

Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

КУШЛИК Ольга Іванівна

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З ЗАПІЗНЕННЯМ
ПРИ НАЯВНОСТІ ДИНАМІЧНИХ ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

076 26.697
Робота виконана на кафедрі інтегральних і диференціальних рівнянь Київського університету.

Науковий керівник - *академік*
член-кореспондент АН України,
професор Шеничний Б.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Маргинюк Д.І.
кандидат фізико-математичних наук
Ненахов Е.І.

Провідна організація - Інститут математики АН України.

Захист відбудеться "15" лютого 1993 р. на
засіданні спеціалізованої ради К 068.18.II у Київському
університеті ім.Тараса Шевченка за адресою:
252127, м.Київ - 127, проспект Академіка Глушкова, 6.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету
(вул. Володимирська, 62).

Автореферат розісланий "13" січня 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

В.І.

Суцанський В.І.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00825822 (R)

АН УРСР
АН УРСР

В-26.697
ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Розвиток теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументом спричинений потребою розв'язання ряду практичних задач. Це - задачі регулювання в економіці, еволюційні задачі в біології, задачі теорії керування. Останні часто зводяться до систем диференціальних рівнянь, в яких права частина є функцією, що залежить від минулих станів системи та від керування з певної припустимої множини. На такі задачі був поширений принцип максимуму Понтрягіна - фундаментальний результат в теорії оптимального керування для рівнянь без відхилень. Перші роботи для систем з запізненням виконані Г.Харатішвілі та І.Ожигановою (1964, 1968 р.): Функція ж у початкових умовах в цих та багатьох інших дослідників вважається незалежною від керування. Тому постає задача узагальнити принцип максимуму для рівнянь з керованою початковою функцією. Для одного класу диференціальних систем це зроблено в дисертаційній роботі.

Останнім часом опубліковано роботи, в яких вивчаються задачі оптимального керування системами змінної структури при наявності різноманітних, але фіксованих, фазових обмежень на рух об'єкту. Це роботи Л.Г.Ащепкова і Ю.І.Бердишева (1986, 1987 р.). Розглянена також задача оптимального керування лінійним об'єктом змінної структури, у якій фазові обмеження на траєкторію вимагають досягнення нею в деяких нефіксованих моментах часу заданих множин. Це робота Б.М.Пшеничного і В.Г.Покотила (1990 р.).

Дисертаційна робота присвячена обґрунтуванню принципу максимуму для систем з запізненням і керованою початковою функцією. Досліджені динамічні фазові обмеження на траєкторію руху об'єкту. Розглядаються системи лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь з запізненням, які залежать від передісторії, що дозволяє для конкретних задач вибирати початкову функцію. Для таких систем проведено дослідження траєкторії руху при наявності динамічних нефіксованих фазових обмежень. Одержано необхідні умови оптимальності керувань в класах припустимих керувань.

Мета роботи - одержати необхідні умови оптимальних керувань в припустимих класах типу принципу максимуму для систем з запізненням, керованою початковою функцією і наявністю динамічних фазових обмежень на траєкторію руху об'єкту.

Методи дослідження базуються:

- на використанні методів теорії спряжених конусів, задач опуклого програмування з фазовими обмеженнями для лінійних систем рівнянь;

- на дослідженні функціоналів з використанням "голкових" варіацій спеціального вигляду для нелінійних систем рівнянь.

Наукова новизна. Досліджена задача оптимального керування системами з запізненням і з керованою початковою функцією для л'ячійного критерію якості при змінних в часі фазових обмеженнях на рух об'єкту. Доведено необхідні умови оптимальності керувань для таких систем. Для лінійних систем диференціальних рівнянь з запізненням в явному вигляді одержано вектор-функції, для яких виконуються умови принципу максимуму. Новизна цих результатів зумовлена новизною постановки вказаних задач.

Теоретична і прикладна цінність. Одержані результати можуть бути використані при дослідженні задач оптимального керування для систем диференціальних систем з запізненням аргументом складнішої структури, з керуванням, яке залежить від передісторії. Для систем лінійних рівнянь результати можуть бути використані при побудові обчислювальних алгоритмів розв'язання прикладних задач.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися на науковій конференції "Розривні динамічні системи" (м.Івано-Франківськ, 1990 р., м.Ужгород, 1991 р.), на семінарах з диференціальних рівнянь у Київському університеті.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6] .

