АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО ЧЕРВОНОГО ПРАПОРА ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ТРЕТЬЯК Олександр Іванович

ЛОКАЛЬНІ АПРОКСИМАЦІЇ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ГЛАДКИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана на кафедрі оптимального керування Одеського держуніверситету імені І.І.Мечнікова

Офіційні опоненти: член-кореспондент АН України ПШЕНИЧНИЙ Б.М.

доктор фізико-математичних наук АГРАЧОВ А.О.

доктор фізико-математичних наук ЗЕЛІКІН М.І.

Провідна установа: Інститут проблем керування АН Росії

Захист відбудеться 19.01 1993 р. о 15 годині за засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ 4, МПС, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано 18.12 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук,
професор ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Математична теорія оптимального керування бере свій початок з робіт Л.С.Понтрягина, В.Г.Болтянського, Р.В.Гамкрелідзе, Е.Ф.Міщенко, підсумок яких підведено в книзі "Математическая теория оптимальных процессов". - М.: Наука, 1961.

Стандартна керована система

$$\dot{x} = F_t(u, x), \quad u \in U,$$

з фіксованою початковою точкою $x(t_0) = x_0$ визначає відображення "вхід-вихід"

$$\mathcal{U}_T : u(\cdot) \longmapsto x(T), \quad T > t_0,$$

так, що керуванню $u(t), t_0 \leq t \leq T,$ ставиться у відповідь правий кінець $x(T)$ тієї траєкторії, лівий кінець якої співпадає з x_0. Відображення $\mathcal{U}_T$, $T > t_0$, зокрема , їх локальні властивості, являються важливим об'єктом вивчення в теорії керування. За допомогою таких властивостей установлюються умови оптимальності керувань в тому чи іншому смислі. Зокрема, ключовий результат класичної теорії - принцип максимуму Л.С. Понтрягина - побудований на використанні "першого наближення вздовж фіксованого керування" відображення $\mathcal{U}_T$. На основі принципу максимуму була побудована практично завершена теорія лінійних систем і закладено основи нелінійної теорії. Однак, як добре відомо, принципу максимуму не досить для дослідження багатьох важливих для застосування нелінійних задач, в першу чергу, систем з т.з. особливими екстремалями. Тут треба враховувати наближення більш високого порядку. В свою чергу, пошук нових допоміжних необхідних умов оптимальності високого порядку, достатніх умов локальної керованості і ряд інших проблем теорії керування вкладається в задачу обчислення дотичних векторів до збуреної траєкторії $x_\varepsilon(t) = \mathcal{U}_t(u_\varepsilon(\cdot))$, $t_0 \leq t \leq T$, при $\varepsilon = 0$, де $u_\varepsilon(t) = \tilde{u}(t) + v(t;\varepsilon)$ - збурене керування, $\tilde{u}(t)$ - досліджуване керування, $v(t;\varepsilon)$ - збурення досліджуваного керування, ε - малий параметр.

Мета роботи. полягає в отриманні дотичних векторів у вигляді деяких універсальних форм і в їх дослідженні для отримання нових умовоптимальності високого порядку I достатнIх умов локальноI керованостI вздовж траєкторII.

Використовувані методи. В роботI широко використовується такий потужний метод сучасноI геометричноI теорII керування як хронологIчне обчислення, яке засноване на експоненцIальному зображеннI течIй I розвинене в роботах А.О.Аграчова I Р.В.ГамкрелIдзе. Використовуються також методи теорII алгебр ЛI.

Наукова новизна. ДисертацIя має такі новI науковI результати.

Установлена випуклIсть конуса Лежандра, який утворено спецIальними дотичними векторами - векторами Лежандра. Побудовано асимптотичне розвинення збуреноI течII. Конструктивно описана трьохпараметрична сIм'я умов, яка визначає вектори Лежандра. Знайдено IнварIантнI комутаторнI вирази усIх векторIв Лежандра непарного порядку, усIх векторIв Лежандра другого порядку, деяких векторIв Лежандра парного ($\geqslant 4$) порядку. ВидIлено спецIальний клас керованих систем, для якого знайдено IнварIантнI комутаторнI вирази всIх векторIв Лежандра парного порядку. Описано конструктивний спосIб знаходження виразIв окремих векторIв Лежандра довIльного парного ($\geqslant 4$) порядку. Установлено загальнI необхIднI умови оптимальностI в термIнах векторIв Лежандра. Знайдена сIм'я необхIдних умов оптимальностI непарного I парного порядкIв, а також сIм'я достатнIх умов локальноI керованостI вздовж траєкторII.

Практична I теоретична цIннIсть. РозробленI методи локальноI апроксимацII високого порядку гладких керованих систем можуть використовуватися для дослIдження широкого класу нелIнIйних керованих систем. ОтриманI результати можуть бути використанI для доказу рIзних теорем Iснування оптимальних керувань, для аналIтичного визначення т.з. особливих оптимальних керувань, при вивченнI якIсних властивостей оптимальних керувань I траєкторIй, в задачах синтезу, при вивченнI проблем чутливостI I IдентифIкацII, при конструюваннI чисельних методIв розв'язування задач оптимального керування, в диференцIальнIй грI. Результати дисертацII можуть бути використанI як матерIал для спецIальних курсIв I семIнарIв математичних факультетIв I факультетIв прикладноI математики вищих учбових закладIв.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались автором на Республіканській науковій конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (Одеса, 1987 р.), на міжнародному радянсько-польському семінарі "Математические методы оптимального управления и их приложения" (Мінськ, 1989 р.), на XIУ міжнародній конференції "Математическая оптимизация - теория и приложения" (Айзенах, НДР, 1989 р.), в Ш Всесоюзній школі "Понтрягинские чтения. Оптимальное управление. Геометрия и анализ" (Кемерово, 1990 р.), на Республіканській науково-методичній конференції по математиці, присв'яченій 200-річчю з дня народження М.І.Лобачевського (Одеса, 1992 р.), на УІ конференції математиків Білорусі (Гродно, 1992 р.), на наукових семінарах кафедри загальних проблем керування механіко-математичного факультету МДУ, кафедри оптимального керування механіко-математичного факультету Одеського держуніверситету, на семінарі по геометричній теорії керування під керівництвом чл.-кор. РАН Р.В.Гамкрелідзе в МИРАН.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 7].

Об'єм і структура роботи. Дисертація складається з вступу, трьох глав, які включають в себе дванадцять параграфів, і списку літератури, що складається з 50 назв. Загальний об'єм - 255 машинописних сторінок.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі коротко описано походження питань, які розглядаються в дисертації.

§ 1 глави 1 присв'ячений опису основних результатів.

