КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЯСИНСЬКИЙ ВОЛОДИМИР КИРИЛОВИЧ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ З ПІСЛЯДІЄЮ ПРИ НАЯВНОСТІ ПУАССОНОВИХ ЗБУРЕНЬ

01.01.09 - *математична кібернетика*

01.01.05 - *теорія ймовірностей та математична статистика*

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

Робота виконана на кафедрі математичного моделювання Чернівецького державного університету ім. Юрія Федьковича

Офіційні опоненти: академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор В.С. КОРОЛЮК;
доктор фізико-математичних наук, професор О.Г. НАКОНЕЧНИЙ;
доктор фізико-математичних наук, професор Г.Л. КУЛІНИЧ.

Провідна організація: Київський інститут кібернетики ім.В.М.ГЛУШКОВА

Захист дисертації відбудеться "...."............ 1993 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 068.18.16 в Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою : *252127 , Київ-127 , проспект Академіка ГЛУШКОВА , 6 , факультет кібернетики, ауд. 40.*

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Київського університету ім.Тараса Шевченка
(вул.Володимирська,58.)

Автореферат розіслано "28" січня 1993 р.
Вчений секретар спеціалізованої ради,
кандидат фізико - математичних наук,
доцент А.В.КУЗЬМІН

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Врахування післядії в математичних моделях дозволяє одержувати результати , які добре узгоджуються з реальними об"єктами . Безліч відомих математичних моделей свідчать на користь цього твердження . За останні десятиріччя збільшилися вимоги до точності різного роду технічних пристроїв . У зв"язку з цим з"явилась необхідність враховувати в математичних моделях об"єктів , що вивчаються, не тільки адитивні перешкоди, які спотворюють корисний сигнал , але й шуми , які спотворюють розрахункові параметри системи . Щоб відповісти на питання про якість функціонування технічного пристрою , у багатьох випадках доводиться досліджувати поведінку розв"язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з післядією при наявності постійно діючих випадкових збурень . При цьому в більшості випадків не вдається обгрунтовано відмовитися від врахування післядії в математичних моделях , які описують реальні процеси . Так, наприклад , у задачах аналізу систем автоматичного регулювання, в яких об"єкт регулювання і керуючий орган знаходяться на великій відстані , не враховувати ефект післядії просто неможливо. В деяких системах в ланцюгу оберненого зв"язку затримка конструктивно необхідна , оскільки вона повинна враховувати час обробки інформації для вироблення регулюючої дії. Щоб дати відповідь про якість регулювання в описаній вище ситуації , доводиться досліджувати рівняння , які виписуються для відхилення координат об"єкта регулювання від розрахункових . На жаль, математичні моделі, які враховують ефект післядії та постійно діючі випадкові збурення , дуже погано піддаються як якісному , так і кількісному аналізу.

Випадкові збурення можуть приводити до розриву траєкторії динамічних систем . Тому дуже важливо при аналізі динамічних систем враховувати цей факт . Звідси випливає ***актуальність*** проблеми розробки методів аналізу поведінки розв"язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) , що містять диференціал Іто та пуассонову міру , оскільки більшість стохастичних систем з післядією можуть бути змодульовані СДФР . Теорія стійкості стохастичних диференціальних рівнянь як звичайних , так і з післядією , розвинута в роботах І.І. Гіхмана, А.В. Скорохода, К. Іто, М. Нісіо, М.М. Красовського, І.Я. Каца, В.С. Королюка, Р.З. Хасьмінського, В.Б. Колмановського, Г.Л. Кулінича, Г. Кушнера, Є.Ф. Царкова, Г.Н. Мільштейна, В. Мізела, В. Трудзера та багатьох інших математиків.

В дисертації пропонуються достатньо зручні для застосування критерії стійкості розв"язків СДФР з розривними траєкторіями.

Мета роботи :1) розвиток другого методу Ляпунова для СДРФ з скінченною післядією та наявністю пуассонових збурень;
2) розробка теорії стійкості СДФР з необмеженою післядією та з пуассоновими збуреннями;
3) розвиток теорії стійкості лінійних та квазілінійних СДФР;
4) застосування одержаних результатів для аналізу поведінки розв"язків конкретних стохастичних задач.

Наукова новизна результатів дисертації полягає :
- в побудові класів функціоналів Ляпунова-Красовського, які дають умови стійкості СДФР з обмеженою післядією та пуассоновими збуреннями;
- у доведенні загальних теорем про стійкість розв"язків СДФР з розривними траєкторіями : стійкість в середньому квадратичному, експоненціальну p -стійкість та p -стійкість в цілому, асимптотичну стохастичну стійкість та асимптотичну стохастичну стійкість в цілому;
- в побудові класів функціоналів та методів обчислення слабкого інфінітезимального оператора на розв"язках СДФР з нескінченною післядією при наявності пуассонових збурень, а також у доведенні теорем існування та єдиності сильних розв"язків;
- в побудові квадратичних функціоналів, які дають умови стійкості тривіального розв"язку квазілінійних СДФР із скінченною післядією та розривними траєкторіями;
- у розробці інтегрального методу, який дає необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному тривіального розв"язку лінійних СДФР із скінченною післядією;
- в одержанні достатніх умов стійкості в середньому квадратичному стохастичних диференціально - різницевих рівнянь в термінах власних значень інтегральної матриці, яка записана через параметри цих рівнянь;
- в якісному аналізі стохастичних моделей із різних галузей науки та техніки.

Практична цінність. В дисертації наведені результати якісного аналізу конкретних математичних моделей :
- досліджена стійкість стохастичної моделі "звисаючий павук"(теорія суцільного середовища та в"язкопружності);
- досліджена задача втрати стійкості стрижня при випадкових збуреннях;
- вивчена стабілізація розв"язків стохастичних рівнянь теплопровідності та коливання;
- знайдені умови стабілізації курсу судна при випадкових збуреннях;
- досліджена задача фазової автопідстройки частоти з багатокас - кадним смуговим підсилювачем при наявності перешкод у генераторі сигналу (радіоелектроніка);
- досліджена стійкість процесу різання на токарному верстаті(машинобудування).

Для згаданих вище математичних моделей вдається в термінах кое - фіцієнтів стохастичних систем одержати зручні умови стабілізації у вигляді нерівностей в області параметрів.

На захист виносяться такі положення :

