АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЛЕНЮК Михайло Павлович

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

01.01.03 - математична фізика

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ-1993

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00815071 (М)

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь
Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор БЕРЕЗОВСЬКИЙ А.А.
доктор фізико-математичних наук,
професор ВІРЧЕНКО Н.П.
доктор фізико-математичних наук,
професор ГЛУЩЕНКО А.А.

Провідна установа: Харківський державний університет,
м. Харків

Захист відбудеться "18" травня 1993 р. о 15 год.
на засіданні спеціалізованої Ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою : 252601 Київ 4, МСП, вул.Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитися
в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "7" квітня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради
доктор фізико-математичних наук ЛУЧКА А.Ю.

ЛННБ ім. В. Стефаника
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У зв"язку з широким застосуванням композиційних матеріалів у техніці, технології, будівництві, радіоелектроніці й зварювальному виробництві при розрахунку на міцність конструктивних елементів машин, в численних технічних задачах, що виникають при конструюванні машин і проектуванні інженерних споруд, виникає необхідність у вивченні, в першу чергу, температурних полів і пружних напружень як в однорідних об"ектах так і в кусково-однорідних чи неоднорідних тілах.

До найбільш значних досягнень нашого віку відносяться розвиток ядерних джерел енергії й освоєння на базі ракетної техніки високих швидкостей польоту. В обох випадках дово диться мати справу з надзвичайно високими температурами, зв"язаними з процесом одержання енергії, а у випадку високошвидкісних польотів також з явищами аеродинамічного нагріву. Крім високих рівнів температури в робочих умовах часто виникають також значні градієнти температур. Наслідком цих великих різниць температур є температурні напруження, які інколи являють собою важливий фактор, що визначає довговічність матеріалу.

Тому питання розрахунку температурних полів і викликаних ними температурних напружень являють істотний теоретичний, практичний і економічний інтерес.

Якщо взяти до уваги, що до рівнянь (систем рівнянь) стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності та пружності (термопружності) зводиться досить широкий клас задач математичної фізики і те, що перевіркою достовірності інформації про розв"язок задач математичної фізики служить, як правило, розв"язок відповідної лінійної задачі, то ми повинні мати у своєму арсеналі досить ефективний математичний апарат побудови точних аналітичних розв"язків лінійних задач.

Одним з ефективних методів розв"язання крайових задач математичної фізики став метод інтегральних перетворень, народжений методом розділення змінних, що виник в роботах Фур"є Ж.Б., Пуанкаре А. і Шварца Г.А. Історично розвинулися і стали класичними інтегральні перетворення Фур"є, Лапласа, Фур"є-Бесселя, Вебера, Мелліна, Лежандра, Гільберта, Меллера-Фока, Канторовича-Лебедева, Ханкеля і ін. Вони успішно працюють при розв"язанні задач математичної фізики однорідних структур.

З гострою потребою на сучасному етапі науково-технічного прогресу в розв"язанні й дослідженні широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур виникла необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які б давали можливість алгебраїзації диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами.

Вперше такі інтегральні перетворення з"явились у математичній літературі в 70-х роках нашого століття в роботах Уфлянда Я.С.(і його учнів). Своє продовження вони знайшли у працях Проценка В.С. (і його учнів). Характерною особливістю цих робіт є розгляд тільки однієї точки спряження в припущенні наявності в ній умов контакту, які не охоплюють навіть таких практично важливих умов,як умов неідеального термічного контакту та ідеального механічного контакту. При цьому не була вказана логічна схема застосування до розв"язання відповідних задач математичної фізики. Тому розв"язання динамічних задач залишилися поза увагою. Якщо взяти до уваги, що найпростіший композит має дві точки спряження, то ми повинні мати конструкцію інтегрального оператора-перетворювача по меншій мірі на трьохшаровому інтервалі. В той же час приклади розрахунку термопружних полів, електричних контурів і т.д. в ортотропних і анізотропних середовищах вказують на необхідність у інтегральних перетвореннях (гібридних) на інтервалі (a,b) з довільним, але скінченним числом точок спряження.

Не менший інтерес викликають задачі із змінними крайовими умовами і в негладких областях (трикутник, прямокутник, призма, піраміда, циліндр і т. д.)

Мета роботи. Розробка загального методу побудови гібридних інтегральних перетворень і логічної схеми застосування їх до типових задач математичного аналізу і задач математичної фізики неоднорідних середовищ. Побудова фундаментальних розв"язків задачі Коші для інваріантних операторів на спеціальних ріманових многовидах.

Наукова новизна. В якості загального методу побудови гібридних інтегральних перетворень запропоновано метод дельтавидних послідовностей (ядро Діріхле, ядро Коші). Розроблена схема інтегрального зображення міри Дірака, що породжує пряме і обернене гібридне інтегральне перетворення. Побудовано гібридні інтегральні перетворення, породжені можливим розміщенням в сполученні диференціальних операторів Фур"є,Бесселя,Лежандра. Указана логічна схема застосування побудованих гібридних інтегральних перетворень до розв"язання задач аналізу і математичної фізики. Побудовано фундаментальні розв"язки задачі Коші для інваріантних параболічних, B -параболічних, гіперболічних і B-гіперболічних рівнянь і систем рівнянь на спеціальних ріманових многовидах.

Теоретична і практична цінність. Узагальнені класичні інтегральні перетворення Фур"є, Фур"є-Бесселя, Вебера і Ханкеля на випадок інтервалу з n точками спряження; побудована група гібридних інтегральних перетворень, породжених на полярній осі з однією і двома точками спряження можливим сполученням диференціальних операторів Фур"є, Бесселя і Лежандра; на спеціальних ріманових многовидах, утворених топологічним добутком m --лисної ріманової поверхні $(m \leq \infty)$ і $(n-1)$ - вимірного евклідового простору, побудовано фундаментальний розв"язок задачі Коші для інваріантних параболічних, B -параболічних, гіперболічних і B -гіперболічних операторів в розумінні Петровського . Запропонована логічна схема застосування гібридних інтегральних перетворень для побудови точних аналітичних розв"язків відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур. Одержані результати можуть бути використані як ефективний математичний апарат побудови розв"язку досить широкого класу сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур і математичного аналізу. Написаний при цьому аналітичний розв"язок носить алгоритмічний характер і може бути використаний з допомогою ЕОМ для числового аналізу.

Деякі ідеї і результати дисертації вже знайшли застосування у кандидатських дисертаціях Лакусти К.В. (м.Чернівці, 1981), Вальківської В.І. (м.Чернівці, 1981), Делея В.І. (м.Хмельницький, 1985), Русакової О.Я. (м.Чернівці, 1988), Шеляг Л.К. (м.Чернівці, 1989), Шинкарика М.І. (м.Тернопіль, 1990), Романович Т.М. (м.Хмельницький, 1991), Котенко Н.В. (м.Чернівці, 1991), Паскаря О.О. (м.Тирасполь, 1992).

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались: на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь і наукових конференціях Чернівецького державного університету, на наукових семінарах відділу нелінійних коливань і математичної фізики Інституту математики АН України, на наукових семінарах в Інституті ППММ (м.Львів), в Інституті ПММ (м.Донецьк), на науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського університету, на міському семінарі "Диференціальні рівняння і їх застосування" (м.Київ, Політехнічний ін-т, керівник семінару проф. Вірченко Н.П.); на другому республіканському симпозіумі з диференціальних і інтегральних рівнянь (м.Одеса, 1978), на всесоюзній конференції з теорії пружності (м.Єреван, 1979), на другій всесоюзній конференції "Термодинамика необратимых процессов" (м.Чернівці, 1984), на першій (м.Львів, 1983), другій (м.Львів, 1987) і третій (м.Львів, 1991) всесоюзних конференціях "Механика неоднородных структур"; на республіканській науковій конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (м.Одеса, 1987); на другій (м.Дрогобич, 1989) і третій (м.Дрогобич, 1991) всесоюзних конференціях "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений", на всесоюзній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (м.Тернопіль, 1989); на наукових конференціях "Нелинейные задачи математической физики" (м.Донецьк, 1983, 1985, 1987, 1991; м.Чернівці, 1989); на міжнародній науковій конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения, Математическая физика и специальные функции" (м.Самара, 1992); на IУ міжреспубліканському симпозіумі "Остаточные напряжения: моделирование и управление" (м.Пермь, 1992), на міжнародній конференції, присвяченій пам"яті академіка Кравчука М.П. (Київ-Луцьк, 1992).