На протязі всієї роботи використовується формалізм хронологічного обчислення, яке розвинуте в роботах О.А.Аграчьова і Р.В.Гамкрелідзе (Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.-Мат.сб. - 1978. - 107, № 4. - С.467-532; Итоги науки и техн. Пробл. геометрии / ВИНИТИ, 1980. - Т.11. - С.135-176). Хронологічне обчислення - це варіант операційного обчислення, який дозволяє, у всякому випадку, при формальних обчисленнях працювати з нелінійними динамічними системами як з лінійними. Точки $x, y, \ldots$ гладкого многовиду M ототожнюються з мультиплікативними функціоналами на алгебрі $C^{\infty}(M)$ всіх гладких на M дійсних функцій (гладкість всюди далі означає нескінченну диференційовність), дифеоморфізми $P: M \to M$ ототожнюються з автоморфізмами цієї алгебри, а векторні поля $X, Y, \dots$ – з диференціюваннями алгебри $C^{\infty}(M)$. При такому описі значення дифеоморфізму P (векторного поля X) в точці x записується як $x \circ P$ (відповідно $x \circ X$). Всякий дифеоморфізм $P: M \to M$ визначає приєднаний автоморфізм $Ad\, P$ алгебри Лі гладких векторних полів на M за правилом $(Ad\, P)X = P \circ X \circ P^{-1}$. Для векторних полів X, Y, як завжди, покладаємо $(ad\, X)Y = [X, Y]$; $[X, Y]$ – комутатор (дужка Лі) векторних полів X, Y. Течія $P_{t_0,t}$, $t \in \mathbb{R}$, яка породжена нестаціонарним векторним полем X_t, $t \in \mathbb{R}$, тобто абсолютно неперервна сім'я автоморфізмів алгебри $C^{\infty}(M)$, яке задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} P_{t_0,t} = P_{t_0,t} \circ X_t, \quad P_{t_0,t_0} = id,$$

позначається через

$$P_{t_0,t} = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} X_\tau \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Гладка керована система

$$\dot{x} = F_t(u, x), \quad x \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r,$$

на многовиді M записується в інваріантному вигляді

$$\dot{x} = x \circ F_t(u), \quad x \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

а траєкторія $x = \tilde{x}(t)$ цієї системи, яка відповідає керуванню $u = \tilde{u}(t)$ і початковому стану x_0, у вигляді

$$\tilde{x}(t) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} F_\tau(\tilde{u}(\tau))\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Короткому викладу необхідних понять і фактів хронологічного обчислення присвячений § 2 глави I.

В § 3 цієї ж глави описується нільпотентна апроксимація керованих систем, яка отримана в роботах О.А.Аграчьова, Р.В.Гамкрелідзе і А.В.Саричьова (Аграчев А.А., Сарычев А.В. Докл. АН СССР. 1987. - Т.295, № 4. - С.777-781; *Agrachev A.A., Gamkre-*

lidze R.V., Sarychev A.V. Acta Applicandae Mathematicae. - 1989. - .14, No. 3. - P. 191-237). Ця апроксимацІя використовується в останнІй, третІй главІ дисертацІІ, яка присв'ячена застосуванням теорІІ, що розвинена в другІй главІ.

Центральне мІсце в дисертацІІ займає глава 2, яка присв'ячена опису спецІальних дотичних векторІв до траєкторІІ, що дослІджується (векторІв Лежандра). ЦІ вектори ввІв О.А.Аграчьов (Agrachev A.A. Colloque international sur l'analyse des systèmes dynamiques contrôles, 3-6 Juillet, 1990. - Lion-France, 1990. - V. 1. - P. 1-12). В § I для керованих систем (I) з початковою точкою $x(t_0)=x_0$ фІксується деяке допустиме керування $u=\tilde{u}(t)$ (тобто вимІрне обмежене керування зІ значеннями в множинІ U) І вІдповІдна траєкторІя $x=\tilde{x}(t)$. Для зручностІ замІсть системи (I) розглядається керована система на M

$$\dot{y}=y\circ h_t(v(t)),\qquad y(t_0)=x_0, \tag{2}$$

де

$$h_t(v(t))=\left(Ad\,P_{t_0,t}\right)\left(F_t(\tilde{u}(t)+v(t))-F_t(\tilde{u}(t))\right),$$

$$P_{t_0,t}=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}F_\tau(\tilde{u}(\tau))d\tau;$$

при цьому траєкторІІ $x=x(t)$ І $y=y(t)$ систем (I) І (2) для керувань $u=u(t)$ І $v=v(t)=u(t)-\tilde{u}(t)$ вІдповІдно зв'язанІ спІввІдношенням $x(t)=y(t)\circ P_{t_0,t}$.

Вектор $\xi\in T_{x_0}M$ ($T_{x_0}M$ - дотичний простІр до M в точцІ x_0) називається вектором Лежандра системи (2) в момент часу $\sigma\geq t_0$, якщо Існує така сІм'я керувань $v=$ $=v(\tau;\varepsilon),\ \sigma<a(\varepsilon)=\inf\{\tau\mid v(\tau;\varepsilon)\neq 0\}\leq b(\varepsilon)=\sup\{\tau\mid v(\tau;\varepsilon)\neq 0\}$, що точка

$$y\circ\overrightarrow{\exp}\int_{\sigma}^{b(\varepsilon)}h_\tau(v(\tau;\varepsilon))\,d\tau\in M$$

гладко залежить вІд (y,ε), ξ є дотичний вектор до кривої

$$\varepsilon \longmapsto \varphi(\varepsilon) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp}\int_{\sigma}^{b(\varepsilon)} h_\tau(v(\tau;\varepsilon))\,d\tau,$$

тобто

$$\xi = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi\left(\varepsilon^{\frac{1}{m}}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

для деякого $m \in \mathbb{N}$
І

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(b(\varepsilon)-\sigma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{b(\varepsilon)-a(\varepsilon)}{a(\varepsilon)-\sigma} = 0.$$

Замикання множини всІх векторІв Лежандра в момент часу σ називається конусом Лежандра системи (2) в момент часу σ І позначається через K_σ, $K_\sigma \subset T_{x_0}M$.

ВІдповІдно до теореми І.І, яка довецена в § І, конус K_σ - випуклий.

В § 2 у виглядІ $v(t)$ вибирається спецІальне збурення керування І будується асимптотичне розвинення течІІ

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T} h_t(v(t))\,dt,$$

де $T>\sigma$. Тобто, нехай $p(t),\ t\in\mathbb{R}$, - τвимІрна вектор-функцІя така, що $p(t)=0\ \ \forall t \notin [0,1]$, σ - точка нескІнченої дІференцІйовностІ по t нестацІонарного векторного поля $F_t(\tilde{u}(t)),\ \tilde{u}(\sigma)\in \operatorname{int} U$. При

$$v(t) = \alpha\cdot p\left(\frac{t-\sigma-\gamma}{\beta\gamma}\right),$$

де α, β, γ - достатньо малІ додатнІ числа, отримано зображення

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T} h_t\left(\alpha p\left(\frac{t-\sigma-\gamma}{\beta\gamma}\right)\right)dt = \overleftarrow{\exp}\int_0^{\alpha}\Omega(\sigma;p;\bar{\alpha},\beta,\gamma)\,d\bar{\alpha}, \qquad (3)$$

де, наприклад, у випадку, коли

$$F_t(u) = f_t + \sum_{j=1}^{r} u_j g_t^j , \tag{4}$$

маємо асимптотичне розвинення

$$\Omega(\sigma; p; \alpha, \beta, \gamma) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{k-1} \beta^{k+l} \gamma^{k+l+m} V(\sigma; p; k, l, m), \tag{5}$$

$$V(\sigma; p; k, l, m) = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=l \\ i_s \geqslant 0,\ s=\overline{1,k}}} \sum_{j_1=1}^{r} \dots \sum_{j_k=1}^{r} \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} \frac{\tau_k^{i_k}}{i_k!} \times$$

$$\times p_{j_k}(\tau_k) \dots \frac{\tau_1^{i_1}}{i_1!} p_{j_1}(\tau_1) \left(\mathrm{Ad}\, P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^m H_\sigma(i_k, \dots, i_1; j_k, \dots, j_1) d\tau_k \dots d\tau_1 ,$$

$$H_t(i_k, \dots, i_1; j_k, \dots, j_1) = \left[D_t^{i_k} g_t^{j_k}, \dots, \left[D_t^{i_2} g_t^{j_2}, D_t^{i_1} g_t^{j_1} \right] \dots \right] ,$$

$$D_t = \frac{d}{dt} + \mathrm{ad}\left(f_t + \sum_{j=1}^{r} \tilde{u}_j(t) g_t^j \right), \quad D_t^{i+1} = D_t \circ D_t^i .$$

Тут

$$\overleftarrow{\exp} \int_a^b X_t \, dt = \overrightarrow{\exp} \int_b^a - X_t \, dt .$$

Зображення (3) є основа для отримання локальних апроксимацій високого порядку керованої системи (I).