1) метод функціоналів Ляпунова-Красовського для дослідження стійкості розв"язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь(СДФР)з обмеженою післядією та наявністю пуассонових збурень;
2) другий метод Ляпунова для дослідження стійкості розв"язків СДФР з безмежною післядією та з пуассоновими збуреннями;
3) метод квадратичних функціоналів для дослідження властивостей та стійкості розв"язків квазілінійних СДФР з скінченною післядією та наявністю пуассонових збурень;
4) метод інтегральних оцінок других моментів для дослідження стійкості та нестійкості розв"язків лінійних СДФР, якщо детермінована частина СДФР експоненціально стійка; теореми по першому наближенню (критичний випадок);
5) застосування розроблених математичних методів для якісного аналізу різних стохастичних моделей.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на II та V міжнародних конференціях з теорії ймовірностей та математичної статистики (Вільнюс, 1973 р., 1989 р.); III міжнародній конференції з диференціальних рівнянь та їх застосувань (Руссе, Болгарія, 1985 р.); республіканській конференції з диференціальних рівнянь та їх застосувань (Одеса,1987 р.); I та II всесоюзних конференціях з нелінійних коливань механічних систем (Горький,1987 р.,1990 р.); III Уральскій регіональній конференції з диференціальних рівнянь та їх застосувань (Перм, 1988 р.); II всесоюзній школі-семінарі з ергодичної теорії маркових процесів (Рига, 1989 р.); II всесоюзній конференції з нових підходів до розв"язання диференціальних рівнянь (Дрогобич, 1989р.); Всесоюзній конференції з якісної теорії диференціальних рівнянь (Рига, 1989р.); XIX міжнародній конференції з стохастичних процесів та її застосувань (Айзенах,Німечинна, 1990 р.); II міжнародному колоквіуму з диференціальних рівнянь (Пловдів, Болгарія, 1991 р.); всесоюзній конференції з якісної теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики (Тернопіль, 1989р.); всесоюзній науково-технічній конференції із застосувань статистичних методів у виробництві та управлінні (Перм,1990 р.); конференції моделювання та дослідження стійкості процесів (Київ, 1992р.); на школі-семінарі з стійкості стохастичних динамічних систем (керівник-академік АН України А.В.Скороход , Чернівці, 1990 р.); республіканському семінарі з ймовірнісних методів кібернетики Ризького технічного університету (керівник-доктор фіз.-мат.наук,професор Є.Ф.Царков, 1991 р.,1992 р.); республіканському семінарі з теорії ймовірностей Інституту математики АН України(керівник-академік АН України В.С.Королюк, 1991 р.);науковому семінарі з теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними Чернівецького державного університету (керівник-доктор фіз.-мат. наук, професор С.Д.Івасишен, 1990 р., 1991 р., 1992 р.,); науковому семінарі з проблем управління Чернівецького державного університету (керівник-доктор фіз.-мат. наук,професор М.Ф.Кириченко ,1990 р.); науковому семінарі з математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики АН України (керівник - академік АН України Ю.М.Єрмол"єв, 1992 р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковані 52 роботи . В кінці автореферату приведено бібліографічний опис 32 основних праць автора. В співавторстві з Є.Ф.Царковим опублікована монографія : Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.-Рига:Ориентир,1992.-328 с.

Структура та об"єм роботи. Дисертація об"ємом 383 машинописних сторінок складається з вступу , трьох розділів , додатку та списку літератури, що містить 159 найменувань.

Зміст дисертації. У ***вступі*** приводиться короткий огляд наукових праць, які присвячені розвитку теорії стійкості стохастичних диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь,обгрунтовується актуальність та новизна проблеми дослідження, визначається мета дослідження та описується зміст дисертації.

Перший розділ дисертації складається з чотирьох параграфів. В § 1.1 викладаються загальні відомості з теорії СДФР та доводяться основні нерівності, які будуть використовуватись для дослідження стійкості.

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ розглядається СДФР

$$dx(t) = a(t,x_t)dt + b(t,x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} c(t,x_t,u)\tilde{\nu}(du,dt), \tag{1}$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \ \theta \in [-r,0], \tag{2}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $x_t := (x(t+\theta), \theta \in [-r,0])$;$(w(t))$ - вінерів процес; $\tilde{\nu}(du,dt), u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ -центрована пуассонова міра;$a:[0,T]\times \mathbb{D}_0 \to \mathbb{R}^n$; $b:[0,T]\times \mathbb{D}_0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $c:[0,T]\times \mathbb{D}_0 \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$; відображення a,b,c - неперервні за сукупністю змінних; $\mathbb{D}_0$ - простір Скорохода неперервних справа функцій $\varphi \in \mathbb{R}^n$,які мають лівосторонні границі(НПЛГ) з нормою

$$\|\varphi\|_0 := \left(|\varphi(0)|^2 + \int_{-r}^{0} |\varphi(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Лема 1.1.1. Якщо $(\varphi, \varphi_m, m \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{D}_n$; $\lim_{m\to\infty} \rho_{\mathbb{D}}(\varphi_m, \varphi) = 0$, тоді $\lim_{m\to\infty} \|\varphi - \varphi_m\|_0 = 0$.

Тут $\mathbb{D}_n$ - простір Скорохода НПЛГ функцій $\varphi \in \mathbb{R}^n$ з метрикою Скорохода. Простір $\mathbb{D}_0$ з метрикою (3) сепарабельний. Розглядається питання існування та єдиності сильного та слабкого розв"язку рів -

няння (1) з початковою умовою (2).

Припускаємо, що виконуються умови рівномірної обмеженості

$$\sup_{t\geq 0}\left(|a(t,0)|^2 + |b(t,0)|^2 + \int_{\mathbb{U}} |c(t,0,u)|^2\, \Pi(du)\right) = \alpha^2 < \infty \quad (4)$$

та один з варіантів умови Ліпшиця: або глобальної

$$|a(t,\varphi) - a(t,\psi)|^2 + |b(t,\varphi) - b(t,\psi)|^2 +$$

$$+\int_{\mathbb{U}} |c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u)|^2\, \Pi(du) \leq L\, \|\varphi - \psi\|^2 \quad (5)$$

для довільних $t\geq 0$, $(\varphi,\psi)\subset \mathbb{D}_n$, де

$$\|\varphi\|^2_{\varrho} := \int_{-r}^{0} |\varphi(\theta)|^2\, \varrho(d\theta)\ ;$$

або локальної

$$|a(t,\varphi) - a(t,\psi)|^2 + |b(t,\varphi) - b(t,\psi)|^2 +$$

$$+\int_{\mathbb{U}} |c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u)|^2\, \Pi(du) < L_h\, \|\varphi - \psi\|^2 \quad (6)$$

для довільних $t\geq 0$, $h>0$ та $(\varphi,\psi)\subset S^{(\varrho)}_h := (\varphi\in \mathbb{D}_n \mid \|\varphi\|^2_{\varrho} < h)$.
Умови (4),(5) гарантують існування та єдиність розв"язку $x(t,s,\varphi)$ задачі (1), (2) для всіх $t \geq s \geq 0$ та $\varphi \in G^s :=$ $:= (\varphi \in \mathbb{D}^0 \mid \|\varphi\|^2_G := E(\|\varphi\|^2_0) < \infty)$.
В лемах 1.1.2;1.1.3; 1.1.4 доведені важливі нерівності для розв"язків СДФР (1) для кожного $\varphi\in G^s$, $T > 0$, $s \geq 0$ та $t\in[s,s+T]$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\substack{s<t<s+T-\Delta\\ 0\leq\tau\leq\Delta}} |x(t+\tau,s,\varphi) - x(t,s,\varphi)|^2 \,/\, \mathfrak{F}^s_0\right) < C(T)\Delta\left(\|\varphi\|^2_0 + \alpha^2\right);$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t\leq s+T} |x(t,s,\varphi)|^2 \,|\, \mathfrak{F}^s_0\right) \leq C(T)\left(\|\varphi\|^2_0 + \alpha^2\right);$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t\leq s+T} |x(t,s,\varphi) - x(t,s,\psi)|^2 \,|\, \mathfrak{F}^s_0\right) < C(T)\, \|\varphi - \psi\|^2_0 .$$