Публікації. По матеріалах дисертації опубліковано 90 праць. Основні результати викладено у роботах [1-53]. З результатів сумісних праць у дисертацію включено тільки ті, які належать автору дисертації.

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, заключення і списку цитованої літератури. Робота викладена на 329 сторінках машинописного тексту. Бібліографія утримує 142 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі до дисертації обгрунтовано актуальність теми, дано коротко огляд літератури по темі дисертації і зроблено опис одержаних результатів по розділах. Тут же наведено список кандидатських дисертацій, виконання яких базувалося на матеріалах та ідеях даної роботи, і перелік положень, що виносяться на захист.

I. У першому розділі "Інтегральні перетворення для кусково-однорідних середовищ", що складається з семи параграфів, побудовано ядра прямих і обернених інтегральних перетворень, які узагальнюють класичні інтегральні перетворення Фур"є, Фур"є-Бесселя, Вебера і Ханкеля на випадок інтервалів з точками спряження. Ми виходимо із того, що кожне інтегральне перетворення породжується інтегральним зображенням δ-функції (міри Дірака). Останнє можна одержати як границя в розумінні (сенсі) теорії узагальнених функцій дельтавидних послідовностей, в якості яких служить або ядро Діріхле або ядро Коші -фундаментальний розв"язок задачі Коші (фундаментальна функція Коші) для сепаратної системи класичних рівнянь теплопровідності параболічного (B- параболічного) типу у відповідних областях.

У першому параграфі інтегральна формула Фур"є

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi, \qquad (1)$$

що породжує пряме

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\sigma x}dx\equiv\tilde{f}(\sigma) \qquad (2)$$

і обернене

$$F^{-1}[\tilde{f}(\sigma)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\sigma)e^{i\sigma x}dx\equiv f(x) \qquad (3)$$

інтегральне перетворення Фур"є, узагальнюється на випадок декартової осі з однією точкою спряження

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\varphi(x,\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\overline{\varphi(\xi,\lambda)}\,\tau(\xi)d\xi\right]d\lambda. \qquad (4)$$

Звідси маємо:

$$F_1[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{\varphi(x,\lambda)}\,\tau(x)\,dx\equiv\tilde{f}(\lambda), \qquad (5)$$

$$F_1^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}[\tilde{f}(\lambda)\varphi(x,\lambda)]d\lambda\equiv f(x). \qquad (6)$$

Тут $\mathrm{Re}(\cdots)$ означає дійсну частину від виразу, а риска зверхукомплексне спряження, $r(x)$-вагова функція, $\varphi(x,\lambda)$спектральна функція. Умови спряження тут і далі мають вигляд

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dx}+\beta_{j1}^{k}\right)f-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dx}+\beta_{j2}^{k}\right)f\right]\Big|_{x=l_k}=0\ ,\ j=1,2$$
$$\left(\alpha_{jm}^{k}\geqslant 0,\ \beta_{jm}^{k}\geqslant 0,\ c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0\right). \tag{7}$$

У другому параграфі методом дельтавидної послідовності (ядро Діріхле) доводиться

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку (l_0,∞), кусково-неперервна, абсолютно сумовна і має там обмежену варіацію, то для $x\in I_n^+=\bigcup_{k=1}^{n+1}(l_{k-1},l_k)$ $(l_{n+1}=\infty)$ справедливе інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)\Omega_n(\lambda)\int_{l_0}^\infty f(\xi)\varphi(\xi,\lambda)r(\xi)\,d\xi\,d\lambda. \tag{8}$$

Тут

$\varphi(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n} v_k(x,\lambda)\theta(x-l_{k-1})\theta(l_k-x)+v_{n+1}(x,\lambda)\,\theta(x-l_n)$ – власна функція спектральної задачі Штурма-Ліувілля

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\lambda^2+\gamma_j^2}{a_j^2}\right)v_j(x,\lambda)=0,\ x\in(l_{j-1},l_j);\ \gamma_j^2\geqslant 0;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{9}$$

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dx}+\beta_{11}^{0}\right)v_1\Big|_{x=l_0}=0,\ |v_{n+1}|\Big|_{x=\infty}<\infty;\ (\alpha_{11}^{0})^2+(\beta_{11}^{0})^2\neq 0, \tag{10}$$

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dx}+\beta_{j1}^{k}\right)v_k(x,\lambda)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dx}+\beta_{j2}^{k}\right)v_{k+1}(x,\lambda)\right]\Big|_{x=l_k}=0,\ j=1,2;\ k=\overline{1,n} \tag{11}$$

$\Omega_n(\lambda)$-спектральна густина, $r(x)$-вагова функція, $\theta(x)$ -одинична функція Хевісайда.

З інтегрального зображення (8) одержуємо:

$$F_{n,+}[f(x)]=\int_{l_0}^\infty f(x)\,\varphi(x,\lambda)\,r(x)\,dx\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{12}$$

$$F_{n,+}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)\varphi(x,\lambda)\Omega_n(\lambda)d\lambda \equiv f(x). \qquad (13)$$

Алгебру диференціального оператора

$$B \equiv \sigma(x)L = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\theta(x-l_{j-1})\theta(l_j-x)\frac{d^2}{dx^2} + a_{n+1}^2\theta(x-l_n)\frac{d^2}{dx^2}$$

дає можливість побудувати

Теорема 2. Для двічі неперервно диференційовної на множині I_n^+ функції $f(x)$, що задовольняє умовам спряження (11), крайову умову

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dx}+\beta_{11}^0)\, f(x)\Big|_{x=l_0} = g_0 \qquad (14)$$

і зникає на нескінченності разом з похідною першого порядку, справедлива основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора B:

$$F_{n,+}[B[f]] = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} \frac{d^2 f}{dx^2} v_j(x,\lambda)\, \tau_j\, dx = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) -$$
$$- \tau_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1} v_1(l_0,\lambda) g_0 - \sum_{j=1}^{n+1}\gamma_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} f(x) v_j(x,\lambda)\tau_j\, dx. \qquad (15)$$

Третій параграф присвячений побудові системи власних чисел і відповідних їм власних вектор-функцій на множині

$$I_n = \{x : x \in \bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1}, l_j);\ l_0 \geq 0,\ l_{n+1} = l < \infty\}$$

задачі Штурма-Ліувілля:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q_j^2\right)v_j = 0;\quad q_j^2 = a_j^{-2}(\lambda^2+\gamma_j^2),\quad j=\overline{1,n+1}, \qquad (16)$$

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dx}+\beta_{11}^0)v_1\Big|_{x=l_0} = 0,\quad (\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dx}+\beta_{22}^{n+1})v_{n+1}\Big|_{x=l} = 0, \qquad (17)$$

$$\left[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dx}+\beta_{j1}^k)v_k - (\alpha_{j2}^k\frac{d}{dx}+\beta_{j2}^k)v_{k+1}\right]\Big|_{x=l_k} = 0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}. \qquad (18)$$

Властивості системи власних вектор-функцій

$$\{\varphi(x,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}=\Big\{\sum_{k=1}^{n+1}v_k(x,\lambda_j)\theta(x-l_{k-1})\theta(l_k-x)\Big\}_{j=1}^{\infty}$$

дозволяють сформулювати твердження.