Починаючи з § 3 і до кінця глави 2 з технічних причин, розглядається випадок (4); загальний нелінійний випадок розглянуто в главі 3.

В п.I третього параграфу для додатних чисел A, B, C і натуральних чисел $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$ кладеться

$$\alpha = \alpha(\varepsilon) = A\varepsilon^a, \quad \beta = \beta(\varepsilon) = B\varepsilon^b, \quad \gamma = \gamma(\varepsilon) = C\varepsilon^c$$

(в п.2 показується, що вибір α, β, γ у вигляді таких функцій

ε не веде до втрати загальності), що приводить до слідуючого результату.

ТЕОРЕМА 3.1. Нехай для даних цілих числах $k^\circ \geqslant 1$, $\ell^\circ \geqslant 0$, $m^\circ \geqslant 0$ має місце рівність $x_0 \circ V(\sigma; p; k, \ell, m) = 0$ для всіх цілих $k \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, які задовольняють нерівність

$$\mu(a, b, c; k, \ell, m) < \mu^\circ = \mu(a, b, c; k^\circ, \ell^\circ, m^\circ). \qquad (6)$$

Тоді вектор $x_0 \circ \overset{\circ}{V}(\sigma; p; A, B, C)$, де

$$\overset{\circ}{V}(\sigma; p; A, B, C) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ \mu(a,b,c;k,\ell,m)=\mu^\circ}}^{\infty} \frac{1}{k} A^k B^{k+\ell} C^{k+\ell+m} V(\sigma; p; k, \ell, m),$$

є вектором Лежандра в момент часу σ, і, отже, $x_0 \circ \overset{\circ}{V}(\sigma; p; A, B, C) \in K_\sigma$.

Тут $\mu(a, b, c; k, \ell, m) = k(a+b+c) + \ell(b+c) + mc$.

В § 3 для фіксованих k°, ℓ°, m° конструктивно описана множина всіх трійок (k, ℓ, m), які задовольняють нерівності (6) при будь-яких натуральних a, b, c; більш точно, річ іде про множину

$$\mathcal{N}(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ) = \bigcup_{a,b,c \in N} \left\{ (k, \ell, m) \,\middle|\, \mu(a, b, c; k, \ell, m) < \mu(a, b, c; k^\circ, \ell^\circ, m^\circ) \right\}.$$

Для цього введено множину $S(s^\circ) = S(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, де $s^\circ = (k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, пар (s', s'') трійок $s' = (k', \ell', m')$, $s'' = (k'', \ell'', m'')$, а також множини $N(s^\circ; s', s'')$, $\Pi(s^\circ; s', s'')$ трійок (k, ℓ, m). Множина $S(s^\circ)$ являється злічено (перерахованою), а множини $N(s^\circ; s', s'')$, $\Pi(s^\circ; s', s'')$ – скінченними. Всі ці множини конструктивно описані. За допомогою цих множин з теореми 3.1 виводиться

ТЕОРЕМА 3.2. Нехай для даних цІлих чисел $k^\circ \geqslant 1$, $\ell^\circ \geqslant 0$, $m^\circ \geqslant 0$ знайдеться така пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ; \ell^\circ, m^\circ)$, що

$$x_0 \circ V(\sigma; p; k, \ell, m) = 0 \quad \forall (k, \ell, m) \in N(s^\circ; s', s'').$$

ТодІ має мІсце включення

$$x_0 \circ W^\circ(\sigma; p; A, B, C) \in K_\sigma,$$

де

$$W^\circ(\sigma; p; A, B, C) = \sum_{(k,\ell,m) \in \Pi(s^\circ; s', s'')} \frac{1}{k} A^k B^{k+\ell} \times$$

$$\times C^{k+\ell+m} V(\sigma; p; k, \ell, m).$$

Ця теорема уточнюється в п.4, а в п.п.5, 6 розглянутІ два конкретних варІанти (два "крайнІх" випадки) значень a, b, c, описана множина трІйок (k, ℓ, m), якІ задовольняють нерІвностІ (6), І сформульованІ теореми 3.4, 3.5, що являються конкретизацІями теореми 3.I.

ПодальшІ зусилля в роботІ направленІ на те, щоб у виразІ для вектора Лежандра $x_0 \circ W^\circ(\sigma; p; A, B, C)$ (див.формулювання теореми 3.2) звІльнитися вІд присутностІ допомІжної функцІЇ $p = p(t)$ І чисел A, B, C. З цІєю метою в главІ 2 окремо розглянутІ випадки непарного (§ 4) І парного (§ 5) значень k°.

В п.I § 4 встановлюється один допомІжний результат, який використовується в п.2. В п.2 розглядається керована система зІ скалярним ($r = 1$) керуванням, тобто (див.(4))

$$F_t(u) = f_t + u g_t \tag{7}$$

(випадок (4) векторного керування зводиться замІною до випадку (7) скалярного керування в п.4). Символом $\tilde{\Lambda}_\sigma(k, \ell, m)$ позначається довІльний комутаторний моном, який утворюється векторними полями виду

$$\left(\mathrm{Ad}\, P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m_j} H_\sigma(i_{k_j},\dots,i_1),\quad i_1+\dots+i_{k_j}=l_j,\quad j=\overline{1,s},$$

$$s\in\mathbb{N},\ k_1+\dots+k_s=k,\ l_1+\dots+l_s=l,\ m_1+\dots+m_s=m;$$

де

$$H_t(i_k,\dots,i_1)=\left[D_t^{i_k} g_t,\dots,\left[D_t^{i_2} g_t,\ D_t^{i_1} g_t\right]\dots\right]. \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 4.2. Нехай для даних цілих чисел $k^\circ\geqslant 1,\ l^\circ\geqslant 0,\ m^\circ\geqslant 0$, де k° - непарне, знайдеться така пара $(s', s'')\in \tilde S(s^\circ) = S(k^\circ, l^\circ, m^\circ)$, що $x_0\circ\tilde\Lambda_\sigma(k,l,m)=0$ для всіх трійок (k,l,m) з парним k, які задовольняють включення

$$(k,l,m)\in N(s^\circ; s', s'')\cup \Pi(s^\circ; s', s'').$$

Тоді має місце включення

$$\pm\, x_0\circ\left(\mathrm{Ad}\, P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m^*} H_\sigma(i_{k^*},\dots,i_1)\in K_\sigma$$

для всіх цілих $k^*\geqslant 1,\ l^*\geqslant 0,\ m^*\geqslant 0,\ i_1\geqslant 0,\dots,i_{k^*}\geqslant 0$, таких, що k^* - непарне, $i_1+\dots+i_{k^*}=l^*$ і $(k^*, l^*, m^*)\in N(s^\circ; s', s'')\cup \Pi(s^\circ; s', s'')$.