де $C(T)$ залежить також від L та α^2.
В п.1.1.3 наводяться теореми 1.1.3 та 1.1.4 існування та єдиності розв"язків стохастичних рівнянь з випадковими операторами, які є узагальненням СДФР.
В § 1.2 доводиться маркова властивість сім"і операторів зсуву вздовж розв"язків рівняння (1) $\{ X_s^t := x_t(s,\varphi),\ t\geq s\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{D}^0 \}$ в фазовому просторі $(\mathbb{D}^0, \mathcal{D}, \mathcal{Y})$, де $\mathcal{D}$ -сукупність всіх відкритих підмножин $\mathbb{D}^0$, $\mathcal{Y}$-σ-алгебра борелівських множин, що містить базу топологічного простору $(\mathbb{D}^0, \mathcal{D})$. В п.1.2.1 доведена теорема 1.2.1 про властивості перехідної функції для розв"язку рівняння (1)

$$p(s,\varphi,t,A) := \mathbb{P}(X_s^t\varphi \in A), \tag{7}$$

де $t\in[s,\infty)$, $s\in[0,\infty)$, $\varphi\in\mathbb{D}^0$ та $A\in\mathcal{Y}$, з якої випливає, що задача (1), (2) визначає стохастично неперервний справа строго марковий процес з значеннями у $\mathbb{D}^0$ з перехідною ймовірністю(7).
В п. 1.2.2 введена півгрупа операторів зсуву вздовж розв"язків рівняння (1) в просторі $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}^0)$ за правилом $(\tilde{T}(t)v)(s,\varphi) :=$ $:= \mathbb{E}\{v(s+t, X_s^{s+t}\varphi)\}$ та приводиться варіант формули Динкіна з використанням слабкого інфінітезимального оператора. П. 1.2.3 присвячений зупиненим розв"язкам СДФР, що дозволяє позбавитися від глобальної умови Ліпшиця (5), замінивши її локальною з константою L_h; $\varphi,\psi\in S_h^{(\delta)}$ так, щоб величина слабкого інфінітезимального оператора всередені кулі $S_h^{(\delta)}$ не змінилася. В п. 1.2.4 доведена

Лема 1.2.4. Нехай виконуються умови теореми існування та єдиності розв"язків для рівняння (1). Тоді при всіх $t\geq z\geq s\geq 0$, $\Gamma\in\mathcal{Y}$ та $\varphi\in\mathbb{D}^0$ сім"я розв"язків $\{x_t(s,\varphi),\ t\geq s\geq 0\}$ має маркову властивість

$$\mathbb{P}(x_t(s,\varphi)\in\Gamma \mid \mathfrak{F}_s^z) = p(z, x_z(s,\varphi), t, \Gamma).$$

В § 1.3 розробляється другий метод Ляпунова для аналізу стійкості розв"язків нелінійних СДФР з врахуванням пуассонових збурень та обмеженою післядією. В п. 1.3.1 вводиться слабкий інфінітезимальний оператор для розв"язків рівняння (1)

$$(\mathcal{L}v)(s,\varphi):=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\,[\,\mathbb{E}\,(v(s+t,x_{s+t}(s,\varphi)))-v(s,\varphi)]\,,$$

де $(s,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}^0$, та верхній слабкий інфінітезимальний оператор

$$(\mathcal{L}^+v)(s,\varphi):=\lim_{\Delta\downarrow 0}\sup_{0<\tau\leq\Delta}\frac{1}{\tau}\,[\,\mathbb{E}(v(s+\tau,X_s^{s+\tau}\varphi)),-v(s,\varphi)].$$

В п. 1.3.2 досліджуються функціонали з області визначення слабкого інфінітезимального оператора.

***Теорема** 1.3.2.* Якщо виконуються умови (4),(5), то функціонал $v(s,\varphi):=g(s,\varphi(0))$ належить $\mathbb{D}(\mathcal{L})$, де $g(s,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$ та

$$(\mathcal{L}g)(s,\varphi)=\frac{\partial g(s,\varphi(0))}{\partial s}+((\nabla g)(s,\varphi(0)),a(s,\varphi))+$$

$$+\frac{1}{2}\,sp((\nabla^2 g)(s,\varphi(0))b(s,\varphi)b^T(s,\varphi))+\int_{\mathbb{U}}[\,g(s,\varphi(0)+$$

$$+c(s,\varphi,u))-g(s,\varphi(0))-((\nabla g)(s,\varphi(0)),c(s,\varphi,u))]\,\Pi(du).\quad(8)$$

Для функціоналів вигляду

$$v(s,\varphi):=\int_{-r}^{0}f(\theta)H(s,\varphi(\theta),\varphi(0))d\theta\,,$$

та $v_1(s,\varphi):=F(v(s,\varphi))$, де $F(x)\in C^2(\mathbb{R})$, доведена належність їх до $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ та отримані алгоритми обчислення $(\mathcal{L}v)(s,\varphi)$, $(\mathcal{L}v_1)(s,\varphi)$ (теореми 1.3.3 та 1.3.4).

В п. 1.3.3 сформульовані основні визначення стійкостей розв"язків СДФР. П. 1.3.4 містить теореми про стійкість тривіального розв"язку СДФР (1) з розривними траєкторіями.

Розглянемо множину функціоналів

$$W:=\{v\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}^0\,|\,c_1\,|\varphi(0)|^2\leq v(s,\varphi)<c_2\,\|\varphi\|^2_\gamma$$

при деяких $c_1>0$, $c_2>0$, $\gamma\in C^*([-r,0])$ та всіх $s\in\mathbb{R}_+$, $\varphi\in\mathbb{D}^0\}$.

***Теорема** 1.3.5.* Якщо виконуються умови (4), (5);

$$a(t,0)\equiv b(t,0)\equiv c(t,0,u)\equiv 0\,.\quad(9)$$

та існує функціонал $v\in W\ \mathbb{D}(\mathcal{L}^+)$ такий, що $\mathcal{L}^+v<-f$; $f\in W$, то тривіальний розв"язок задачі (1), (2) асимптотично стійкий в середньому квадратичному.

Теорема 1.3.6. Якщо виконується локальна умова Ліпшиця (6) та існує функціонал $v \in D(\mathcal{L}^{+})$ такий, що $\mathcal{L}^{+} v < -f$, причому при деякому $p>0$ та всіх $s \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{D}_n$ виконуються нерівності

$$c_1 |\varphi(0)|^p \leq v(s,\varphi) \leq c_2 \|\varphi\|^p , \quad c_1 > 0 ;$$

$$c_3 |\varphi(0)|^p \leq v(s,\varphi) \leq c_4 \|\varphi\|^p , \quad c_3 > 0 ,$$

то тривіальний розв"язок задачі (1),(2) асимптотично стохастично стійкий.

П. 1.3.5 ілюструє теоретичні дослідження §1.1-1.3 на прикладах, які є стохастичними моделями регулювання об"єкта за звуком, деяких задач епідеміології, біомедицини, екології, задач теорії суцільних середовищ і т.д.

§ 1.4 має теоретичний характер, встановлюються деякі зв"язки між стійкостями СДФР з скінченою післядією. В п.1.4.1 доведена

Теорема 1.4.1. Із експоненціальної p - стійкості при $p>0$ тривіального розв"язку (1) випливає його асимптотична стохастична стійкість.

Наслідок 1.4.1. Якщо виконуються умови (5) та (9), то з експоненціальної стійкості тривіального розв"язку задачі (1),(2) в середньому квадратичному слідує його асимптотична стохастична стійкість.