Теорема Стєклова . Будь-яка двічі неперервно диференційовна на множині I_n функція $f(x)$, що задовольняє крайові умови (17) і умови спряження (18), розгортається у рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур"є за системою $\{\varphi(x,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi(x,\lambda_j)}{\|\varphi(x,\lambda_j)\|^2}\int_{l_0}^{l}f(x)\,\varphi(x,\lambda_j)\,\tau(x)\,dx. \qquad (19)$$

Ряд Фур"є (19) породжує скінченне пряме F_{jn} і обернене F_{jn}^{-1} інтегральне перетворення Фур"є на $(n+1)$-шаровому сегменті $[l_0,l]$ за правилами :

$$F_{jn}[f(x)]=\int_{l_0}^{l}f(x)\,\varphi(x,\lambda_j)\,\tau(x)\,dx\equiv f_j, \qquad (20)$$

$$F_{jn}^{-1}[f_j]=\sum_{j=1}^{\infty}f_j\,\frac{\varphi(x,\lambda_j)}{\|\varphi(x,\lambda_j)\|^2}\equiv f(x), \qquad (21)$$

$$F_{jn}\Big[\Re(x)\frac{d^2f}{dx^2}\Big]=-\lambda_j^2 f_j+a_{n+1}^2\tau_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}v_{n+1}(l,\lambda_j)\times$$
$$\times\Big(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dx}+\beta_{22}^{n+1}\Big)f\Big|_{x=l}-a_1^2\tau_1(\alpha_{11}^0)^{-1}v_1(l_0,\lambda_j)\Big(\alpha_{11}^0\frac{df}{dx}+$$
$$+\beta_{11}^0 f\Big)\Big|_{x=l_0}-\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}f(x)\,v_i(x,\lambda_j)\tau_i\,dx. \qquad (22)$$

Тут $\|\varphi(x,\lambda_j)\|^2$ -квадрат норми власної вектор-функції.

У четвертому параграфі проведено узагальнення інтегралу Фур"є-Бесселя

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)]=\int_0^{\infty}J_\nu(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\int_0^{\infty}f(\rho)J_\nu(\lambda\rho)\,\rho\,d\rho \qquad (23)$$

на випадок полярної осі $r\geqslant 0$ з n точками спряження.

Теорема 3. Нехай функція

$$g(r)=\sqrt{r}\,f(r)\Big[\sum_{k=1}^{n}r^{\alpha_k}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)+r^{\alpha_{n+1}}\theta(r-R_n)\Big]$$

визначена, кусково-неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію. Тоді для

$$r \in I_n^+ = \{ r:\ r \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (R_{k-1}, R_k);\ R_0 = 0,\ R_{n+1} = \infty \}$$

справедливе інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)] = \int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\,\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)\,d\lambda \times \int_0^\infty f(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\,\sigma(\rho)\,d\rho . \qquad (24)$$

Тут вагова функція

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k r^{2\alpha_k+1}\theta(r-R_{k-1})\,\theta(R_k-r) + \sigma_{n+1} r^{2\alpha_{n+1}+1}\theta(r-R_n),$$

$$\sigma_k = \frac{1}{a_k^2}\,\frac{c_{1k}\,c_{1,k+1}\cdots c_{1n}\,R_k^{2\alpha_{k+1}+1}\cdots R_n^{2\alpha_{n+1}+1}}{c_{2k}\,c_{2,k+1}\cdots c_{2n}\,R_k^{2\alpha_k+1}\cdots R_n^{2\alpha_n+1}};\quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2};$$

$\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)$ -спектральна густина, а компоненти $V_k(r,\lambda)$ спектральної функції

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} V_k(r,\lambda)\,\theta(r-R_{k-1})\,\theta(R_k-r) + V_{n+1}(r,\lambda)\,\theta(r-R_n)$$

є власними функціями сингулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля:

$$(B_{\nu_j,\alpha_j}+q_j^2)V_j \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu_j^2-\alpha_j^2}{r^2}+\frac{\lambda^2+\gamma_j^2}{a_j^2}\right)V_j = 0;\ j=\overline{1,n+1} \qquad (25)$$

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_1-\nu_1}V_1\right)\right]\Big|_{r=0} = 0, \quad V_{n+1}(r,\lambda)\Big|_{r=\infty} = 0, \qquad (26)$$

$$\left[\left(\alpha_{i1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i1}^k\right)V_k(r,\lambda)-\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)V_{k+1}(r,\lambda)\right]\Big|_{r=R_k} = 0;\ k=\overline{1,n};\ i=1,2. \qquad (27)$$

Інтегральне зображення (24) породжує пряме

$$H_{(\nu,\alpha);n}[f(r)] = \int_0^\infty f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\,\sigma(r)\,dr \equiv \tilde{f}(\lambda) \qquad (28)$$

і обернене

$$H_{(\nu,\alpha);n}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\,\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)\,d\lambda \equiv f(r) \qquad (29)$$

інтегральне перетворення Фур"є-Бесселя на полярній осі $r \geq 0$ з n точками спряження.

Побудова алгебри диференціального оператора

$$\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)B_{\nu_k,\alpha_k} + \theta(r-R_n)B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}$$

грунтується на твердженні.

Теорема 4. Якщо функція $f(r) \in C^{(2)}(I_n^+)$ задовольняє умови спряження (27) і умови обмеження

$$\lim_{r\to 0+} \frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_1-\nu_1} f(r)\right) = 0; \left(r^{\alpha_{n+1}+\frac{1}{2}} \frac{d^j f}{dr^j}\right)\Big|_{r=\infty} = 0 \ ; j=0,1, \quad (30)$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора $\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{(\nu,\alpha);n}[g(r)\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] \equiv \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} B_{\nu_k,\alpha_k}[f(r)] V_k(r,\lambda) \times \quad (31)$$

$$\times \sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r,\lambda)\sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr .$$

Аналогічно у п"ятому параграфі проводиться узагальнення інтеграла Вебера

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)] = \int_0^\infty V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \int_{R_0}^\infty f(\rho) V(\rho,\lambda)\rho d\rho \quad (32)$$

на випадок полярної осі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження.

Теорема 5. Нехай функція $g(r)$ визначена, кусково-неперервна, абсолютно інтегровна і має обмежену варіацію на (R_0, ∞). Тоді для $r \in I_n^+$ (при $R_0 > 0$) справедливе інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)] = \int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)\, d\lambda \int_{R_0}^\infty f(\rho) \times$$
$$\times V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\rho d\rho . \quad (33)$$

Спектральна функція $V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)$ задовольняє систему (25), умови спряження (27) і крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Big|_{r=R_0} = 0 , \quad V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Big|_{r=\infty} = 0 \quad (34)$$

$\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)$ -спектральна густина, породжена спектральною задачею Штурма-Ліувілля (25), (27), (34).

Інтегральне зображення (33) породжує пряме W_n і обернене W_n^{-1} інтегральне перетворення Вебера на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження:

$$W_n[f(r)]=\int_{R_0}^{\infty}f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde f(\lambda),\qquad(35)$$

$$W_n^{-1}[\tilde f(\lambda)]=\int_0^{\infty}\tilde f(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)\,d\lambda\equiv f(r).\qquad(36)$$

Основна тотожність набуває вигляду:

$$W_n[\mathcal{G}(r)B_{(\nu,\alpha)}[f(r)]]=-\lambda^2\tilde f(\lambda)-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k}f(r)V_k(r,\lambda)\times$$
$$\times\sigma_k(r)\,dr-a_1^2R_0^{2\alpha_1+1}\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)f\Big|_{r=R_0}.\qquad(37)$$