Структура і обсяг дисертації. Робота складається з вступу, двох глав, списку літератури із найменувань. Обсяг сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі зроблено короткий огляд літератури, пов'язаної з тематикою дисертації. Показана актуальність проведених досліджень, їхній зв'язок з іншими роботами, стисло викладені основні результати.

Перша глава присвячена дослідженню задач оптимального керування для лінійних систем диференціальних рівнянь з запізненням.

П.І.І має допоміжний характер. Для лінійної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і постійним відхиленням аргументу виписано розв'язок у вигляді визначеного інтегралу з допомогою матриці Коші. На скінченному проміжку часу побудовано спряжену систему диференціальних рівнянь з випередженням.

В п.І.2 доведено необхідні умови оптимальності керування для функціоналу

$$\int_0^T (\psi(t), x(t)) dt,$$

де $\psi(t)$ - задана неперервна n -вимірною функцією, $x(t)$ - розв'язок системи

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t-\Delta) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(t) &\equiv 0, \quad -\Delta \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

при таких умовах: A, B - квадратні $(n \times n)$ -матриці, $\Delta = \text{const.}$, $u(t)$ - вимірною функцією, задана на опуклій компактній множині $U \subset \mathbb{R}^n$, T - фіксований момент часу.

Теорема І.2.І. Для того щоб припустиме керування $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, було оптимальним необхідно існування вектор-функції

$$\Phi^*(t) = g^*(t) + \int_0^T g^*(\tau) AK(t, \tau) d\tau + \int_0^T g^*(\tau) BK(\tau - \Delta, t) d\tau,$$

де $g^*(t) = \int_t^T \psi^*(\tau) d\tau$, для якої виконується умова

$$\min_{u \in U} \int_0^T \Phi^*(t) u(t) dt = \int_0^T \Phi^*(t) u_0(t) dt.$$

Показано, що умова оптимального керування рівносильна побудові спряженого конуса до конуса припустимих напрямків.

В рамках теорії спряжених конусів одержано результати в п.І.3 в припущенні, що початкова функція є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = Cx(t) + Dv(t), \quad -\Delta \leq t \leq 0,$$

де $x(-\Delta) = \text{const.}$, C - $(n \times n)$ -матриця, D - $(n \times r)$ -матриця, $v(t)$ - припустиме керування, задане на опуклій компактній під-

множині $V \subset \mathbb{R}^n$. Доведено теорему, яка дає необхідні і достатні умови оптимальності керувань $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, і $v(t)$, $-\Delta \leq t \leq 0$, в припустимих класах. Виписана система спряжених диференціальних рівнянь для одержаних в явному вигляді функцій $\Phi_1^*(t) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_2^*(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi}_1^*(t) = -C^* \Phi_1^*(t) - B^* \Phi_2^*(t + \Delta), \quad -\Delta \leq t \leq 0, \\ \dot{\Phi}_2^*(t) = -y(t) - A^* \Phi_2^*(t) - B^* \Phi_2^*(t + \Delta), \quad 0 \leq t \leq T - \Delta, \\ \dot{\Phi}_2^*(t) = -y(t) - A^* \Phi_2^*(t), \quad T - \Delta \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

В п.І.4 досліджується задача оптимального керування при наявності лінійних фазових обмежень на траєкторію руху.

В п.І.5 розглянемо динамічні фазові обмеження. В просторі $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ задаються непорожні множини

$$N_i = \{(x, t) : W_i(x, t) \leq 0\} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad N_i \cap N_j = \emptyset,$$

де $W_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$ - двічі диференційовна функція своїх аргументів. В деякі моменти часу об'єкт досягає кожну з описаних вище множин. Рух об'єкту описується системою диференціальних рівнянь з запізненням і керованою початковою функцією. Ставиться задача: визначити такі керування і знайти оптимальні моменти часу, щоб на траєкторії, яка їм відповідає, досягався мінімум функціоналу

$$\int_0^T (y(t), x(t)) dt$$

і ця траєкторія побувала на кожній вказаній вище множині.