Розглянемо лінійне СДФР

$$dy(t) = Ay_t\,dt + By_t\,dw(t) + \int_{\mathbb{U}} C(u)y_t \tilde{\nu}(du,dt) , \qquad (10)$$

де $A, B, C(u)$ - лінійні обмежені відображення.

Теорема 1.4.2. Якщо тривіальний розв"язок рівняння (10) асимптотично стійкий в середньому квадратичному, то він експоненціально стійкий в середньому квадратичному.

Розглянемо квазілінійне СДФР

$$dx(t) = [Ax_t + a(t,x_t)]dt + [Bx_t + b(t,x_t)]dw(t) +$$

$$+\int_{\mathbb{U}}[C(u)x_t + c(t,x_t,u)]\tilde{\gamma}(du,dt). \qquad (11)$$

Теорема 1.4.3. Якщо тривіальний розв"язок рівняння (10) асимптотично стійкий в середньому квадратичному, відображення a,b,c задовольняють (5) та (9), то при достатньо малих L тривіальний розв"язок рівняння (11) асимптотично стійкий в середньому квадратичному.

Наслідок 1.4.2. Якщо тривіальний розв"язок рівняння (10) асимптотично стійкий в середньому квадратичному ; для a, b та c виконуються умови(9) та (6), причому $\lim_{h\to 0} L_h = 0$, то тривіальний розв"язок рівняння (11) асимптотично стохастично стійкий.

В п.1.4.2 встановлені необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв"язків задачі (1),(2) за допомогою верхнього похідного числа

$$D^+ v_{p,\alpha}(\check{x}^{(p)}_{s+pr}(s,\varphi)) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[v_{p,\alpha}(\check{x}^{(p)}_{s+pr+t}(s,\varphi)) - v_{p,\alpha}(\check{x}^{(p)}_{s+pr}(s,\varphi))]$$

для довільного $p=0,1,2,\ldots$; $\check{x}^{(p)}_{s+pr}(s,\varphi) := \{x(s+pr+\theta,s,\varphi)$, $\theta \in [-(p+1)r,0]\}$.

Теорема 1.4.4. Якщо a, b та c неперервні за сукупністю змінних та задовольняють (5), то розв"язок $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2) експоненціально стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існують $\alpha > 0$, $p \in \{0,1,2\ldots\}$ та $\delta > 0$ такі, що для кожного $s \in R$ та $\varphi \in U_\delta^+$ виконується нерівність

$$D^+ v_{p,\alpha}(\check{x}_{s+pr}(s,\varphi)) < -2\alpha v_{p,\alpha}(\check{x}_{s+pr}(s,\varphi)).$$

В п.1.4.3 доведена

Теорема 1.4.5. Якщо виконані умови теореми 1.4.4 ; (9) та

$$\int_{\mathbb{U}}|c(t,\varphi,u)|^k \Pi(du) < L\,\|\varphi\|^k_{(g)}$$

для деякого $k \in \mathbb{N}$, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (1) експоненціально p-стійкий в цілому тоді і тільки тоді, коли існує функціонал $v \in D(\mathcal{L}^{+})$ такий, що при деяких $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ та довільних $s \in R_{+}$ та $\varphi \in D_n$ виконуються нерівності

$$c_1 \|\varphi\|^p < v(s,\varphi) < c_2 \|\varphi\|^p, \quad p > 0 ;$$

$$(\mathcal{L}^{+} v)(s,\varphi) < -c_3 \|\varphi\|^p ; \quad \|\varphi\| := \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

Теорема 1.4.5. Нехай виконуються умови теореми 1.4.4 та умова Ліпшиця з константою $L_h^{(\xi)}$. Якщо існує функціонал Ляпунова-Красовського $v \in D(\mathcal{L}^{+})$, який при деяких $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $p > 0$ та всіх $s \in R_{+}$, $\varphi \in \mathbb{D}_n$ задовольняє нерівностям

$$|\varphi(0)|^p \leq v(s,\varphi) \leq c_2 \|\varphi\|^p ;$$

$$(\mathcal{L}^{+} v)(s,\varphi) < -c_1 \|\varphi\|^p ,$$

то тривіальний розв"язок (1),(2) асимптотично стохастично стійкий в цілому.

Другий розділ присвячений дослідженню властивостей та стійкості розв"язків нелінійних СДФР з необмеженою післядією при наявності пуассонових збурень. Такі рівняння є математичною моделлю багатьох задач теорії суцільних середовищ та в"язкопружності. В першому параграфі наводяться відомі факти для детермінованих диференціально - функціональних рівнянь з необмеженою післядією.

В § 2.2 досліджуються властивості СДФР з необмеженою післядією та розривними траєкторіями

$$dx(t) = a(t,x^t)dt + b(t,x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} c(t,x^t,u)\tilde{\nu}(du,dt) , \qquad (12)$$

$$x^{t_0} = \varphi^{t_0} , \qquad (13)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $x^t := \{x(t-s),\ s \in \mathbb{R}_{+}\}$; $\{a(t,\varphi)\}$, $\{b(t,\varphi)\}$ та $\{c(t,\varphi,u)\}$ - неперервні відображення в $\mathbb{R}^n$ за сукупністю змінних

$t \geqslant t_0$, $\varphi \in \mathbb{D}^p$; $\mathbb{D}^p$ – простір Скорохода локально обмежених непе - рервних справа функцій $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ), з нормою

$$\| \varphi \|_{D^p} := \left(|\varphi(0)|^p + \int_0^{\infty} |\varphi(s)|^p \varrho(s) ds \right)^{1/p} ; \qquad (14)$$

$\{w(t)\}$ -стандартний скалярний вінерів процес, $\tilde{\nu}(du,dt)$ центрована пуассонова міра, яка не залежить від $w(t)$; функція $\varrho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ - функція згладжування.

В п.2.2.1 одержані допоміжні нерівності для п. 2.2.2, де доводиться теорема існування та єдиності сильного розв"язку рівняння (12) з початковою умовою (13). Доведення базується на ітераційному процесі Пікара, але для норми (14) в просторі $\mathbb{D}^p$ оцінки Гронуолла не використовуються, як це зроблено для класичних стохастичних диференціальних рівнянь без післядії.

Теорема 2.2.1. Нехай 1) існує константа $L>0$, така, що

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| + \int_{\mathbb{U}} |c(t,x,u) - c(t,y,u)| \Pi(du) < L \|x-y\|_{\mathbb{D}^p} \qquad (15)$$

для довільних $x,y \in \mathbb{D}^p$;

2) для кожного $t \in [t_0, T]$

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| + \int_{\mathbb{U}} |c(t,x,u)| \Pi(du) < L(1+ \|x\|_{\mathbb{D}^p}) ; \qquad (16)$$

3) існує $h \geqslant 1$ та x_- - випадковий процес, $x_- \in \mathcal{L}_{to}$ такий, що

$$\mathbb{E} \{ \|x_-^{to}\|_{\mathbb{D}^p}^h \} < \infty .$$

Тоді I) існує єдиний сильний розв"язок $\{x(t), t \in [t_{to}, T]\}$ рівняння (12), який НПЛП для $t \in [t_0, T]$, причому $x_{to} = x_-$;

II) для $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{E} \{ \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^h \} < \infty .$$

В п. 2.2.3 доведена неперервна залежність розв"язків СДФР (12) від початкових даних.

П. 2.2.4 встановлює локальні теореми існування та єдиності розв"язків СДФР (12) (теореми 2.2.3; 2.2.4).

