \frac{\lambda k}{B}\right] - u l_o,$$

$$\dot{\lambda} = hk^T\omega + u,$$

$$B\dot{\varphi} = \lambda = Bl_o^T\omega,$$

$$k = k_o\cos\varphi - n_o\sin\varphi,\quad n = k_o\sin\varphi + n_o\cos\varphi,$$

где ω - угловая скорость тела-носителей, φ - угол поворота гирокамеры, h - кинетический момент ротора, θ_o - тензор инерции носителя с гироскопом, B - момент инерции гирокамеры с ротором относительно оси вращения гирокамеры, k_o, l_o, n_o - тройка взаимно ортогональных ортов, задающих начальное расположение гиродина в теле-носителе.

В качестве невозмущенного движения выбрано положение равновесия тела-носителя и гирокамеры. Записаны уравнения возмущенного движения. С использованием результатов второй главы показано, что в линейном приближении система уравнений возмущенного движения является неуправляемой и нестабилизируемой как по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, так и по переменным x_1, x_2, x_3. На основе теоремы 1 установлено, что для системы уравнений возмущенного движения выполнены необходимые условия локальной управляемости по угловым скоростям тела-носителя и гирокамеры (по переменным x_1, x_2, x_3, x_4).

В <u>заключении</u> дана сводка основных результатов диссертации:
- доказаны необходимые и достаточные условия управляемости по части переменных линейных и нелинейных автономных систем;
- доказаны необходимые и достаточные условия стабилизируемости по части переменных линейных автономных систем и теорема о стабилизи-

руемости по первому приближению нелинейных автономных систем;
- выделены случаи стабилизируемости равномерных вращений, изучена задача управления ориентацией твердого тела при помощи одного реактивного двигателя;
- указаны случаи управляемости и стабилизируемости по угловой скорости тела-носителя в задаче управления вращательным движением твердого тела при помощи одного маховика или одного гиродина.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла. Стабилизация равномерных вращений твердого тела // Динамика твердого тела и устойчивость движения: Тез. докл. Республиканская конференция (Донецк, 4-6 сентября 1990 г.). - Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1990. - С.41.

2. Исса Салем Абдалла. Управление угловым движением твердого тела при помощи гиродина // Исследование прецессионных и управляемых движений твердого тела: Препринт № 08, Донецк, Ин-т прикл. математики и механики АН Украины. - 1992. - С.35-41.

3. Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла. Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикл. механика. - 1992.- Т.28, №9. - С.83-89.

4. Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла. Стабилизация равномерных вращений твердого тела при помощи одного ротора // Механика твердого тела. - 1994.- Вып. 26(в печати).

Подписано в печать 02.12.92.
Усл..п.л. 0,75. Бумага писчая. Офсетная печать.
Формат 60x84/16. Заказ 988. 100экз. Бесплатно.
Р-т ИЭП АН Украины. 340048, г.Донецк, ул.Университетская,77.

Бесплатно.