Далі в цьому п. наводяться теореми 4.3, 4.4, які конкретизують теорему 4.2 на випадок, який описано в пунктах 5 і 6 з § 3.

В п.4 результати п.3 розповсюджуються на випадок векторного керування (4). Тут уже не передбачається, що $\tilde u(\sigma)\in \mathrm{int}\, U$, а множина U вважається замкненим випуклим многогранником в $\mathbb{R}^r$. В цій ситуації вводиться проектор π_σ (Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В. Мат. сб. - 1976. - Т.100, № 4. - С.610-643). А саме, грань мінімальної вимірності многогранника U яка містить точку $\tilde u(\sigma)$, змістимо паралельно в початок координат простору $\mathbb{R}^r$ і позначимо через π_σ оператор ортогонального проектування $\mathbb{R}^r$ на лінійну оболонку грані, що зміщена, а через $(\pi_{ij}(\sigma))$, $i,j=\overline{1,r}$, – матрицю оператора π_σ (якщо $\tilde{u}(\sigma)\in int\, U$, то, очевидно, $\pi_\sigma = id_{\mathbb{R}^r}$, а $(\pi_{ij}(\sigma))$, $i,j=\overline{1,r}$, – одинична матриця). Оператор π_σ має сенс вводити лише у випадку $r\geqslant 2$.

Покладемо

$$\bar{g}_t^j = \sum_{i=1}^{r} \pi_{ij}(\sigma)\cdot g_t^i, \qquad j=1,\dots,r, \tag{9}$$

$$D_t = \frac{d}{dt} + ad\left(f_t + \sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t) g_t^i\right), \tag{10}$$

$$P_{t_0,t} = \overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(f_\tau + \sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(\tau) g_\tau^i\right)d\tau, \tag{11}$$

$$H_t(i_s,\dots,i_1;j_s,\dots,j_1) =$$

$$= [D_t^{i_s}\bar{g}_t^{j_s},\dots,[D_t^{i_2}\bar{g}_t^{j_2}, D_t^{i_1}\bar{g}_t^{j_1}]\dots]. \tag{12}$$

Символом $\Lambda_\sigma(k,l,m)$ позначається довільний комутаторний моном, утворений векторними полями виду

$$D_\sigma^{m_s} H_\sigma(i_{k_s},\dots,i_1;j_{k_s},\dots,j_1),\ i_1+\dots+i_{k_s}=l_s,\ s=\overline{1,n},$$

$$n\in\mathbb{N},\ k_1+\dots+k_n=k,\ l_1+\dots+l_n=l,\ m_1+\dots+m_n=m,$$

$$j_p\in\{1,\dots,r\},\ p=1,\dots,k_s.$$

ТЕОРЕМА 4.5. Нехай для даних цілих чисел $k^\circ\geqslant 1$, $l^\circ\geqslant 0$, $m^\circ\geqslant 0$, де k° – непарне, знайдеться така пара $(s',s'')\in S(s^\circ) = S(k^\circ,l^\circ,m^\circ)$, що

$$x_0\circ(Ad\,P_{t_0,\sigma})\Lambda_\sigma(k,l,m) = 0$$

для всIх трIйок (κ, l, m) з парним κ, що задовольняють включення

$$(\kappa, l, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'').$$

ТодI має мIсце включення

$$\pm\, x_\circ \circ (Ad\, P_{t_0,\sigma}) D_\sigma^{m^*} H_\sigma (i_{\kappa^*}, \dots, i_1; j_{\kappa^*}, \dots, j_1) \in K_\sigma$$

для всIх цIлих $\kappa^* \geqslant 1$, $l^* \geqslant 0$, $m^* \geqslant 0$, $1 \leq j_1 \leq \tau, \dots$ $\dots, 1 \leq j_{\kappa^*} \leq \tau, i_1 \geqslant 0, \dots, i_{\kappa^*} \geqslant 0$, таких, що κ^* - непарне, $i_1 + \dots + i_{\kappa^*} = l^*$ I $(\kappa^*, l^*, m^*) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'')$.

ДалI в цьому пунктI наводяться теореми 4.6, 4.7, якI узагальнюють теореми 4.3, 4.4 вIдповIдно на випадок векторного керування.

В § 5 дослIджується випадок парного κ°. Через $Q(\kappa^\circ, l^\circ, m^\circ)$ позначається множина всIх розв'язкIв $p = p(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, системи Iнтегральних рIвнянь

$$\begin{cases} \mathcal{J}(p; i_1) = 0, & i_1 = 0, \dots, l_1, \\ \mathcal{J}(p; i_3, i_2, i_1) = 0, & i_3 + i_2 + i_1 = 0, \dots, l_3, \\ \mathcal{J}(p; i_5, i_4, i_3, i_2, i_1) = 0, & i_5 + i_4 + i_3 + i_2 + i_1 = 0, \dots, l_5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \mathcal{J}(p; i_{\bar\kappa}, i_{\bar\kappa-1}, \dots, i_1) = 0, & i_{\bar\kappa} + i_{\bar\kappa-1} + \dots + i_1 = 0, \dots, l_{\bar\kappa}, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$\mathcal{J}(p; i_\kappa, \dots, i_1) = \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{\kappa-1}} \frac{\tau_\kappa^{i_\kappa}}{i_\kappa!} p(\tau_\kappa) \dots \frac{\tau_1^{i_1}}{i_1!} p(\tau_1)\, d\tau_\kappa \dots d\tau_1,$$

числа $l_1, l_3, l_5, \dots, l_{\bar\kappa}, \bar\kappa$ ($\bar\kappa$ - непарне) залежать вIд $\kappa^\circ, l^\circ, m^\circ$ I визначаються в п.I. Показано Iснування ненулевих розв'язкIв системи рIвнянь (I3).

Для випадку скалярного керування (7) в п.I установлена

ТЕОРЕМА 5.I. Нехай для даних цIлих чисел $k^\circ \geqslant 2, \ell^\circ \geqslant 0, m^\circ \geqslant 0$, де k° - парне, знайдеться пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, що задовольняє умову:

$$x_0 \circ (Ad P_{t_0,\sigma}) D_\sigma^m H_\sigma (i_{2n}, \dots, i_1) = 0$$

для всIх цIлих $m \geqslant 0,\ n \geqslant 1,\ \ell \geqslant 0,\ i_1 \geqslant 0, \dots, i_{2n} \geqslant 0$, таких, що $i_1 + \dots + i_{2n} = \ell$, $(2n, \ell, m) \in N(s^\circ; s', s'')$.