Параграф 2.3 містить алгоритми побудови функціоналів із області визначення слабкого інфінітезимального оператора. В п. 2.3.1 визначена перехідна ймовірність, в теоремі 2.3.1 доведені фелерова властивість, нерівність Чепмена-Колмогорова та інші властивості.

Лема 2.3.2. встановлює маркову властивість для розв"язку $x^t(s,\varphi)$ задачі (12),(13), якщо виконуються умови (15),(16) (аналог леми 1.2.4 для СДФР з обмеженою післядією).

Для кожного $N > 0$ існує $L_N > 0$ таке, що для довільних $x,y \in \mathbb{D}^p$, для яких $\|x\|_{\mathbb{D}^p} < N$, $\|y\|_{\mathbb{D}^p} < N$ мають місце нерівності Ліпшиця (14) та рівномірна обмеженість по $t > t_0$ (15) з константою L_N.

В п.2.3.2 визначений слабкий інфінітезимальний оператор $\mathcal{L}^N$ для строго маркового процесу (x^t) в $\mathbb{D}^p$ для функціоналу $v: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ та формула Динкіна: якщо $\tau(t) \geqslant s$ з $\mathbb{E}(\tau(t)) < \infty$ та $v \in D(\mathcal{L})$, то

$$\mathbb{E}(\, v(s+\tau(t), x^{s+\tau(t)}(s,\varphi))\} = v(s,\varphi) + $$

$$+ \mathbb{E}\,\{ \int_0^{\tau(t)} (\mathcal{L}v)(s+z, x^{s+z}(s,\varphi))dz \,\} \qquad (17)$$

при кожному $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$; $\varphi \in Q \subset \mathbb{D}^p$, де τ - час виходу з відкритої області Q ; $\tau := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \,|\, x^t \bar{\in} Q\}$ та $\tau(t) = \tau \wedge t$. Якщо $\{\tilde{x}^t\}$ - процес, зупинений в момент τ, то $\tilde{x}^t = x^{\tau(t)}$, а $\tilde{\mathcal{L}}$ - слабкий інфінітезимальний оператор процесу $\{\tilde{x}^t\}$. Як правило, обчислювати $\tilde{\mathcal{L}}$ процесу $\{\tilde{x}^t\}$ досить важко. Проте обчислення спрощуються тому, що для обмеженої відкритої області Q оператор може бути обчислений в точках області для незупиненого процесу, який визначається рівнянням

$$dx(t) = \bar{a}(t,x^t)dt + \bar{b}(t,x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} \bar{c}(t,x^t,u)\tilde{\nu}(du,dt)$$

де $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - видозмінені функціонали, які задовільняють умовам Ліпшиця (15) та $\bar{a}(t,x)=a(t,x)$; $\bar{b}(t,x)=b(t,x)$; $\bar{c}(t,x,u)=c(t,x,u)$ для $x \in Q$; $\bar{a}(t,x)=0$; $\bar{b}(t,x)=0$; $\bar{c}(t,x,u)=0$ для $x \bar{\in} Q$. Знайдеться відкрита множина $Y \subset Q$ така, що для $\overset{o}{\varphi} \in Y$ маємо $\bar{x}^t \in Y$, $\forall t \geq 0$ (лема 2.3.3) та $(\tilde{\mathcal{L}} v)(s,\varphi)=(\bar{\mathcal{L}} v)(s,\varphi)$ (лема 2.3.4).

П. 2.3.3 містить алгоритми обчислення слабкого інфінітезимального оператора $(\mathcal{L}v)(s,\varphi)$ для певних класів функціоналів $v:[0,T]\times \mathbb{D}^p \longrightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 2.3.1. Якщо 1) виконуються умови (15), (16) з константою L_N для довільних $x,y \in \mathbb{D}^p$ таких, що $\|x\|_{\mathbb{D}^p} < N$; $\|y\|_{\mathbb{D}^p} < N$; 2) $v(s,x) := F(s,x(0))$ неперервно диференційовний по першому та двічі неперервно диференційовний по другому аргументу ; 3) a,b та c сумовані за квадратом по $t \in [0,T]$, то $v(s,\varphi) \in D(\tilde{\mathcal{L}})$ та

$$(\tilde{\mathcal{L}} F)(s,x) = \frac{\partial F(s,x(0))}{\partial s} + ((\nabla F)(s,x(0)),(a(s,x)) +$$

$$+ \frac{1}{2} sp((\nabla^2 F)(s,x(0))b(s,x)b^T(s,x)) + \int_{\mathbb{U}} [F(s,x(0) +$$

$$+c(s,x,u)) - F(s,x(0)) - ((\nabla F)(s,x(0)),c(s,x,u))] \Pi(du). \quad (18)$$

Теорема 2.3.2 для функціонала

$$v_1(x) := \int_0^{\infty} k(s)g(x(s),x(0))ds$$

доводить його належність $D(\tilde{\mathcal{L}})$ та задає алгоритм обчислення $(\tilde{\mathcal{L}} v_1)(s,\varphi)$. Для класу неавтономних функціоналів

$$v_2(t,x^t) := \int_0^{\infty} k(s)g(t-s,x^t(s),x(0))ds$$

в теоремі 2.3.3 доведено, що $v_2 \in D(\tilde{\mathcal{L}})$ та при певних умовах одержана формула для обчислення $(\tilde{\mathcal{L}} v_2)(s,\varphi)$. Для функціоналів вигляду $v_3(t,x^t) := G(v_2(t,x^t))$; $v_4(t,x^t) := G(v(t,x^t)+v_1(t,x^t))$

побудовані алгоритми обчислення $(\tilde{\mathcal{L}}v)(s,x)$ (теореми 2.3.4 ; 2.3.5).

§ 2.4 присвячений стійкості СДФР з необмеженою післядією та пуассоновими збуреннями.

Лема 2.4.1. Нехай 1) $(x^t, t\geq 0)$ - неперервний справа строго марковий процес на $Y\subset \mathbb{R}^p$ з оператором $\mathcal{L}$;2) $Q\subset Y$ -відкрита множина, а τ - час виходу з Q; 3) $\tilde{x}^t = x^{\tau(t)}$ та $\tilde{\mathcal{L}}_t$ - слабкий інфінітезимальний оператор процесу $(\tilde{x}^t)$; 4) для $x\in Q$
$(\tilde{\mathcal{L}}v)(t,x^t) = -k(t,x^t) \leq 0$.

Тоді для $x^0 \in Q$:

A)$v(t,\tilde{x}^t)$ - невід"ємний супермартингал зупиненого процесу $(\tilde{x}^t)$;

B)для кожного $\lambda >0$

$$\mathbb{P}\{ \sup_{T\leq t<\infty} v(t,x^t) \geq \lambda\} < \frac{v(T,\tilde{x}^t)}{\lambda}, \text{ де } \tilde{x}^t \in Q ;$$

C)існує $c(\omega)$ така, що $v(t,\tilde{x}^t)\to c(\omega)$ майже скрізь.

Теорема 2.4.2.Нехай 1) виконуються умови леми 2.4.1 ;
2)$k(t,x^t) \geq k_1(x^t) \geq 0$ на відкритій підмножині $Q\subset Q_1$ та для деякого $\delta > 0$ функціонал k_1 рівномірно неперервний на

$$R_\delta := \{x^t \in \mathbb{R}^p \mid k_1(x^t) < \delta\}\cap Q ;$$

3) $\mathbb{P}\{\tau_Q >t, \sup_{t\leq s\leq t+h} |x^s - x^t| > \varepsilon\}\xrightarrow[h\to 0]{} 0$ рівномірно по t для довільного $x^t \in Q$.