Теорема І.5.І. Для того щоб припустимі керування $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, і $v_0(t)$, $-\Delta \leq t \leq 0$, були розв'язком сформульованої вище задачі необхідне існування чисел $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{k=0}^m \lambda_k > 0$, вектор-функцій $\Phi_1^*(\tau) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_2^*(\tau) \in \mathbb{R}^n$, що виконуються:
І) умови

$$\int_{-\Delta}^0 \Phi_1^*(\tau) \otimes v_0(\tau) d\tau = \min_{v(\tau) \in V} \int_{-\Delta}^0 \Phi_1^*(\tau) \otimes v(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^T \Phi_2^*(\tau) u(\tau) d\tau = \min_{u(\tau) \in U} \int_0^T \Phi_2^*(\tau) u(\tau) d\tau$$

для майже всіх τ, τ визначається на відповідних інтервалах зміни;

2) $\Phi_2(t) = 0$;

3) $\Phi_2(t_i+0) - \Phi_2(t_i-0) = \lambda_i \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x}, i=1, \dots, m$;

4) оптимальні моменти часу задовольняють рівності

$$\frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial t} + \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x} \dot{x}_0(t_i) = 0, i=1, \dots, m.$$

Наступний пункт узагальнює одержані результати для систем диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями аргументу

$$\dot{x}(t) = \sum_{\ell=0}^s A_\ell x(t-\Delta_\ell) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$A_\ell, \ell=0, \dots, s$, - квадратні $(n \times n)$ -матриці; дійсні постійні величини $\Delta_\ell, \ell=0, \dots, s$, є впорядкованими: $0 = \Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_s$.

В п.І.7 одержано необхідні умови оптимального керування системою

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\Delta) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x(t) \equiv 0, \quad -\Delta \leq t \leq 0,$$

в припущеннях п.І.2 при наявності фазового обмеження на рух об'єкту з розривною похідною траєкторії руху. В просторі $R^n \times [0, T]$ задана непорожня множина $M = \{(x, t) : W(x, t) \leq 0\}, x(t) \in R^n, t \in (0, T)$, де $W(x, t)$ - диференційовна функція своїх аргументів.

Існує хоча б одне значення $t_1 \in (0, T]$, для якого виконується нерівність

$$W(x(t_1), t_1) \leq 0,$$

де $x(t)$ - траєкторія руху об'єкту, причому

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \uparrow t_1} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}^+(t_1), \\ \lim_{t \downarrow t_1} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}^-(t_1). \end{array} \right.$$

В другій главі доводяться необхідні умови оптимальності керувань в припустимих класах з динамічними фазовими обмеженнями для нелінійних систем з запізненням. Розглядається задача синтезу оптимальних керувань для деяких лінійних систем рівнянь з фазовим обмеженням.

В п.2.1 розглядається система нелінійних диференціальних рівнянь з запізненням

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x(t) \equiv 0, \quad -h \leq t \leq 0,$$

де $x(t)$ - n -вимірний вектор в просторі R^n , $h > 0$, $u(t)$ - припустиме керування, задане на множині $U \subset R^m$. Функція $f(x, y, u, t)$, де $y(t) = x(t-h)$ є визначеною для всіх значень аргументу, неперервно-диференційовною по x, y і виконуються нерівності

$$\|f(\bar{x}, \bar{y}, u, t) - f(x, y, u, t)\| \leq L_1 (\|\bar{x} - x\| + \|\bar{y} - y\|),$$

$$\|f(x, y, u, t)\| \leq L_2,$$

$$\|A_{\bar{u}} f(x, y, u, t)\| \leq G \|\bar{u} - u\|,$$

$(\bar{x}, \bar{y}, u, t) \in R^n$, $(x, y, u, t) \in R^n$, L_1, L_2, G - деякі константи.

Нехай в просторі $R^n \times [0, T]$ задана непорожня множина

$$M_0 = \{(x, t) : w(x, t) \leq 0\}, \quad x(t) \in R^n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

і функція $w(x, t)$ є двічі диференційовною функцією своїх аргументів. Траєкторія системи досягає описану множину хоча б в

одні момент часу. Серед розв'язків системи знайти оптимальну траєкторію, яка задовольняє фазове обмеження $w(x(t_1), t_1) \leq 0$

і визначити оптимальний момент часу, які мінімізують функціонал

$$I = \int_0^T (z(t), x(t)) dt,$$

де $z(t)$ - задана неперервна функція, $z(t) \in \mathbb{R}^n$. Доведена теорема.