У шостому параграфі побудовано пряме H_{sn}^{I} і обернене H_{sn}^{-I} скінченне інтегральне перетворення Ханкеля 1-го роду на сегменті $[0,R]$ з n точками спряження:

$$H_{sn}^{I}[f(r)]=\int_0^R f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)\sigma(r)\,dr\equiv f_s,\qquad(38)$$

$$H_{sn}^{-I}[f_s]=\sum_{s=1}^{\infty}f_sV_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)\,\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)\|^{-2}\equiv f(r),\qquad(39)$$

$$H_{sn}^{I}[\mathcal{G}(r)B_{(\nu,\alpha)}[f(r)]]=-\lambda_s^2f_s+a_{n+1}^2\sigma_{n+1}R_n^{2\alpha_{n+1}+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}\times\qquad(40)$$
$$\times V_{n+1}(R,\lambda_s)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)f\Big|_{r=R}-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k}f(r)V_k(r,\lambda_s)\sigma_k r^{2\alpha_k+1}\,dr.$$

Тут $V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)$-власна вектор-функція спектральної задачі Штурма-Ліувілля на множині

$$I_n=\left\{r:\ r\in\bigcup_{k=1}^{n+1}(R_{k-1},R_k);\ R_0=0,\ R_{n+1}=R\right\}\qquad(41)$$

побудувати ненульовий розв'язок системи(25) за умовами спряження (27) і крайовими умовами:

$$\lim_{r\to 0+}\left(r^{\alpha_1-\nu_1}\frac{dv}{dr}\right)=0;\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)v\Big|_{r=R_{n+1}}=0\qquad(42)$$

За логічною схемою шостого параграфа на сегменті $[R_0,R_{n+1}]$ $(R_0>0,\ R_{n+1}=R<\infty)$ з n точками спряження побудовано скінченні інтегральні перетворення Ханкеля II-го роду:

$$H_{sn}^{II}[f(r)]=\int_{R_0}^{R}f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)\sigma(r)\,dr\equiv f_s,\qquad(43)$$

$$H_{sn}^{-\overline{II}}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s) \| V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_s)\|^{-2} \equiv f(r), \tag{44}$$

$$H_{sn}^{\overline{II}}[\sigma(r) B_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = -\chi_s^2 f_s - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r,\lambda_s) \sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr - a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0,\lambda_s) (\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0) f|_{r=R_0} + R^{2\alpha_{n+1}+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_s) \times (\alpha_{22}^{n+1} \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^{n+1}) f|_{r=R}. \tag{45}$$

Одержані результати припускають узагальнення на множину функцій із класу L_2.

Тотожності (31), (37), (40) і (45) дозволяють застосувати одержані інтегральні перетворення до розв"язання відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

П. Другий розділ "Інтегральні перетворення з нерозділеними змінними" присвячений побудові фундаментальних розв"язків задачі Коші для інваріантних відносно групи обертань навколо початку координат евклідового простору E_n параболічних, B-параболічних, гіперболічних і B-гіперболічних в розумінні Петровського рівнянь і систем рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^{\ell} A_k(t,\Delta)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\ell} A_k(t,\Delta,B_{\nu\alpha})\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \tag{46}$$

$$\sum_{k=0}^{S} A^{(k)}\left(t,\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0; \quad \sum_{k=0}^{S} A^{(k)}\left(t,\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},B_{\nu\alpha}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0 \tag{47}$$

на рімановых многовидах $\mathcal{R}_n^{(m)} = \mathcal{R}_2^{(m)} \times E_{n-2}$ та $\overset{+}{\mathcal{R}}{}_{n+1}^{(m)} = \mathcal{R}_2^{(m)} \times \overset{+}{E}_{n-1}$. Тут $\mathcal{R}_2^{(m)}$ -ріманова поверхня функції

$$\omega = \begin{cases} \sqrt[m]{z}, & z = x_1 + i x_2,\ m \in [2,\infty),\ i^2 = -1, \\ \ln z = \lim\limits_{m\to\infty} m(\sqrt[m]{z} - 1), & \end{cases}$$

$$E_{n-2} = \{(x_3, x_4, \dots, x_n) :\ x_j \in (-\infty, +\infty),\ j = \overline{3,n}\},$$

$$\overset{+}{E}_{n-1} = \{(x_3, x_4, \dots, x_n, y) :\ x_j \in (-\infty,\infty), j = \overline{3,n};\ y \in (0,\infty)\}.$$

Апаратом побудови фундаментальних розв"язків задачі Коші для рівнянь (46) і фундаментальних матриць розв"язків задачі Коші для систем рівнянь (47) служать інтегральні зображення міри Дірака.

Теорема 6. Якщо при будь-якому $\varepsilon > 0$ для неперервної за сукупністю змінних функції $f(t,\lambda)$, для якої $f(0,\lambda)=1$, інтеграл

$$I_n(R)=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^{n-1}\,j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda$$

рівномірно збігається при $t>\varepsilon$ до звичайної функції $G(t,x,\xi)$, то в результаті теорії узагальнених функцій

$$\lim_{t\to 0+} G(t,x,\xi)=\delta_\xi\equiv\delta(x-\xi)=$$
$$=\delta(x_1-\xi_1)\otimes\delta(x_2-\xi_2)\otimes\ldots\otimes\delta(x_n-\xi_n). \tag{48}$$

Теорема 7. Якщо при будь-якому $\varepsilon>0$ неперервна за сукупністю змінних функція $f(t,\lambda,\eta)$ рівномірно прямує до одиниці при $t\to 0+$ і при $t>\varepsilon$ подвійний інтеграл

$$\frac{C_\nu\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\lambda,\eta)\,\Psi_{\nu\alpha}(y,\eta,y_0)\,j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,\lambda^{n-1}\,d\eta\,d\lambda$$

рівномірно збігається до звичайної функції $G(t,x,\xi,y,y_0)$, то в розумінні теорії узагальнених функцій

$$\lim_{t\to 0+} G(t,x,\xi,y,y_0)=y_0^{-(2\alpha+1)}\delta(x-\xi,y-y_0)\equiv\delta_{(\xi,y_0)}. \tag{49}$$

Теорема 8. Якщо функція $f(t,\lambda)$ задовольняє умови теореми 1, то на многовиді $\mathcal{R}_n^{(m)}$ має місце інтегральне зображення міри Дірака

$$\delta^{(m)}_{(\xi)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty f(t,\lambda)\Big[j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,\dot{\mathcal{J}}(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1)\,\mathcal{K}_m(\beta,\varphi-\varphi_0)\,d\beta\Big]\lambda^{n-1}\,d\lambda. \tag{50}$$

Теорема 9. Якщо функція $f(t,\lambda,\eta)$ задовольняє умови теореми 2, то на многовиді $\overset{+}{\mathcal{R}}{}_{n+1}^{(m)}$ має місце інтегральне зображення міри Дірака

$$\delta^{(m)}_{(\xi,y_0)}=\lim_{t\to 0+}\frac{C_\nu\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\lambda,\eta)\,\Psi_{\nu\alpha}(y,\eta,y_0)\Big[j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,\dot{\mathcal{J}}(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1)\,\mathcal{K}_m(\beta,\varphi-\varphi_0)\,d\beta\Big]\lambda^{n-1}\,d\eta\,d\lambda. \tag{51}$$

У цих рівностях прийняті позначення:
$R=|x-\xi|=\left[\sum_{j=1}^n(x_j-\xi_j)^2\right]^{1/2}\equiv\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\sum_{k=3}^n(x_k-\xi_k)^2\right]^{1/2}$
квадрат віддалі між точками $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$;

$\omega_n = 2\pi^{n/2}[\Gamma(\frac{n}{2})]^{-1}$ -величина площі одиничної сфери в E_n; $j_\nu(s) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) s^{-\nu} J_\nu(s)$ $(j_\nu(0)=1, j_\nu'(0)=0, 2\nu+1>0)$ - нормована функція Бесселя I-го роду дійсного аргументу, $J_\nu(s)$ - звичайна функція Бесселя I-го роду порядку ν;

$$J_{\nu,\alpha}(x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) x^{-\alpha} J_\nu(x), \quad C_\nu = [2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)]^{-1},$$

$$\Psi_{\nu,\alpha}(y,\eta,y_0) = J_{\nu,\alpha}(\eta y) J_{\nu,\alpha}(\eta y_0)\, \eta^{2\alpha+1},$$

$$\mathcal{K}_m(\beta,\varphi) = \frac{\sin\frac{\pi+\varphi}{m}}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{m} - \cos\frac{\pi+\varphi}{m}} + \frac{\sin\frac{\pi-\varphi}{m}}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{m} - \cos\frac{\pi-\varphi}{m}},$$

$$\dot{j}(\varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| < \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases},$$