Тоді для $x^t \in Q_1$ маємо $k(t,x^t)\to 0$ при $t\to\infty$ майже скрізь в $\Omega_Q := \{\omega\in\Omega \mid \sup_{0\leq t} v(t,x^t) < \lambda\}$.

В теоремі 2.4.4 , що є аналогом теореми 1.3.6 , доводиться більш сильний результат: $x^t \to 0$ при $t\to\infty$ майже скрізь.

Розв"язок автономного рівняння (13) експоненціально стійкий, якщо $(\tilde{\mathcal{L}}v)(x^t) = -k(x^t) \leq 0$ для $Q_\lambda := \{x^t \mid v(x^t) < \lambda\}$ та $k(x^t)$ пропорційний $v(x^t)$ в Q_λ для $x^t \in \mathbb{D}^p$ (теорема 2.4.5).

Найпростіший алгоритм побудови функціоналів Ляпунова-Красовського дає

Теорема 2.4.8. Нехай 1) $(x^t, t \geq 0)$ -неперервний справа строго марковий процес, який визначається рівнянням (12);

2) $h : \mathbb{D}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умовам: $h(0)=0$, $h(x^t) > 0$ при $x^t \neq 0$ та неперервний в нулі;

3) для кожного $x^t \in \mathbb{D}^p$

$$F(x^t) = \mathbb{E}\left\{ \int_0^{\delta \cap \tau_Q} h(x^s)ds \right\} < \infty ;$$

4) існують

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{E}\left(\int_0^{\delta \cap \tau_Q} h(x^s)ds \right) = h(x^0); \quad \lim_{s \to 0} \mathbb{E}(h(x^{s \cap \tau_Q})) = h(x^0),$$

де τ_Q - момент першого виходу з околу Q початку координат;

5) $F(x^t) \longrightarrow 0$ при $x^t \longrightarrow 0$; $F(x^t) \longrightarrow \infty$ при $\|x^t\|_{D^p} \longrightarrow \infty$.

Тоді $F(x^t)$ функціонал Ляпунова - Красовського, який задовольняє умовам теореми 2.4.3 та $x^t \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow \infty$ майже скрізь.

В § 2.5 досліджується асимптотична стійкість майже скрізь СДФР з необмеженою післядією. Такі рівняння є математичною моделлю багатьох задач теорії механіки суцільного середовища та в"язкопружності задача ("звисаючий павук"):

$$dx(t) = y(t)dt ,$$

$$dy(t) = [F(x(t)) + \int_0^\infty k(s)g(x^t(s) - x(t))ds]dt + (X^t)dw(t) + $$

$$+ \int_{\mathbb{U}} x(t)c(u)\tilde{\nu}(du,dt),$$

де $X(t) = (x(t),y(t))^T$. Будуємо функціонал

$$v(X) = \frac{y^2(0)}{2} + h(x(0)) + \int_0^\infty k(s)G(x(s)-x(0))ds ,$$

де $G(\theta) = \int_0^{\theta} g(z)dz$;функція h задовольняє рівнянню $dh(\theta)=-F(\theta)d\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, і така, що $h(0)=0$, $\lim h(z) = \infty$ при $|z|\to\infty$. .

Використовуючи теореми 2.3.1 та 2.3.2, обчислемо $\mathcal{L}v$. Тоді згідно теорем 2.4.3 та 2.5.1 достатні умови асимптотичної стійкості майже скрізь тривіального розв"язку заданої системи визначається нерівністю

$$-\int_0^{\infty} \dot{k}(s)G(x(s)-x(0))ds \geqslant \frac{\sigma^2(X)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{U}} x^2(0)c^2(u)\Pi(du) +$$

$$+\iint_{\mathbb{U}\,0}^{\infty} k(s)[G(x(s) - x(0) - x(s)c(u)) - G(x(s)-x(0)) -$$

$$- g(x(s) - x(0))x(s)c(u)]ds\,\Pi(du).$$

Третій розділ складається з чотирьох параграфів , де досліджуються лінійні та квазілінійні СДФР з скінченою післядією та розривними траєкторіями.

В § 3.1 викладені результати про стійкість в середньому квадратичному тривіального розв"язку скалярного СДФР (1),де лінійні функціонали : $a(t,\varphi)$, $b(t,\varphi)$, $c(t,\varphi,u)$ - неперервні по t для всіх $\varphi \in \mathbb{D}([-r,0])$, причому вони є елементами $C^*([-r,0], \mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,\infty)$ та $u \in \mathbb{U}$.

В п.3.1.2 досліджується стійкість лінійного СДФР

$$dx(t) = a(x_t)dt + b(x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} c(x_t,u)\tilde{\nu}(du,dt) \qquad (19)$$

з початковими умовами $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-r,0]$.

Теорема 3.1.1. Для будь-якого $\varphi \in \mathbb{D}([-r,0])$ та $s \geqslant 0$ розв"язок рівняння (19) $\{ x(t+s,s,\varphi), t\geqslant 0 \}$ сумовний в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли

$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a(e^{\lambda\theta}) = 0\} \subset \mathbb{C}_-$ та

$$B:= \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^{\infty} \left| \frac{b(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - a(e^{i\lambda\theta})} \right|^2 d\lambda + \iint_{0\,\mathbb{U}}^{\infty} \left| \frac{c(e^{i\lambda\theta},u)}{i\lambda - a(e^{i\lambda\theta})} \right|^2 \Pi(du)d\lambda \right\} < 1 . \qquad (20)$$

Наслідок 3.1.2. Тривіальний розв"язок рівняння (19) експоненціально стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли виконуються умови теореми 3.1.1.

Теорема 3.1.2. Якщо B=1, то в будь-якому околі нуля знайдеться така початкова функція φ, що $\lim_{t\to\infty} E(x^2(t,s,\varphi))\neq 0(\neq\infty)$.

Теорема 3.1.3. Якщо B>1, то в будь-якому околі нуля знайдеться така початкова функція φ, що $\lim_{t\to\infty} E(x^2(t,s,\varphi))=\infty$.

В п.3.1.3. вивчається критичний випадок для автономного СДФР

$$dx(t) = a(x_t)dt + (1+\rho(t))b(x_t)dw(t) + \int_0^t (1+\gamma(t))c(x_t,u)\tilde{\nu}(du,dt),\ t\geqslant 0. \qquad (21)$$

Теорема 3.1.4. Нехай розв"язок x(t)≡0 рівняння (19) експоненціально стійкий та B=1. Тоді тривіальний розв"язок (21) стійкий в середньому квадратичному, якщо $\alpha(t) = \max(\rho(t),\gamma(t))$ монотонно спадає та існує інтеграл

$$\int_0^\infty |2\alpha(t) + \alpha^2(t)|dt < \infty;$$

нестійкий в середньому квадратичному, якщо $\alpha(t)=\min(\rho(t),\gamma(t))$ монотонно зростає та

$$\int_0^\infty |2\alpha(t) + \alpha^2(t)|dt = \infty.$$

В п.3.1.4. для дослідження стійкості (1) з змінними лінійними функціоналами використовується породжене рівняння

$$dy(t) = a(t,y_t)dt. \qquad (22)$$

Позначимо $h(t,\tau)$ розв"язок (22), побудований за початковою функцією $h(\tau+\theta,\tau)=H(\theta)$, який дорівнює нулеві при всіх $\theta\in[-r,0)$ та одиниці при $\theta=0$.