ТодI для довIльних функцII $p(\cdot) \in Q(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$ I чисел $A > 0, B > 0, C > 0$ має мIсце включення

$$x_0 \circ W^\circ(\sigma; p; A, B, C) \in K_\sigma ,$$

де

$$W^\circ(\sigma; p; A, B, C) = \sum_{(2n, \ell, m) \in \Pi(s^\circ; s', s'')} \frac{1}{2n} A^{2n} B^{2n+\ell} C^{2n+\ell+m} \times$$

$$\times \frac{1}{m!} \sum_{\substack{i_{2n} + \dots + i_1 = \ell \\ i_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, 2n}}} \mathcal{J}(p; i_{2n}, \dots, i_1) (Ad P_{t_0,\sigma}) D_\sigma^m H_\sigma (i_{2n}, \dots, i_1) .$$

В цьому ж п.I § 5 встановлюється теорема 5.2, яка є поширенням теореми 5.I на випадок векторного керування (4).

В п.2 докладно розглядається випадок $k^\circ = 2$ для систем виду (7) з скалярним керуванням (теореми 5.3-5.5) I для систем виду (4) з векторним керуванням (теореми 5.6-5.8). Наведено лише один результат для випадку векторного керування (4).

ТЕОРЕМА 5.7. Нехай для даних цIлих чисел $k^\circ = 2,\ \ell^\circ \geqslant 0,\ m^\circ \geqslant 0$ знайдеться пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, яка задовольняє умову:

$$x_0 \circ (Ad P_{t_0,\sigma}) D_\sigma^m H_\sigma (i_{2n}, \dots, i_1; j_{2n}, \dots, j_1) = 0$$

для всIх цIлих $m \geqslant 0,\ n \geqslant 1,\ i_1 \geqslant 0, \dots, i_{2n} \geqslant 0,\ 1 \leqslant j_1 \leqslant r, \dots, 1 \leqslant j_{2n} \leqslant r, \ell \geqslant 0$, таких, що $i_1 + \dots + i_{2n} = \ell$, $(2n, \ell, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'') \setminus \{(2, \ell^\circ, m^\circ)\}$.

ТодI при парному ℓ° виконуються рIвностI

$$x_0 \circ \left(\operatorname{Ad} P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m^\circ} [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{l^\circ} \bar{g}_\sigma^j] = 0, \quad i,j = 1,\dots,r,$$

а при непарному l° мають місце включення

$$(-1)^{(l^\circ+1)/2} \cdot x_0 \circ \left(\operatorname{Ad} P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m^\circ} [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{l^\circ} \bar{g}_\sigma^i] \in K_\sigma, \ i = 1,\dots,r;$$

$$(-1)^{(l^\circ+1)/2} x_0 \circ \left(\operatorname{Ad} P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m^\circ} \left\{ [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{l^\circ} \bar{g}_\sigma^i] + [\bar{g}_\sigma^j, D_\sigma^{l^\circ} \bar{g}_\sigma^j] \pm \right.$$

$$\left. \pm [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{l^\circ} \bar{g}_\sigma^j] \right\} \in K_\sigma, \quad 1 \le i < j \le r.$$

В п.3 розглядається випадок парного $k^\circ \geq 4, \ l^\circ \in \{0, 1\}$, $m^\circ \geq 0$, припускає повне дослідження. У випадку скалярного керування (7) має місце

ТЕОРЕМА 5.9. Нехай для даних цілих чисел $k^\circ \geq 4, \ l^\circ \in \{0, 1\}$, $m^\circ \geq 0$ при парному k°, знайдеться пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ, l^\circ, m^\circ)$, яка задовольняє умову:

$$x_0 \circ \left(\operatorname{Ad} P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^m H_\sigma(i_{2n},\dots,i_1) = 0$$

для всіх цілих $m \geq 0, n \geq 1, l \geq 0, i_1 \geq 0, \dots, i_{2n} \geq 0$, таких, що $i_1 + \dots + i_{2n} = l$, $(2n, l, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'') \setminus \{(k^\circ, l^\circ, m^\circ)\}$.

Тоді

$$(-1)^{l^\circ} \cdot x_0 \circ \left(\operatorname{Ad} P_{t_0,\sigma}\right) D_\sigma^{m^\circ} \left(\operatorname{ad} g_\sigma\right)^{k^\circ-1} D_\sigma^{l^\circ} g_\sigma \in K_\sigma .$$

Випадок векторного керування (4) розглянуто в теоремі 5.10.

Як уже доводилось, отримання векторів Лежандра у вигляді, який вільний від допоміжних чисел A, B, C і функції $p = p(\tau)$, при довільних парному $k^\circ \geq 4, \ l^\circ \geq 2, m^\circ \geq 0$ наштовхується на серйозні труднощі. В п.4 виділено клас керованих систем, для яких всю цю роботу можна зробити до кінця. А саме, нехай $F_t(u) = f + ug$, $\tilde{u}(t) \equiv 0$ (нестаціонарний випадок (7) зводиться до даного звичайним способом).

ТЕОРЕМА 5.11. Нехай комутант $L' = [L, L]$ алгебри Лі $L = \mathrm{Lie}\{f, g\}$ являється абелевим: $[L', L'] = 0$. Нехай, далі, для даних цілих чисел $k^\circ \geq 1$, $\ell^\circ \geq 0$, $m^\circ \geq 0$, де k° – парне, знайдеться пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, яка задовольняє умову:

$$x_0 \circ (\mathrm{Ad}\, P_{t_0,\sigma})(\mathrm{ad}\, g)^{2n-1}(\mathrm{ad}\, f)^{\ell+m} g = 0$$

для всіх цілих $m \geq 0$, $n \geq 1$, $\ell \geq 0$, таких, що $(2n, \ell, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'') \setminus \{(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)\}$.

Тоді

$$-x_0 \circ (\mathrm{Ad}\, P_{t_0,\sigma})(\mathrm{ad}\, g)^{k^\circ-1}(\mathrm{ad}\, f)^{\ell^\circ+m^\circ} g \in K_\sigma .$$

Далі в цьому п.4 наведені приклади алгебр Лі з абелевим комутантом і приклади векторних полів f, g, які породжують такі алгебри.

В загальному випадку парного $k^\circ \geq 4$ проблема отримання всіх векторів Лежандра в остаточному вигляді залишається відкритою. Пункт 5 присвячений деяким крокам в цьому напрямі. А саме, пропонується у вирази для вектора Лежандра, який залежить від функції $p(\cdot) \in Q(k^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, підставляти конкретний розв'язок системи інтегральних рівнянь (13), отримавши тим самим конкретні, цілком певні вектори Лежандра.

Для практичної реалізації цього міркування в п.5 викладається конструктивний спосіб побудови розв'язків $p = p(\tau)$ системи інтегральних рівнянь (13) в явному вигляді.

Глава 3 присвячена застосуванням результатів, які отримані в главі 2, а саме, виведенню сім'ї необхідних умов оптимальності високого порядку і достатніх умов локальної керованості вздовж траєкторії. Ми обмежились тільки умовами оптимальності і керованості через їх першочергову важливість для теорії керування. Однак ніщо не заважає (в крайньому випадку, принципово) застосуванню результатів глави 2 до інших проблем теорії керування, про яких йшла моба напочатку.

В § I глави 3 розглядається керована система (I). При цьому як початковий так І кІнцевий моменти часу τ_0, τ_1, так І початкова І кІнцева точки траекторІІ $x(\tau_0)$, $x(\tau_1)$ не фІксованІ, а повиннІ задовольняти крайові умови виду

$$q_i(x(\tau_0), x(\tau_1), \tau_0, \tau_1) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{I4}$$

Задача полягае в мІнІмІзацІІ функцІІ $q_0(x(\tau_0), x(\tau_1), \tau_0, \tau_1)$ на множинІ трІйок $\{\tau_0; \tau_1; x(t), t_0 \le t \le \tau_1\}$, де $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}$, а $x(t), \tau_0 \le t \le \tau_1$, являеться розв'язком рІвняння (I), яке вІдповІдае деякомуприпустимому керуванню такому, що виконуються заданІ крайовІ умови.