$\dot{j}(\varphi)$-одинична функція на рімановій поверхні $\mathcal{R}_2^{(m)}$,

$$R_1^2 = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\operatorname{ch}\beta + \sum_{k=3}^{n}(x_k - \xi_k)^2.$$

Фундаментальну роль при цьому відіграють тотожності:

$$B_{\nu,\alpha}[\Psi_{\nu,\alpha}(y,\eta,y_0)] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}\right)\Psi_{\nu,\alpha} = -\eta^2\Psi_{\nu,\alpha}(y,\eta,y_0);$$

$$\Delta\, j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R) = -\lambda^2 j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R);$$

$$\Delta_r\, j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1) = \tag{52}$$

$$= -\lambda^2 j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1); \quad f(\Delta)\Phi_{n,m}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0) = f(-\lambda^2)\Phi_{n,m}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0).$$

Тут функція $f(z)$ -функція, що в z - площині зображується всюди збіжним рядом,

$$\Phi_{n,m}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0) = j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,\dot{j}(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1)\,\mathcal{K}_m(\beta,\varphi-\varphi_0)\,d\beta.$$

Вищенаведені інтегральні зображення міри Дірака дають можливість визначити інтегральні перетворення з нерозділеними змінними типу Бохнера-Шестопала, які внаслідок тотожностей (52) задачу побудови фундаментального розв"язку задачі Коші для рівнянь (46) і фундаментальної матриці розв"язку задачі Коші для систем (47) приводять до побудови розв"язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь.

В якості прикладів розглянуто основні рівняння теорії поля: рівняння теплопровідності, система рівнянь теорії пружності, система рівнянь тепло-і масопереносу, система рівнянь, що описує збурення в"язко-пружного середовища і т.д.

Ш. У третьому розділі "Гібридні інтегральні перетворення для неоднорідних середовищ" методом дельтавидних послідовностей побудовано: а) на полярній осі з однією точкою спряження гібридні інтегральні перетворення (ГІП) Ханкеля-Фур"є (§1), Лежандра-Вебера (§2) і Фур"є-Лежандра (§3); б) на полярній осі з двома точками спряження ГІП Ханкеля-Лежандра-Вебера (§4), Лежандра-Ханкеля-Фур"є (§5), Ханкеля-Фур"є-Вебера (§6); в) на полярній осі з n точками спряження ГІП Бесселя-Фур"є-Бесселя-...-Фур"є-Бесселя (§7).

У кожному параграфі сформульовані і доведені теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно-сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації через ядра побудованих інтегральних операторів, а також одержані основні тотожності інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора (з метою застосування побудованих ГІП для розв"язування відповідних задач математичної фізики неоднорідних структур).

Поскільки теореми носять ідентичний характер, то наведемо одну з них.

Згідно § 6 введемо в розгляд спектральну функцію

$$V(r,\lambda) = V_1(r,\lambda)\,\theta(r)\,\theta(R_1-r) + V_2(r,\lambda)\,\theta(R_2-r)\,\theta(r-R_1) + V_3(r,\lambda)\,\theta(r-R_2),$$

спектральну густину

$$\Omega_{(\nu),\alpha}(\lambda) = \lambda \bar{b}_3^{2\alpha_3}\left([\omega_{(\nu),\alpha;1}(\lambda)]^2 + [\omega_{(\nu),\alpha;2}(\lambda)]^2\right)^{-1}$$

і вагову функцію

$$\sigma(r) = \sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\theta(r)\theta(R_1-r) + \sigma_2\,\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + \sigma_3 r^{2\alpha_3+1}\theta(r-R_2).$$

Теорема 10 (3.6.1). Нехай функція

$$g(r) = f(r)\left[r^{\alpha_1+\frac{1}{2}}\theta(r)\theta(R_1-r) + 1\cdot\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + r^{\alpha_3+1/2}\theta(r-R_2)\right]$$

визначена, неперервна, абсолютно інтегрована і має обмежену варіацію на $(0,\infty)$. Тоді для

$$r \in I_2^+ = \{r : r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2;\infty)\}$$

справедливе інтегральне зображення

$$f(r)=\int_0^\infty V(r,\lambda)\Omega_{(\gamma,\alpha)}(\lambda)d\lambda\int_0^\infty f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho . \qquad (53)$$

Доведення. Функції $V_j(r,\lambda)$ і $V_j(r,\beta)$ задовольняють рівняння:

$$\begin{cases}[B_{\nu_j,\alpha_j}+a_j^{-2}(\lambda^2+\gamma_j^2)]V_j(r,\lambda)=0, & (54)\\ [B_{\nu_j,\alpha_j}+a_j^{-2}(\beta^2+\gamma_j^2)]V_j(r,\beta)=0, \quad j=1,3, & (55)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\frac{d^2}{dr^2}+a_2^{-2}(\lambda^2+\gamma_2^2)]V_2(r,\lambda)=0, & (56)\\ [\frac{d^2}{dr^2}+a_2^{-2}(\beta^2+\gamma_2^2)]V_2(r,\beta)=0. & (57)\end{cases}$$

Рівність (54) помножимо на $r^{2\alpha_j+1}V_j(r,\beta)$, а рівність (55) – на $r^{2\alpha_j+1}V_j(r,\lambda)$ і віднімемо від першої другу:

$$V_j(r,\lambda)V_j(r,\beta)\,r^{2\alpha_j+1}=\frac{a_j^2}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_j+1}\Big(V_j(r,\lambda)\times \qquad (58)$$

$$\times\frac{dV_j}{dr}(r,\beta)-V_j(r,\beta)\frac{dV_j}{dr}(r,\lambda)\Big)\Big],\quad j=1,3.$$

Рівність (56) помножимо на $V_2(r,\beta)$, а рівність (57) – на $V_2(r,\lambda)$ і віднімемо від першої другу:

$$V_2(r,\lambda)V_2(r,\beta)=\frac{a_2^2}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dr}\Big[V_2(r,\lambda)\frac{dV_2}{dr}(r,\beta)-V_2(r,\beta)\frac{dV_2}{dr}(r,\lambda)\Big]. \qquad (59)$$

Візьмемо деяке достатньо велике число $A>R_2$. Внаслідок рівностей (58) і (59) маємо :

$$\int_0^A V(r,\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)\,dr = \int_0^{R_1} V_1(r,\lambda)V_1(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\,dr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} V_2(r,\lambda)V_2(r,\beta)\sigma_2\,dr + \int_{R_2}^{A} V_3(r,\lambda)V_3(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_3+1}\,dr = \tag{60}$$
$$=\frac{A^{2\alpha_3+1}}{\lambda^2-\beta^2}\left[V_3(A,\lambda)\frac{dV_3(A,\beta)}{dr}-V_3(A,\beta)\frac{dV_3(A,\lambda)}{dr}\right].$$

Для довільних додатних чисел c і d $(c<d)$ і довільної скінченої функції $\Psi(\lambda)$, заданої на сегменті $[c,d]$, знайдемо величину інтеграла

$$\int_0^\infty\int_c^d \Psi(\lambda)V(r,\lambda)\,d\lambda\,V(r,\beta)\sigma(r)\,dr. \tag{61}$$

Подвійний інтеграл (61) внаслідок рівності (60) напишемо так:

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d \Psi(\lambda)\frac{A^{2\alpha_3+1}}{\lambda^2-\beta^2}\left[V_3(A,\lambda)\frac{dV_3(A,\beta)}{dr}-V_3(A,\beta)\frac{dV_3(A,\lambda)}{dr}\right]d\lambda \tag{62}$$