Теорема 2.1.1. Існують числа $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$, що вдовольняють оптимальних $u(t)$, $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, і траєкторії спряженого рівняння

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = - \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t), \psi(t), u_0(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial H(x_0(t+h), y_0(t+h), \psi(t+h), u_0(t+h), t+h)}{\partial y}, \quad 0 \leq t < T-h,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t), \psi(t), u_0(t), t)}{\partial x}, \quad T-h \leq t \leq T,$$

де $H(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t) = \psi^*(t) f(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t)$, виконуються:

1) умови максимуму

$$\max_{u \in U} H(x_0(t), y_0(t), \psi(t), u(t), t) = H(x_0(t), y_0(t), \psi(t), u_0(t), t);$$

2) умова стрибка

$$\psi(t_1 - 0) = \psi(t_1 + 0) + \lambda_1 \frac{\partial w(x_0(t_1), t_1)}{\partial x};$$

3) оптимальний момент часу задовольняє рівняння

$$\frac{\partial w(x_0(t_1), t_1)}{\partial t} + \frac{\partial w(x_0(t_1), t_1)}{\partial x} \cdot \dot{x}_0(t_1) = 0;$$

$$4) \text{ в кінцевий момент часу } T \quad \psi(T) = \int_0^T z(t) dt.$$

Доведення теореми ґрунтується на використанні формул приросту функціоналів $I = \int_0^T (z(t), x(t)) dt$ і $I_1 = W(x(t), t)$

і спеціального "голкового" приросту керування.

Результат поширюється для багатьох фазових обмежень вигляду $W_i(x(t_i), t_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$

В п. 2.2 доведено необхідні умови оптимальності керувань в припустимих класах з керованою початковою функцією, яка є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = g(x(t), v(t), t), \quad -h \leq t \leq 0,$$

$x(-h) = \text{const.}$, $v(t)$ - припустиме керування на множині V , $V \subset \mathcal{R}^m$; $g(x, v, t)$ - неперервна n -вимірна вектор-функція, причому

$$\|g(\bar{x}, v, t) - g(x, v, t)\| \leq L_3 \| \bar{x} - x \|;$$

$$\|g(x, v, t)\| \leq L_4;$$

$$\| \Delta_{\bar{v}} g(x, v, t) \| \leq L_2 \| \bar{v} - v \|,$$

L_3, L_4, L_2 - деякі константи.

Задача розглядається при наявності фазових обмежень зі змінними моментами часу. Для такої задачі використовується форма запису необхідних умов у вигляді функціоналу

$$\mathcal{J}(x, \psi, u, v, t_1, \dots, t_m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i W_i(x(t_i), t_i) +$$

$$+ \lambda_0 \int_0^T z^*(t) x(t) dt + \int_0^T \psi^*(t) [\dot{x}(t) - f(x(t), y(t), u(t), t)] dt +$$

$$+ \int_{-h}^0 \psi^*(t) [\dot{x}(t) - g(x(t), v(t), t)] dt,$$

що дозволяє в простішій формі записувати спряжену систему диференціальних рівнянь і необхідні умови оптимальності керувань. Вводяться два означення для абсолютно неперервного розв'язку $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, - означення варіаційної похідної першого роду $\delta J(x) / \delta x(t)$ і другого роду $\delta_x J(x) / \delta x(t)$ в момент часу t від функціоналу $J(x)$ по функції $x(t)$.

Теорема 2.2.1. Вздовж оптимальних керувань $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T$ і $v_0(t)$, $-h \leq t \leq 0$, і траєкторії, яка їм відповідає при оптимальних значеннях t_1^0, \dots, t_m^0 виконуються співвідношення:

$$\frac{\delta_x \mathcal{K}(x_0(t), \psi(t), u_0(t), v_0(t), t_1^0, \dots, t_m^0)}{\delta x(t)} = 0, \quad -h \leq t \leq T,$$

$$\delta_{t_u} \mathcal{K}(x_0(t), \psi(t), u_0(t), v_0(t), t_1^0, \dots, t_m^0) \geq 0, \quad u \in U, \quad -h \leq t \leq T,$$

$$\delta_{t_v} \mathcal{K}(x_0(t), \psi(t), u_0(t), v_0(t), t_1^0, \dots, t_m^0) \geq 0, \quad v \in V, \quad -h \leq t \leq 0,$$

$$\frac{\delta \mathcal{K}(x_0(t), \psi(t), u_0(t), v_0(t), t_1^0, \dots, t_m^0)}{\delta t} = 0.$$

Проведені дослідження ілюструються на наступних простих прикладах.