ЗафІксуемо деякий (не обов'язково оптимальний) процес

$$x = \tilde{x}(t), \quad u = \tilde{u}(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{I5}$$

який задовольняе умови (I4), І покладемо

$$q(x,y,t_1,t_2) = \begin{pmatrix} q_0(x,y,t_1,t_2) \\ q_1(x,y,t_1,t_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m(x,y,t_1,t_2) \end{pmatrix}; \; x,y \in M; \; t_1,t_2 \in \mathbb{R};$$

$$\overset{(1)}{q}(x) = q(x, \tilde{x}(T), t_0, T), \quad \overset{(2)}{q}(x) = q(\tilde{x}(t_0), x, t_0, T),$$

$$\overset{(3)}{q}(t) = q(\tilde{x}(t_0), \hat{x}(T), t, T), \quad \overset{(4)}{q}(t) = q(\tilde{x}(t_0), \tilde{x}(T), t_0, t),$$

$$a = (\tilde{x}(t_0), \tilde{x}(T), t_0, T) \in N, \quad N = M \times M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Припустимо, що ранг лІнІйного вІдображення $q_{*,a} : T_a N \to \mathbb{R}^{1+m}$ дорІвнюе $1+m$. Введемо функцІю Гамільтона H, а саме для $x \in M$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\psi \in T_x^* M$ покладемо

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, x \circ F_t(u) \rangle .$$

Через Ψ позначимо множину всІх ненульових розв'язкІв $\psi = \psi(t), t \in [t_0, T]$, спряженого рІвняння, якІ задовольняють для майже всІх $t \in [t_0, T]$ умови максимуму

$$H(\psi(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), \tilde{x}(t), u, t)$$

І умови трансверсальності

$$\psi(t_0) = -\sum_{i=0}^{m} \zeta_i \, dq_i^{(1)}(\tilde{x}(t_0)), \qquad \sum_{i=0}^{m} \zeta_i^2 \neq 0,$$

$$\psi(T) = \sum_{i=0}^{m} \zeta_i \, dq_i^{(2)}(\tilde{x}(T)),$$

$$H(\psi(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{m} \zeta_i \frac{d}{dt} q_i^{(3)}(t_0),$$

$$H(\psi(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\Big|_{t=T} = -\sum_{i=0}^{m} \zeta_i \frac{d}{dt} q_i^{(4)}(T).$$

Наступна теорема, що доведена в § І, виражає необхідні умови оптимальності процесу (І5) в термінах елементів конуса Лежандра.

ТЕОРЕМА І.І. Якщо (І5) - оптимальний процес, то існує таке $\tilde{\psi} \in \Psi$, що

$$\langle \tilde{\psi}(T), \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in \overline{K},$$

це

$$\overline{K} = \sum_{t_0 \leq \sigma < T} \overline{K}_\sigma, \qquad \overline{K}_\sigma = \left(P_{t_0,T}\right)_{*,\, \tilde{x}(t_0)} K_\sigma .$$

Ця теорема узагальнює основні результати робіт Б'янкіні, Стефані і Кренера (Bianchini R.M., Stefani G. Anal. and Contr. Nonlinear Syst., C.I.Byrnes, C.F. Martin and R.E. Sacks, eds.-Amsterdam: Elsevier Sc. Publ.- 1988.- P. 131-136; Krener A.J. SIAM J. Control and Optimization.- 1977.- V. 15, No. 2. - P. 256-293).

За її допомогою далі отримуються різні необхідні умови оптимальностІ високого порядку. Треба вІдмІтити, що майже всІ вІдомІ необхІднІ умови оптимальностІ високого порядку мають загальну рису: дана необхІдна умова оптимальностІ має мІсце тІльки в тому випадку, коли попереднІ Ій умови оптимальностІ вироджуються (перетворюються в тотожнІ рІвностІ) на деякому промІжку часу ненульовоІ довжини. Для вІрностІ необхІдних умов оптимальностІ високого порядку, якІ отриманІ в данІй главІ, не потрІбна виродженнІсть попереднІх умов на промІжку часу ненульовоІ довжини, а достатньо виконання вІдповІдних рІвностей лише в однІй точцІ σ часовоІ осІ (в наших формулюваннях роль вищезгаданих рІвностей грають еквІвалентнІ геометричнІ умови, якІ мають вид включень).

§ 2 присв'ячений виводу необхІдних умов оптимальностІ непарного порядку (k^0 - непарне), якІ виникають в результатІ застосування теореми І.І з § І до векторІв Лежандра непарного порядку з § 4 глави 2 І використування нІльпотентноІ апроксимацІІ з § 3 глави І. Пункт І має допомІжний характер. В п.2 розглядається випадок (4) системи, лІнІйноІ по керуванню, причому множина U вважається замкнутим випуклим многогранником в $\mathbb{R}^r$, а умова $\tilde{u}(\sigma) \in \operatorname{int} U$ не припускається виконаною.

ТЕОРЕМА 2.І. Нехай (І5) - оптимальний процес. ТодІ Існує таке $\tilde{\varphi} \in \Psi$, що якщо для даноІ точки $\sigma \in O$ І для даних цІлих чисел $k^0 \geqslant 1$, $\ell^0 \geqslant 0$, $m^0 \geqslant 0$, де k^0 - непарне, знайдеться пара $(s', s'') \in S(s^0) = S(k^0; \ell^0; m^0)$ з властивІстю

$$\tilde{x}(\sigma) \circ \dot{\Lambda}_\sigma(k, l, m) \in L_\sigma(\tilde{x}(\sigma); k, l, m)$$

для всІх трІйок (k, l, m) з парним k, якІ задовольняють включення

$$(k, l, m) \in N(s^0; s', s'') \cup \Pi(s^0; s', s''),$$

то

$$\left\langle \tilde{\varphi}(\sigma); \tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^{m^*} H_\sigma(i_{k^*}, \ldots, i_1; j_{k^*}, \ldots, j_1) \right\rangle = 0$$

для всІх цІлих $k^* \geq 1,\ l^* \geq 0,\ m^* \geq 0,\ i_1 \geq 0, \dots, i_{k^*} \geq 0,$ $1 \leq j_1 \leq r, \dots, 1 \leq j_{k^*} \leq r,$ таких, що k^* - непарне, $i_1 + \dots + i_{k^*} = l^*,\quad (k^*, l^*, m^*) \in N(s^0; s', s'') \cup \Pi(s^0; s', s'')$.