Поскільки c і d – додатні числа, то для знаходження границі (62) скористаємося для функцій V_3 і $\frac{dV_3}{dr}$ асимптотичними формулами

$$J_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right);\quad N_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Безпосередньо маємо:

$$V_3(A,\lambda)\frac{dV_3}{dr}(A,\beta)-V_3(A,\beta)\frac{dV_3}{dr}(A,\lambda)\approx\frac{1}{\pi A^{2\alpha+1}\left(q_3(\lambda)q_3(\beta)\right)^{\alpha+1/2}}\times$$
$$\times\Big\{\left[\omega_{(\nu,\alpha);i1}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);i1}(\beta)+\omega_{(\nu,\alpha);i2}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);i2}(\beta)\right]\left[q_3(\lambda)+q_3(\beta)\right]\sin A\left(q_2(\lambda)-q_2(\beta)\right)+$$
$$+\left[\omega_{(\nu,\alpha);i1}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);i2}(\beta)-\omega_{(\nu,\alpha);i1}(\beta)\,\omega_{(\nu,\alpha);i2}(\lambda)\right]\left[q_2(\lambda)+q_2(\beta)\right]\cos A\left[q_2(\lambda)-q_2(\beta)\right]+$$

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

$$+\left[\omega_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);2}(\beta)+\omega_{(\nu,\alpha);1}(\beta)\,\omega_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)\right]\left[q_2(\lambda)-q_2(\beta)\right]\times$$
$$\times\sin\left[A(q_2(\lambda)+q_2(\beta))-\pi\nu\right]+\left[\omega_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);1}(\beta)-\right. \qquad (63)$$
$$\left.-\,\omega_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha);2}(\beta)\right]\left[q_2(\lambda)-q_2(\beta)\right]\cos\left[A(q_2(\lambda)+q_2(\beta))-\pi\nu\right].$$

Якщо функція $\psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно інтегровна і має обмежену варіацію на $[c,d]$, то підстановка (63) в (62) з використанням лем Рімана і Діріхле приводить до рівності

$$\int_0^\infty\int_c^d \psi(\lambda)V(r,\lambda)V(r,\beta)d\lambda\,\sigma(r)dr=$$
$$=\begin{cases}\psi(\beta)\left[\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)\right]^{-1}, & \beta\in[c,d]\\ 0, & \beta\bar{\in}[c,d]\end{cases}.$$

Якщо функція $\psi(\lambda)$ володіє вищевказаними властивостями на $[0,\infty)$, то

$$\int_0^\infty V(r,\beta)\,\sigma(r)\int_0^\infty \psi(\lambda)V(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)d\lambda\,dr=\psi(\beta)S_-(\beta). \qquad (64)$$

Припустимо тепер, що функція

$$f(r)=\int_0^\infty \psi(\lambda)V(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,d\lambda. \qquad (65)$$

Помножимо (65) на $\sigma(r)\,V(r,\beta)$, де β -довільне додатне число, і проінтегруємо по r від $r=0$ до $r=\infty$. Внаслідок (64) приходимо до рівності

$$\int_0^\infty f(r)\,V(r,\beta)\,\sigma(r)dr=\psi(\beta)S_-(\beta) \qquad (66)$$

Підставивши функцію

$$\psi(\lambda)=\int_0^\infty f(\rho)\,V(\rho,\lambda)\,\sigma(\rho)d\rho$$

у рівність (65), одержуємо інтегральне зображення (53).

Інтегральне зображення (53) породжує гібридне інтегральне перетворення Ханкеля І-го роду -Фур"є-Вебера:

$$H_{(\nu,\alpha);2}[f(r)] = \int_0^\infty f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)\,dr \equiv \tilde{f}(\lambda) \qquad (67)$$

$$H_{(\nu,\alpha);2}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,d\lambda \equiv f(r) \qquad (68)$$

Алгебру гібридного диференціального оператора

$$\mathcal{H}_{(\nu,\alpha)} \equiv \mathfrak{S}(r)\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)} = a_1^2\theta(r)\theta(R_1-r)B_{\nu_1,\alpha_1} + a_2^2\theta(r-R_1)\times$$
$$\times\,\theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2} + a_3^2\theta(r-R_2)\,B_{\nu_3,\alpha_3}$$

дає можливість побудувати основна тотожність.

Теорема II. Якщо функція $f(r)\in C^{(2)}(I_2^+)$ задовольняє умови спряження, обмежена разом з першою похідною в точці $r=0$, а при $r\to\infty$ зникає разом з першою похідною як функція $g(r)= r^{\alpha_3+1/2}f(r)$, то має місце основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора $\mathcal{H}_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{(\nu,\alpha);2}\left[\mathcal{H}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \gamma_1^2\int_0^{R_1} f(r)\times$$
$$\times V_1(r,\lambda)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr - \gamma_2^2\int_{R_1}^{R_2} f(r)V_2(r,\lambda)\sigma_2\,dr - \qquad (69)$$
$$-\,\gamma_3^2\int_{R_2}^\infty f(r)V_3(r,\lambda)\,\sigma_3\, r^{2\alpha_3+1}dr.$$

Доведення проводиться методом інтегрування частинами з використанням властивостей функцій $f(r)$, $V_j(r,\lambda)$, $\sigma(r)$.

Останній параграф цього розділу присвячений побудові на множині

$$I_2 = \{r:\ r\in(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3);\ R_0\geq 0,\ R_3<\infty\}$$

скінченних гібридних інтегральних перетворень Ханкеля-1-го роду-Фур"є-Фур"є $(R_0=0)$ і Ханкеля 2-го роду-Фур"є-Фур"є $(R_0>0)$:

$$H_{n;2}[f(r)] = \int_{R_0}^{R_3} f(r)V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\sigma(r)\,dr \equiv f_n, \qquad (70)$$

$$H^{-1}_{n,2}[f_n] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)}{\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2} \equiv f(r); \quad (71)$$

Явно виписано трансцендентне рівняння, структура власної вектор-функції та квадрат її норми . При цьому сформульована теорема Стеклова і теорема про основну тотожність.

Методика, запропонована у цьому розділі, дає можливість будувати гібридні інтегральні перетворення, породжені гібридними лінійними диференціальними операторами 2-го порядку на кусково-однорідному інтервалі та їх алгебру (ідентичну алгебрі диференціального оператора Фур"є $\frac{d^2}{dx^2}$).

Практика підказує, що досить обмежитися гібридними диференціальними операторами, в структурі яких беруть участь диференціальні оператори Фур"є

$$F = \frac{d^2}{dx^2}$$, Бесселя $B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}$

і Лежандра $\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 r}$; $\nu \geq \alpha \geq -\frac{1}{2}$; $\mu > -\frac{1}{2}$.

Оператор F появляється при моделюванні фізико-механічних характеристик середовища за постійним законом, оператор $B_{\nu,\alpha}$ - за степеневим законом, оператор Λ_μ -за експоненціальним законом.

IУ. Четвертий розділ "Типові задачі аналізу і математичної фізики, що розв"язуються методом гібридних інтегральних перетворень", носить прикладний характер. Він складається з шести параграфів.

У першому параграфі методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля I-го роду-Фур"є-Фур"є обчислені суми поліпараметричної сім"ї функціональних рядів, члени яких виражаються через функції Бесселя і тригонометричні функції.

У другому параграфі методом гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го роду-Лежандра-Вебера обчислено поліпараметричну сім"ю невласних інтегралів, підінтегральні функції яких виражаються через функції Бесселя і функції Лежандра.

Третій параграф присвячений розрахунку структури нестаціонарного температурного поля в неоднорідній напівбезмежній пластині методом ГІП Ханкеля I-го роду-Фур"є-Вебера, яке виникає в результаті дії зосередженого на одній з ділянок пластини теплового джерела.

Числовий аналіз виконано на ЕОМ ЕС-1022.