Теорема 3.1.5. Нехай : 1) виконуються умови для $h(t,\tau)$:

$$\sup_{t\geqslant\tau\geqslant 0} h^2(t,\tau) < \infty;\ \lim_{t\to\infty} h(t,\tau)=0;\ \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t h^2(t,\tau)d\tau<\infty;$$

2) для розв"язку рівняння (22)

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\|\varphi\|=1} |y(t,0,\varphi)| = 0;$$

3) існує константа $c>0$ та ймовірнісна міра $\rho(d\theta)$ на $[-r,0]$ така, що при кожному $t\geq 0$ та $\varphi \in \mathbb{D}$ виконується нерівність

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t [b^2(t,h_t(\theta,s)) + \int_{\mathbb{U}} c^2(t,h_t(\theta,s),u)\Pi(du)]ds < 1 .$$

Тоді розв"язок $x(t)\equiv 0$ рівняння (1) з лінійними функціоналами асимптотично стійкий в середньому квадратичному.

В п.3.1.5 здобуто алгебраїчний критерій асимптотичної стійкості в середньому квадратичному систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з сталими коефіцієнтами (теореми 3.1.6 ; 3.1.7),з допомогою якого досліджена стійкість стохастичної моделі курсу судна.

В § 3.2 досліджується стійкість стохастичних моделей , які описуються стохастичними диференціальними рівняннями з частинними похідними при наявності пуассонових збурень.

Доведена теорема 3.2.2 про стабілізацію розв"язків стохастичної задачі Коші для рівнянь параболічного типу з сталими коефіцієнтами та теорема 3.2.1 існування розв"язку цієї задачі в просторі сумовних в середньому квадратичному за часом випадкових функцій.

Досліджена стабілізація розв"язків мішаної задачі стохастичного рівняння коливання та теплопровідності (п.3.2.3 та 3.2.4).

В § 3.3 доведена формула Іто для квадратичних функціоналів. В п.3.3.1 вводиться поняття квадратичного функціоналу

$$\langle \mu\varphi,\varphi \rangle := \iint_Q \varphi^T(\theta_2)\mu(d\theta_1,d\theta_2)\varphi(\theta_1) ,$$

де $\varphi \in \mathbb{D}_n([-r,0])$; $\mu \in C^*(Q \to M(\mathbb{R}_n))$- лінійний неперервний оператор, який діє на $\varphi \in \mathbb{D}_n$ за правилом

$$(\mu\varphi)(A) = \int_{-r}^0 \mu(A,d\theta)\varphi(\theta) ,$$

де $A \in \sum_{[-r,0]}$ -σ-алгебра борелевих підмножин відрізка $[-r,0]$, причому для $c_1>0$ виконується нерівність $c_1|\varphi(0)|^2 < \langle \mu\varphi,\varphi \rangle$.

Теорема 3.3.1. Нехай має місце стохастичний диференціал

$$dy(t) = [f(y_t) + \alpha(t)]dt + \beta(t)dw(t) + \int_U \gamma(t,u)\tilde{\nu}(du,dt)$$

з початковою умовою $y(t) = \varphi(t)$, $t \in [-r,0]$; $\varphi \in \mathbb{D}([-r,0])$, де $f: C([-r,0]) \to \mathbb{R}^n$; $(\alpha(t),\beta(t)) \subset H_1^n$, $\gamma(t,u) \in H_2^n$.

Якщо $\mu \in D(\mathcal{A}_n^*)$, то для випадкового процесу $\langle \mu y_t, y_t \rangle$ стохастичний диференціал обчислюється за формулою

$$d\langle \mu y_t, y_t \rangle = (\langle \mathcal{A}^* \mu y_t, y_t \rangle + 2\sum_{j=0}^{n} \langle \mu_j^{(o)}, y_t \rangle \alpha_j(t) +$$

$$+ \beta^T(t)\delta(\mu)\beta(t) + \int_U \gamma^T(t,u)\delta(\mu)\gamma(t,u)\Pi(du))dt +$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{n} \langle \mu_j^{(o)}, y_t \rangle \beta_j(t)dw(t) +$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{n} \int_U \langle \mu_j^{(o)}, y_t \rangle \gamma_j(t,u)\tilde{\nu}(du,dt) +$$

$$+ \int_U \gamma^T(t,u)\delta(\mu)\gamma(t,u)\tilde{\nu}(du,dt), \qquad (23)$$

де $\mathcal{A}$ -твірний оператор півгрупи $\{T(t)\}$ на розв"язках детермінованого рівняння $dy(t) = f(y_t)dt$; α_j, β_j - j-ті координати векторів α та β; $j=1,2,\ldots,n$; $\delta(\mu)$ - матриця $(n \times n)$ значень елементів μ_{jk} матричної міри μ на множині , яка складається з однієї точки $\theta_1=0$, $\theta_2=0$; $\mu_j^{(o)}$ - векторні міри на $[-r,0]$, які складаються з j-го стовпчика звуження матричної міри μ на σ-алгебру множин вигляду $A \times \{0\}$, A-борелева множина відрізка $[-r,0]$.

П. 3.3.4 присвячений дослідженню лінійних та квазілінійних СДФР з розривними траєкторіями.

Розглядається лінійне СДФР

$$dx(t) = Ax_t\,dt + Bx_t\,dw(t) + \int_U C(u)x_t\tilde{\nu}(du,dt), \qquad (24)$$

де A, B та C(u)- лінійні неперервні відображення.

Теорема 3.4.1. Тривіальний р зв"язок рівняння (24) експоненціально стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли $D(\widetilde{R}_0) \supset \mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$ - майже відтворюючий конус в $\mathcal{E} := \{q \in C(Q \longrightarrow M_n(\mathbb{R})) \mid q(\theta_1, \theta_2) = q^T(\theta_2, \theta_1); \forall \theta_1, \theta_2 \in Q\}$; $(\widetilde{S}(t), t \in \mathbb{R}_+)$ - півгрупа операторів зсуву вздовж розв"язків (24) з відтворюючим оператором $\widetilde{\mathfrak{A}}$, резольвентою $\widetilde{R}_\lambda$ та потенціалом $\widetilde{R}_0$.

Лема 3.4.2. Нехай $\mathcal{L}$ - слабкий інфінітезимальний оператор маркового процесу, як розв"язку рівняння (24). Якщо $\mu \in D(\widetilde{\mathfrak{A}}^*)$, то квадратичний функціонал $v(\varphi) := \langle \mu\varphi, \varphi \rangle \in D(\mathcal{L})$ та $(\mathcal{L}v)(\varphi) = \langle \widetilde{\mathfrak{A}}^* \mu\varphi, \varphi \rangle$.

Теорема 3.4.2. Тривіальний розв"язок рівняння (24) стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існує $\mu \in \mathbb{K}_0^*$ та число $c>0$ таке, що $\widetilde{\mathfrak{A}}^* \mu \leqslant -c\mathfrak{S}_0$, $\mu \geqslant \mathfrak{S}_0$.