Тут І далІ $\mathcal{O}$ - множина точок t з $[t_0, T]$, в яких нескІнченно диференцІйованІ векторнІ поля $f_t, g_t^1, \dots, g_t^r$ І керування $u = \tilde{u}(t)$,

$$L_\sigma(\tilde{x}(\sigma); k, l, m) = \{ \tilde{x}(\sigma) \circ X \mid X \in L_\sigma(k, l, m) \},$$

$$L_\sigma(k, l, m) = \mathrm{span}\{ \Lambda_\sigma(\bar{k}, \bar{l}, \bar{m}) \mid \bar{k} + \bar{l}\cdot\theta_1 + \bar{m}\cdot\theta_2 < k + l\cdot\theta_1 + m\cdot\theta_2,\ \bar{k} + (\bar{l}+\bar{m})\cdot\theta_2 < k + (l+m)\cdot\theta_2 \},$$

$$\theta_i = \theta_i(s^0; s', s''),\ i = 1,2, \qquad s^0 = (k^0, l^0, m^0),$$
$$s' = (k', l', m'), \qquad s'' = (k'', l'', m''),$$

$$\theta_1 = \frac{\begin{vmatrix} k^0 - k' & m' - m^0 \\ k^0 - k'' & m'' - m^0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l' - l^0 & m' - m^0 \\ l'' - l^0 & m'' - m^0 \end{vmatrix}}, \qquad \theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} l' - l^0 & k^0 - k' \\ l'' - l^0 & k^0 - k'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l' - l^0 & m' - m^0 \\ l'' - l^0 & m'' - m^0 \end{vmatrix}},$$

точки s^0, s', s'' не лежать на однІй прямІй.

ДалІ в п.2 розглянуто два практично важливих окремих випадки теореми 2.І - ІІ конкретнІ реалІзацІІ (теореми 2.2, 2.3).

Узагальнення теореми 2.І на випадок загальноІ нелІнІйноІ системи (І) з умовою $\tilde{u}(\sigma) \in \mathrm{int}\, U$ виконано в п.3 (теорема 2.4).

В § 4 глави 3 розглядаються деякІ необхІднІ умови оптимальностІ парного порядку (k^0 - парне). ЦІ умови виникають в результатІ застосування теореми І.І в § І глави 3 до векторІв Лежандра парного порядку з § 5 глави 2. В п.І розглядається система, лІнІйна по керуванню (4). Перш за все виводяться необхІднІ умови оптимальностІ другого порядку.

ТЕОРЕМА 3.І. Нехай (І5) - оптимальний процес. ТодІ Існує таке $\tilde{\psi} \in \Psi$, що якщо для даноІ точки $\sigma \in \mathcal{O}$ І для даних цІлих чисел $k^0 = 2,\ l^0 \geq 0,\ m^0 \geq 0$ знайдеться пара

$(s', s'') \in S(s^\circ) = S(\kappa^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, яка задовольняє умови:

$$\tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^m H_\sigma(i_{2n}, \ldots, i_1; j_{2n}, \ldots, j_1) \in L_\sigma(\tilde{x}(\sigma); 2n, \ell, m)$$

для всIх цIлих $m \geq 0,\ n \geq 1,\ i_1 \geq 0, \ldots, i_{2n} \geq 0,\ \ell \geq 0,$
$1 \leq j_1 \leq r, \ \ldots,\ 1 \leq j_{2n} \leq r$, таких, що $i_1 + \ldots + i_{2n} = \ell,$
$(2n, \ell, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'') \setminus \{(\kappa^\circ, \ell^\circ, m^\circ)\},$
то при парному ℓ° мають мIсце рIвностI

$$\langle \tilde{\psi}(\sigma), \tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^{m^\circ} [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{\ell^\circ} \bar{g}_\sigma^j] \rangle = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

а при непарному ℓ° мають мIсце нерIвностI

$$(-1)^{(\ell^\circ+1)/2} \langle \tilde{\psi}(\sigma), \tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^{m^\circ} [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{\ell^\circ} \bar{g}_\sigma^i] \rangle \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r;$$

$$(-1)^{(\ell^\circ+1)/2} \langle \tilde{\psi}(\sigma), \tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^{m^\circ} \{ [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{\ell^\circ} \bar{g}_\sigma^i] + [\bar{g}_\sigma^j, D_\sigma^{\ell^\circ} \bar{g}_\sigma^j] \pm$$
$$\pm [\bar{g}_\sigma^i, D_\sigma^{\ell^\circ} \bar{g}_\sigma^j] \} \rangle \leq 0, \quad 1 \leq i < j \leq r.$$

ДалI в теоремI 3.2 розглянута одна з практичних реалIзацIй теореми 3.I. Теореми 3.I, 3.2 мIстять в собI як частковI випадки вIдомI необхIднI умови оптимальностI другого порядку.

Випадок $\kappa^\circ \geq 4,\ \ell^\circ \in \{0, 1\},\ m^\circ \geq 0$ розглянуто в теоремI 3.3. В випадку скалярного керування ця теорема 3.3 формулюється слIдуючим чином:

Нехай процес (I5) являється оптимальним. ТодI Iснує таке $\tilde{\psi} \in \Psi$, що, якщо для даноI точки $\sigma \in O$ I для даних цIлих чисел $\kappa^\circ \geq 4,\ \ell^\circ = 1,\ m^\circ \geq 0$ знайдеться пара $(s', s'') \in$ $\in S(s^\circ) = S(\kappa^\circ, \ell^\circ, m^\circ)$, яка задовольняє умову:

$$\tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^m H_\sigma(i_{2n}, \ldots, i_1) \in L_\sigma(\tilde{x}(\sigma); 2n, \ell, m)$$

для всIх цIлих $m \geq 0,\ n \geq 1,\ i_1 \geq 0, \ldots, i_{2n} \geq 0,\ \ell \geq 0$, таких, що $i_1+\dots+i_{2n}=l$, $(2n, l, m)\in N(s^\circ; s', s'')\cup$ $\cup\Pi(s^\circ; s', s'')\setminus\{(k^\circ, l^\circ, m^\circ)\}$, то

$$\langle\tilde\psi(\sigma), \tilde x(\sigma)\circ D_\sigma^{m^\circ}(ad\, g_\sigma)^{k^\circ-1} D_\sigma g_\sigma\rangle \geqslant 0.$$

Нарешті, на закінчення цього п.І розглянуто випадок $F_t(u)=f+ug$, $\tilde u(t)\equiv 0$.

ТЕОРЕМА 3.4. Нехай комутант $L'=[L,L]$ алгебри Лі $L=Lie\{f,g\}$ являється абелевим: $[L', L']=0$. Нехай, далі, процес (І5) являється оптимальним. Тоді існує таке $\tilde\psi\in\Psi$, що якщо для даної точки $\sigma\in O$ і для даних цілих чисел $k^\circ\geqslant 4$, $l^\circ\geqslant 0$, $m^\circ\geqslant 0$ знайдеться пара $(s', s'')\in S(k^\circ, l^\circ, m^\circ)=$ $=S(s^\circ)$, яка задовольняє умови

$$\tilde x(\sigma)\circ(ad\, g)^{2n-1}(ad\, f)^{l+m} g\in L_\sigma(\tilde x(\sigma); 2n, l, m)$$

для всіх цілих $m\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, $l\geqslant 0$, таких, що $(2n, l, m)\in N(s^\circ; s', s'')\cup\Pi(s^\circ; s', s'')\setminus$ $\setminus\{(k^\circ, l^\circ, m^\circ)\}$, то

$$\langle\tilde\psi(\sigma), \tilde x(\sigma)\circ(ad\, g)^{k^\circ-1}(ad\, f)^{l^\circ+m^\circ} g\rangle \geqslant 0.$$

В п.2 теореми 3.І-3.3 узагальнені в теоремах 3.5-3.7 на випадок загальної нелінійної системи (І).