В п.2.3 розв'язана задача швидкодії для системи двох рівнянь без відхиленого аргументу

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t), \end{cases}$$

де $u(t)$ - кусково-неперервне керування і $|u(t)| \leq 1$. Потрібно визначити оптимальний час руху із початкової точки $(0, a)$ в точку (b, c) (a, b, c - додатні величини) при досягненні в деякий момент часу t_1 додатної точки $(\tau, 0)$ осі Ox .

Досліджена задача для системи двох рівнянь з запізненням

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t-\Delta), \\ x_1(t) = 0, \quad -\Delta \leq t \leq 0, \quad \Delta = \text{const}, \\ |u(t)| \leq 1 \end{cases}$$

найшвидшого переходу в точку (b, c) із початкового стану $(0, a)$ при умові, що існує такий момент часу t_1^0 , що $x_2(t_1^0) \leq 0$.

Детальні дослідження сформульовані з такому вигляді:

Якщо $b > \Delta$ і $0 < c \leq \frac{(b-\Delta)^2}{2}$, то оптимальна швид-

кодія, яка переводить точку $(0, a)$ в точку (b, c) , задовольняє автоматично фазове обмеження існування такого моменту часу, що виконується умова $x_2(t_1^0) \leq 0$.

Якщо $b \leq \Delta$, або $b < \Delta$ і $c > \frac{(b-\Delta)^2}{2}$, то

оптимальне керування має вигляд:

1) $u = -1$ при $t \in [0, \sqrt{a}]$;

2) $u = 1$ при $t \in [\sqrt{a}, 2\sqrt{a} + \Delta]$ і таке керування приводить в момент часу $t_{n_1} = 2\sqrt{a} + \Delta$ в точку $(\Delta, 0)$, де t_{n_1} - перший момент переключення керування;

3) $u = 1$ зберігається до другого переключення керування

$$t_{n_2} = 2\sqrt{a} + \sqrt{c + \frac{1}{2}(b+\Delta)^2};$$

4) $u = -1$ при $t > t_{n_2}$ і в кінцевий момент часу

$$t_k = 2\sqrt{a} - b + \sqrt{4c + 2(b+\Delta)^2}$$

досягається точка (b, c) .

У випадку $a = 2$, $\Delta = 1$ траєкторії руху зображені графічно.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах.

1. Кушлык О.И. О задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями для линейной системы уравнений с запаздыванием // Укр.матем.журн. - 1991. - 43, № 12. - С. 1647 - 1652.
2. Кушлык О.И. Об оптимальном управлении системами с запаздыванием при наличии фазовых ограничений // Тез. докл. научной школы-семинара. - Ужгород, 1991, с. 30.

3. Кушлык О.И. Оптимальное управление для линейных систем с запаздыванием // Тез. докл. научной конференции "Разрывные динамические системы". - Ивано-Франковск, 1990, с. 24 .
4. Кушлык О.И. Необходимые условия оптимальности управлений для систем с запаздыванием. - Киев, 1990. - 20 с. /Рукопись депонирована в УкрНИИТИ от 10.10.90 № 16727 Ук.90 /.
5. Кушлык О.И. Задача оптимального керування з фазовими обмеженнями для однієї системи рівнянь з запізненням.2 // Вісник Київського університету. - 1991. - Вип.2. - С. 96-100.
6. Кушлык О.И. Про одну задачу оптимального керування для рівнянь з запізненням // Вісник КДУ. - 1990. - Вип.32. - С.70-75.

ВНКОФН-Бк.

Зак. № 4-Н Тир. 100 1993 г.

АНБ Ін. В. Стефанів
АН УРСР

470753

As 26.691

AV 26.691