У четвертому параграфі методом ГІП Фур"є-Ханкеля 2-го роду-Фур"є розв"язана задача про структуру пружних полів, які утворюються при крученні кусково-однорідного циліндричного стержня у результаті дії сконцентрованого на одній з ділянок стержня зусилля. Числовий аналіз розрахункових формул виконано на ЕОМ ЕС-1022.

У п"ятому параграфі методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій півосі з n точками спряження побудовано у замкнутій формі розв"язок незв"язної динамічної задачі термопружності для $(n+1)$-шарового пружного півпростору. Числовому аналізу піддається структура нестаціонарного температурного поля у двошаровому півпросторі, що виникає у результаті здійснення теплового удару на межі півпростору.

У шостому параграфі методом інтегрального перетворення Вебера на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження побудовано розв"язок динамічної задачі термопружності для $(n+1)$-шарового симетричного простору з симетричною порожниною, що включає в себе випадок як циліндричної (осьової) симетрії, так і сферичної (центральної) симетрії. При цьому інтегральне перетворення Вебера застосовується двічі: для розв"язання нестаціонарної температурної задачі і для розв"язання динамічної пружної задачі. Аналізу піддається випадок двошарового простору з циліндричною порожниною.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

1. Проведено узагальнення інтегрального перетворення Фур"є на випадок декартової осі з однією і двома точками спряження, класичних інтегральних перетворень Фур"є-Бесселя і Вебера на випадок полярної осі з n точками спряження.

2. Побудовано інтегральне перетворення Фур"є на декартовій півосі і декартовому сегменті з n точками спряження.

3. На сегментах $[0, R]$ і $[R_0, R]$ $(R_0 > 0)$ з n точками спряження побудовано скінченні гібридні інтегральні перетворення Ханкеля як узагальнення класичних інтегральних перетворень Ханкеля на однорідному сегменті.

4. На полярній осі з однією і двома точками спряження методом

дельтавидних послідовностей побудовано гібридні інтегральні перетворення, породжені можливим сполученням диференціальних операторів Фур"є, Бесселя і Лежандра. Побудована на полярній осі з $2n$ точками спряження гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Фур"є-Бесселя-...-Фур"є-Бесселя показує, що запропонована методика дозволяє побудувати гібридні інтегральні перетворення, породжені будь-яким сполученням диференціальних операторів Фур"є, Бесселя, Лежандра і т.д. на інтервалі визначення з будь-яким числом точок спряження.

5. На прикладі скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля-Фур"є-Фур"є запропонований метод побудови скінченних гібридних інтегральних перетворень, породжених сполученням різнотипних лінійних диференціальних операторів другого порядку. Такі інтегральні перетворення тісно характеризуються наявністю теорем про дискретний спектр і дискретну функцію, теореми Стеклова і теореми про основну тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора.

6. На спеціальних ріманових многовидах (топологічний добуток m- лисної поверхні Рімана і $(n-1)$-вимірного евклідового простору) одержано інтегральне зображення міри Дірака як узагальнення композиції мір Дірака, породжених відповідно оператором Лапласа в E_n і оператором Бесселя в E_1. Це дало можливість для інваріантних відносно групи обертань навколо початку відліку n-вимірного евклідового простору параболічних, B-параболічних, гіперболічних і B- гіперболічних за Петровським рівнянь і систем рівнянь побудувати відповідно фундаментальні розв"язки задачі Коші і фундаментальні матриці розв"язків задачі Коші.

7. Сформульовано і доведено теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних(з точно визначеною ваговою функцією) з обмеженою варіацією функцій через ядра побудованих гібридних інтегральних перетворень.

8. Запропонована логічна схема застосування гібридних інтегральних перетворень для розв"язання стаціонарних і нестаціонарних задач математичної фізики неоднорідних (кусково-однорідних) середовищ. При цьому основну роль відіграє наявність (кожний раз) основної тотожності інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора, яка дозволяє побудувати відповідну йому ал-

гебру, а, значить, виключити його з розгляду.

9. Різновидність застосування побудованих інтегральних перетворень показано на типових задачах математичного аналізу (сумування функціональних рядів і обчислення невласних інтегралів) і математичної фізики неоднорідних середовищ: нестаціонарна задача теплопровідності для трьохскладової неоднорідної напівбезмежної пластини, кручення трьохшарових неоднорідних циліндричних стержнів, динамічні задачі термопружності для кусково-однорідного $(n+1)$-шарового півпростору і $(n+1)$-шарового симетричного простору з симетричною порожниною . Побудовані методом гібридних інтегральних перетворень аналітичні розв"язки задач мають алгоритмічну форму і можуть бути використані (з допомогою ЕОМ) для числового аналізу (інженерних розрахунків) .

Таким чином, в дисертації побудовано і математично обгрунтовано гібридні інтегральні перетворення, які можуть бути використані як ефективний метематичний апарат побудови розв"язку достатньо широкого класу регулярних і сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур і математичного аналізу.

Основний зміст дисертації викладено в таких публікаціях автора:

1. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси// Изв.вузов. Математика.-1987.-№ 8.- С.3-II (співавтор Библів О.Я)
2. Интегральные преобразования Ханкеля II рода для кусочно-однородных сегментов// Изв.вузов. Математика.-1987.- № 5.- С.82-85 (співавтор Библів О.Я).
3. Интегральные преобразования Ханкеля I-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики// Вычисл.и прикл.математика.- 1988.-№ 65.-С. 24-34 (співавтор Библів О.Я.)
4. Гібридні скінченні інтегральні перетворення Ханкеля I-го роду Фур"є-Фур"є у задачах математичної фізики// Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб.наук.праць.-Чернівці, 1990.- С.128-137.
5. Гибридные интегральные преобразования (Бесселя,Лежандра,Бесселя)// Укр.. мат.журн.- .-1991.- 43, № 6.- С.770-779.

6. Гибридные интегральные преобразования Бесселя (случай двух точек сопряжения) // Начально-краевые задачи теплопроводности.- К.,1987.- С.12-33.-(Препринт/ АН УССР.Ин-т математики; 87.43).
7. Гибридные интегральные преобразования Вебера (случай двух точек сопряжения) // Начально-краевые задачи теплопроводности.- К.,1987.- С.34-59.-(Препринт/ АН УССР.Ин-т математики; 87.43).
8. Гибридные интегральные преобразования (Фурье-Бесселя,Бесселя-Фурье,Вебера-Фурье,Вебера-Бесселя)-К.,1985.-64 с. -(Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 85.28).
9. Интегральные преобразования Фурье на кусочно-однородной полупрямой// Изв.вузов.Математика.- 1989.- № 4.-С.14-18.
10. Задача Коши для инвариантных B-параболических операторов на Римановых многообразиях// Граничные задачи математической физики.- К.: Ин-т прикл.математики и механики,1981.- С.62-64.
11. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) - К.,1983.- -56 с.-(Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.18).
12. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля).- К.,1983.- 60 с.-(Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
13. Интегральные преобразования Фурье-Бесселя и Вебера для кусочно-однородной полярной оси.-К., 1985.- 64 с.- (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 85.30).
14. Интегральные преобразования Фурье для слоистых полупространств/ Черновиц.ун-т.- Черновцы, 1983.- 31 с.-Деп.в Укр НИИНТИ, № 1293 Ук.-Д.83.
15. Интегральные преобразования Фурье на ограниченной слева полупрямой с точкой сопряжения// Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: Сб.науч.тр./ АН УССР. Ин-т прикл.проблем механ. и математики.- К.:Наук. думка, 1989.-С.127-132.
16. Интегральные преобразования Ханкеля I-го рода для составных сегментов/ Черновиц.ун-т.-Черновцы, 1983.- 30 с. -Деп.в Укр НИИНТИ № 1037 Ук.-Д.83.
17. Интегральные преобразования Ханкеля 2-го рода для составных сегментов/Черновиц.ун-т.-Черновцы,1983.-28 с.-Деп.в Укр.НИИНТИ,

№ 765 Ук.-Д.83.

18. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя.- К.,1983.-62 с.-(Препринт/АН УССР Ин-т математики; 83.3).

19. Исследование основных смешанных задач для диссипативного одномерного волнового уравнения 2-го порядка/ Черновицк.ун-т.- Черновцы, 1982.- 32 с.-Деп.в ВИНИТИ № 4131-82 Деп.

20. Конечные интегральные преобразования Фурье и задачи математической физики для составных сегментов//IX школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл.-Тернополь,1984.- С.75-76.

21. Моделирование динамических термоупругих полей в многослойном полупространстве//IУ межреспубликанский симпозиум "Остаточные напряжения: моделирование и управление": Тез. докл.-Пермь, 1992.- С.39-41.

22. Новое в теории интегральных преобразований//Всесоюзная конференция "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и мат. физики":Тезисы докл. ч.I .-Тернополь,1989.-С.238-239.

23. О дважды разветвленном фундаментальном решении задачи Коши для одного класса B -параболических систем//Докл.АН УССР. Сер.А.-1971.- № 4.-С.306-309.

24. О разветвленном решении задачи Коши для одного класса гиперболических систем// Линейные и нелинейные краевые задачи.-К.: Ин-т математики.АН УССР,1971.-С.168-178.

25. Один клас інтегральних перетворень (Лежандра-Бесселя-Фур"є) // Доповіді АН УРСР, Сер.А.-1990.-№ 5.-С.12-16.

26. Один класс непрерывных гибридных интегральных преобразований// Докл.АН УССР, Сер.А.-1985.-№ 5.-С.14-16.

27. Одна группа гибридных интегральных преобразований//Simpozionul ал VI-lea Tiraspolean de topologie generală şi aplicatiile ei.-Chişinău, 1991.-С.122-123.

28. Разветвленные фундаментальные решения задачи Коши для инвариантных B-параболических операторов//Мат. физика и нелинейная механика.- К.:Наук.думка, 1984.- .-С.67-73.

29. Построение методом дельтаобразных последовательностей гибридных интегральных преобразований (Фурье-Фурье-Вебера,Фурье-Ханкеля 2-го рода-Фурье,Фурье-Ханкеля 2-го рода-Вебера).- Тирасполь,1990.-76 с. (співавтор Паскарь О.О.).

30. Гибридные интегральные преобразования (Ханкеля 2-го рода-Фурье-Вебера,Ханкеля 2-го рода-Ханкеля 2-го рода-Фурье) / Хмельницкий технол.ин-т.- Хмельницкий, 1988.- 45 с. - Деп.в УкрНИИНТИ № 2128-Ук.88 (співавтор Романович Т.М.).
31. Конечные интегральные преобразования (Фурье,Ханкеля,Фурье) с применением к задачам математической физики.-К.,1992.- 64 с.-(Препринт/АН Украины. Ин-т математики; 92.12) (співавтор Трасковецька Л.М.)
32. Интегральные преобразования в цилиндрически-эллиптической системе координат и температурные поля в эллиптических областях.- К.,1992.- 60 с.-(Препринт/ АН Украины. Ин-т математики; 92.13) (співавтор Подільчук Н.Б.).
33. Гибридные интегральные преобразования Лежандра.-Львов,1989.- 60 с.-(Препринт/ АН УССР. Ин-т прикл.пробл.механики и математики; (співавтор Шинкарик М.І.).
34. Интегральные преобразования Мелера-Фока первого рода на полярной оси с одной точкой сопряжения//Мат. физика и нелинейная механика.-1991.-Вып.16 (50).-С.63-68 (співавтор Шинкарик М.І.).
35. О дважды разветвленном решении задачи Коши для одного класса параболических систем//Укр.мат.журн. -1971.- 23, № 1.-С.110-117 (співатор Шестопал А.Ф.).
36. Обобщенная динамическая задача термоупругости для среды с симметричной полостью// Вопросы прикладной термомеханики.-Киев:Наукова думка,1979.-С.68-78.
37. Общие конечные интегральные преобразования Ханкеля для полых симметричных тел//ИФЖ,1980.- 38, -№ 5.-С.924-925.
38. Применение интегральных преобразований Ханкеля в термоупругости составных сегментов //Механика неоднородных структур:Тез. докл.первой Всесоюзной конференции.-К.:Наук. думка,1983.-С.126.
39. Расчет температурных полей в многослойных пространствах//Пятая Всесоюзная научно-техническая конференция "Состояние и перспективы развития средств измерения температуры":Тез. докл.-Львов, 1984.-Т.1.-С.212-213.
40. Интегральные преобразования Фурье на кусочно-однородных неограниченных и полуограниченных средах.-Киев, 1985.-60с.-(Препринт/АН УССР.Ин-т математики;85.29).

41. Один класс гибридных интегральных преобразований Бесселя,Бесселя,Фурье // Нелинейные задачи математической физики:Тез. докл.УI республ. конференции.-Донецк,1987.-С.86 .
42. Моделирование упругих полей кручения цилиндрических стержней// Математическое моделирование технологических процессов обработки материалов давлением: Тез. докл.Всеросийской научно-техн. конференции.-Пермь,1990.-С.31 .
43. Решение задач термомеханики неоднородных структур методом гибридных интегральных преобразований ГИП // Механика неоднородных структур:Тез. докл.Третьей Всесоюзной конференции.-Львов, 1991.-В 2-х ч.-С.189.
44. Один класс гибридных интегральных преобразований//Третья Всесоюзная конференция "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений":Тез. докл./Вычислительный центр АН СССР.-Москва, 1991.-С.73 (співавтор Пилип"юк Т.М.).
45. Интегральные представления функций ограниченной вариации через тригонометрические функции Бесселя и Лежандра//Междунар.науч. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения.Мат. физика и спец.функции": Тез. докл.-Самара,1992.-С.147-148. (співавтор Пилип"юк Т.М.).
46. Решение нелинейных задач математической физики методом гибридных интегральных преобразований//Конференция "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики".- Вторые Боголюбовские чтения":Тез. докл.-Киев,1992.-С.86 с.
47. Фундаментальные решения для инвариантных уравнений с оператором Лежандра на римановых многообразиях//Міжнародна конференція, присвячена пам"яті акад.М.П.Кравчука: Тез. доп.-Київ-Луцьк, 1992.-С.11 .
48. Решение задач математической физики неоднородных структур методом конечных гибридных интегральных преобразований//Респ. научно-методическая конференция,посвященная 220 -летию со дня рождения Н.И.Лобачевского:Тез. докл.-Одесса,1992.-В 2 ч.- Ч.2.-С.26.
49. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень Лежандра-Бесселя-Фур"є і Лежандра-Фур"є-Бесселя.- Чернівці,1992.-49 с.-деп.в УкрІНТЕІ,№ 743.-Ук.92.

50. Разложение решений смешанных задач для некоторых дифференциальных операторов в частных производных по фундаментальным решениям задачи Коши: Дис...канд.физ-мат.наук.-К.,1971.-127 с.- Машинопись.

51. Узагальнена зв"язна динамічна задача термопружності для безмежної плити//Доп.АН УРСР.Сер.А.-1990.-№ 6.- С.46-51.

52. Стаціонарні і нестаціонарні температурні поля в багатошарових просторах і тілах.- Чернівці,1991.- 53 с.-Деп.в УкрНДІНТІ, № 17-Ук91.

53. Стаціонарні і нестаціонарні температурні поля в багатошарових кругових клиновидних областях.-Чернівці,1992.- 66 с.-Деп.в УкрІНТЕІ, № 742- Ук92.

Підп. до друку 16.03.93. Формат 60х84/16. Папір тип. Офс. друк.
Умов.друк. арк. 1,86. Умов. фарб.-відб. 1,86. Обл.-вид.арк. 1,4.
Тираж 100 прим. Зам. 125 . Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

467350

Ав 25.640