Тут же відмітимо, що ці теореми 3.І-3.7 не охоплюють всі необхідні умови оптимальності парного порядку, які можна отримати з використанням векторів Лежандра парного порядку з § 5 глави 2. Так, наприклад, можна було б, використовуючи в теоремі 5.І з § 5 глави 2 (див.вище) конкретні розв'язки $p=p(\tau)$ системи інтегральних рівнянь (І3), отримувати нові вектори Лежандра і, тим самим, нові необхідні умови оптимальності парного порядку.

Останній, четвертий параграф глави 3 присвячений достатнім умовам локальної керованості системи (І) з фіксованою початковою точкою $x(t_0)=x_0$ вздовж траєкторії $x=\tilde x(t)$, яка породжена деяким припустимим керуванням $u = \tilde{u}(t)$. Нехай

$$A(x_0, t_0; t) = \left\{ x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} F_\tau(u(\tau))d\tau \;\middle|\; u \in U \right\}$$

- множина досяжності системи (I) в момент часу t з початкового положення x_0, t_0. Нехай, далі,

$$D_t = \frac{d}{dt} + \operatorname{ad} F_t(\tilde{u}(t));$$

$$\Delta_t(i;j) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -D_t^{i-1} \frac{\partial}{\partial u_j} F_t(\tilde{u}(t)), & i \geq 1 \quad (1 \leq j \leq r); \end{cases}$$

$$\Delta_t(i_2, i_1; j_2, j_1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & i_2 = i_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u_{j_2}} \Delta_t(i_1; j_1), & i_2 = 0, \quad i_1 \geq 1, \\ -\frac{\partial}{\partial u_{j_1}} \Delta_t(i_2; j_2), & i_2 \geq 1, \quad i_1 = 0, \\ [\Delta_t(i_2; j_2), \Delta_t(i_1; j_1)], & i_2 \geq 1, \; i_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$(1 \leq j_1 \leq r, \quad 1 \leq j_2 \leq r);$$

$$\delta_t^{(i;j)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_j}, & i = 0, \\ \operatorname{ad} \Delta_t(i;j), & i \geq 1 \quad (1 \leq j \leq r); \end{cases}$$

$$\Delta_t(i_k, \dots, i_1; j_k, \dots, j_1) =$$

$$= \delta_t^{(i_k; j_k)} \cdots \delta_t^{(i_3; j_3)} \Delta_t(i_2, i_1; j_2, j_1), \qquad k \geq 3$$

$$(1 \leq j_s \leq r, \quad 1 \leq s \leq k).$$

ТЕОРЕМА 4.I. Нехай для деякого моменту часу $\sigma \geq t_0$, який являється точкою нескінченної диференційовності по t нестаціонарного векторного поля $F_t(\tilde{u}(t))$, такої, що $\tilde{u}(\sigma) \in \mathrm{int}\, U$, і для деяких цілих чисел $k^\circ = 2n^\circ - 1 \geq 1$ $(n^\circ \in \mathbb{N})$, $l^\circ \geq 0$, $m^\circ \geq 0$, виконана слідуюча умова: знайдеться така пара $(s', s'') \in S(s^\circ) = S(k^\circ; l^\circ; m^\circ)$, що

I) $\tilde{x}(\sigma) \circ \overline{\Lambda}_\sigma(2n, l, m) \in \overline{L}_\sigma(\tilde{x}(\sigma); 2n, l, m)$

для всіх трійок $(2n, l, m)$, $n \geq 1$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, які задовольняють включення $(2n, l, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'')$;

2)
$$T_{\tilde{x}(\sigma)} M = \mathrm{span}\{\tilde{x}(\sigma) \circ D_\sigma^m \Delta_\sigma(i_{2n-1}, \ldots, i_1; j_{2n-1}, \ldots, j_1) \mid m \geq 0,\ n \geq 1,\ i_1 \geq 0, \ldots, i_{2n-1} \geq 0,$$
$$1 \leq j_1 \leq r, \ldots, 1 \leq j_{2n-1} \leq r,\ i_1 + \cdots + i_{2n-1} = l,\ l \geq 0,$$
$$(2n-1, l, m) \in N(s^\circ; s', s'') \cup \Pi(s^\circ; s', s'')\}.$$

Тоді система (I) локально керована вздовж траєкторії $x = \tilde{x}(t)$, $t \geq \sigma$, тобто

$$\tilde{x}(t) \in \mathrm{int}\, A(x_0, t_0; t) \quad \forall t > \sigma.$$

Тут символ $\overline{\Lambda}_\sigma(k, l, m)$ означає довільний комутаторний моном, який утворений векторними полями виду

$$D_\sigma^m \Delta_\sigma(i_{k_p}, \ldots, i_1; j_{k_p}, \ldots, j_1),\quad i_1 + \cdots + i_{k_p} = l_p,\ p = \overline{1, n},$$
$$n \in \mathbb{N},\ k_1 + \cdots + k_n = k,\ l_1 + \cdots + l_n = l,\ m_1 + \cdots + m_n = m,$$

а $\overline{L}_\sigma(\tilde{x}(\sigma); k, l, m)$ будується з мономів виду $\overline{\Lambda}_\sigma(k, l, m)$ точно так же, як $L_\sigma(\tilde{x}(\sigma); k, l, m)$ з мономів виду $\Lambda_\sigma(k, l, m)$ (див.позначення після формулювання теореми 2.I з § 2 глави 3).

На закінчення автор висловлює глибоку вдячність Ревазу Валеріа-

новичу ГамкрелIдзе I АндрIю Олександровичу Аграчову за постIйну пIдтримку I численнI стимулюючI обговорювання.

ОсновнI результати дисертацII опублIкованI в наступних роботах:

I. Третьяк А.И. О необходимых условиях оптимальности произвольного порядка в задаче быстродействия // Мат. сб. - 1987. - 132 (174), № 2. - С.261-274.
2. Третьяк А.И. Необходимые условия оптимальности произвольного порядка. - Одесса: Изд-во Одес. ун-та, 1988. - 95 с.
3. Третьяк А.И. О необходимых условиях оптимальности нечетного порядка в задаче быстродействия // Кибернетика и вычисл. техника. - 1990. - Вып.85. - С.32-37.
4. Третьяк А.И. О необходимых условиях оптимальности нечетного порядка в задаче быстродействия для систем, линейных по управлению // Мат сб. - 1990. - 181, № 5. - С.625-641.
5. Третьяк А.И. О необходимых условиях оптимальности четного порядка в задаче быстродействия для одного класса управляемых систем // Докл. АН СССР. - 1991. - 316, № 5. - С.1058-1060.
6. Третьяк А.И. Точечные условия оптимальности высокого порядка // Итоги науки и техн. Соврем.пробл.матем. Новейшие достижения / ВИНИТИ, 1991. - Т.39. - С.118-177.
7. Третьяк А.И. Достаточные условия локальной управляемости // Кибернетика и вычисл. техника. - 1992. - Вып.92.

Підп. до друку I8.I2.92 р. Формат 60х84/I6 Папір друк. Офс друк.
Умов.друк арк. I,63. Умов.фарб.-відб. I,63 Обл.-вид.арк.I,3
Тираж I00 прим. Зам. 375. Безкоштовно
Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МПС, вул.Терещенківська, 3