Для квазілінійного СДФР

$$dx(t) = [f(x_t) + a(t, x_t)]dt + b(t, x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} c(t, x_t, u)\widetilde{\nu}(du, dt), \qquad (25)$$

де $f : C_n([-r, 0]) \longrightarrow \mathbb{R}^1$ -неперервне відображення; відображення a, b та c визначені, неперервні та обмежені на кожній обмеженій підмножини із $\mathbb{D}_n([-r, 0])$, доведена теорема єдиності розв"язку

Теорема 3.4.3. Нехай існує послідовність $(\mu_m, m \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{K}^*$, така, що для будь-якого $\varphi \in \mathbb{D}_n([-r, 0])$ існує

$$\lim_{m \to \infty} \langle \mu_m \varphi, \varphi \rangle = \langle \mu\varphi, \varphi \rangle.$$

Якщо $\mu >> 0$, $\sup_{m \geq 1} \| \mathfrak{A}^* \mu_m \| < \infty$ та для всіх

$$v_m(s, \varphi, \psi) = e^{-ks} \langle \mu_m (\varphi - \psi), \varphi - \psi \rangle$$

виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} (\mathfrak{H} v_m)(s, \varphi, \psi) \leqslant 0,$$

де $s \in R_+$; $(\varphi, \psi) \subset \mathbb{D}_n([-r, 0])$, то через кожну точку $(s, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}_n$ проходить не більше одного розв"язку (25), де оператор

$H v_m$ діє з $D(H)$ в $\mathbb{R}$ за правилом

$$(H v_m)(s,\varphi,\psi) = -k v_m(s,\varphi,\psi) + e^{-ks}\langle A^{*}\mu(\varphi-\psi),\varphi-\psi\rangle +$$
$$+ e^{-ks}\Big(2\sum_{j=1}^{n}\langle \mu_j^{(o)},(\varphi-\psi)\rangle (a_j(s,\varphi) - a_j(s,\psi)) +$$
$$+ (b(s,\varphi) - b(s,\psi))^{T}\delta(\mu)(b(s,\varphi) - b(s,\psi)) +$$
$$+\int_{U}(c(s,\varphi,u) - c(s,\psi,u))^{T}\delta(\mu)(c(s,\varphi,u) - c(s,\psi,u))\,\Pi(du)\Big).$$

В п.3.4.2 розглядається квазілінійне стаціонарне СДФР

$$dy(t) = [f(y_t) + a(y_t)]dt + b(y_t)dw(t) + \int_{U} c(y_t,u)\tilde{\nu}(du,dt), \tag{26}$$

де a, b та $c(\cdot,u)$ – неперервні відображення , які задовольняють умовам

$$|a(\varphi)|^2 < L_1\int_{-r}^{0}|\varphi(\theta)|^2\rho(d\theta)+L_2 ;\quad |b(\varphi)|^2 < L_3\int_{-r}^{0}|\varphi(\theta)|^2\rho(d\theta)+L_4 ;$$

$$|c(\varphi,u)|^2 < L_5\int_{-r}^{0}\int_{U}|\varphi(\theta)|^2\rho(d\theta)\,\Pi(du) + L_6 ,$$

де ρ – ймовірнісна міра на $\Sigma_{[-r,o]}$.

***Теорема** 3.4.4.* Якщо $\sigma(A)\subset\{z\in\mathbb{C}\ |\operatorname{Re} z < -2\gamma < 0\}$, та при деякому $\lambda \geq 2\gamma$ виконується нерівність

$$c\,\|\delta(R^{*}_{-\lambda}\sigma_o)\|\, e^{\lambda r}\Big(\frac{1}{\lambda}L_1 + L_3 + L_5\Big) < 1 ,$$

то рівняння (26) має стаціонарний розв"язок.

***Теорема** 3.4.5* дає достатні умови : $K\ \|\delta(R^{*}\sigma_o)\| < 1$ асимптотичної стохастичної стійкості для рівняння (25).

Додаток складається з двох параграфів.

В § 1 проведено якісне дослідження стохастичної моделі механічної системи "різець-деталь".
В п.1.1 розроблено метод усереднення для диференціально-функціональних рівнянь з швидкоосцілюючими випадковими функціоналами (теорема Д 1.2).

П.1.2 досліджує лінеарізоване рівняння системи "різець-деталь" в околі статичної рівноваги

$$\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + au(t) + b[u(t) - u(t - \tau(t))] = 0, \qquad (27)$$

де γ, a, b - визначають характеристики систем. Будемо вважати швидкість шпінделя випадковою величеною

$$\tau(t) = \Delta(1 + \alpha\xi(t)),$$

де $\{\xi(t)\}$ -марковий випадковий процес, який набуває два значення 0 та 1, причому фінальна ймовірність дорівнює $\mathbb{P}(\xi(\infty)=1)=p$. Якщо усереднити (27) по фінальному розподілу, то питання про стійкість положення спокійного різання можна розв"язати, провівши аналіз розташування нулів квазіполіному

$$W(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + a + b(1 - pe^{-(1+\alpha)\Delta z} - (1-p)e^{-\Delta z}) = 0.$$

З використанням ЕОМ побудовано D - розбіття при $\gamma\Delta=1$; $\alpha=0,5$; $p=0,5$ та встановлено, що область стійкості збільшується та з"являються достатньо обширні зони стійкості навіть над границею абсолютної стійкості.

Тут також розглядається інша лінеарізована стохастична модель процесу різання, в якій параметри детермінованої системи знаходяться під впливом випадкових збурень

$$\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + au(t) + b[u(t) - u(t-\Delta)] =$$

$$= [u(t) - u(t-\Delta)][dw(t) + \int_0 f(v)\tilde{\nu}(dv,dt)]. \qquad (28)$$

Тоді область стійкості в середньому квадратичному тривіального розв"язку (28) визначається нерівністю

$$\frac{4}{\pi}\left(\sigma^2 + c^2\int_0 \frac{f^2(v)}{v^2}dv\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\Delta s}{2}\,ds}{[-s^2+a+b(1-\cos s\Delta)]^2+(s+b\sin s\Delta)^2}<1, \qquad (29)$$

де σ - параметр дифузії процесу $(w(t))$ та $\int_0 \frac{f^2(v)}{v^2}dv < \infty$.

Умова (29) визначає в просторі параметрів (σ, a, b) "пелюсткову поверхню". При $c=1$; $\gamma=0,1$; $\Delta=0,1$ та $f(v)=\sin 3v$, за допомогою ЕОМ побудовано області стійкості. При фіксованому значенні σ "пелюстки" помітно згладжуються, що найбільш реально відобрамає процес різання на токарних верстатах.

П. 1.3 присвячений дослідженню системи "різець-деталь" за допомогою методу Ляпунова. Якщо побудувати функціонал $v(s,\varphi)$, який задовольняє умови теорем 1.3.2 та 1.3.3

$$v(s,\varphi)=\frac{1}{2}\,|\varphi(0)|^2+\alpha\int_{-\Delta}^{0}|\varphi(\theta)|^2\,d\theta,\quad \alpha>0,$$

то достатніми умовами асимптотичної стохастичної стійкості процесу різання є виконання нерівностей

$$c+\alpha>0;\ (c+\alpha)(\alpha-\gamma)-\frac{1}{4}(1-a-b)<0;\ c=1+\int_{\psi}\frac{f^2(v)}{v^2}\,dv<\infty;$$

$$\begin{vmatrix} c-\alpha & \frac{1}{2}(1-a-b) & -c \\ \frac{1}{2}(1-a-b) & \alpha-\gamma & -b \\ -c & -b & c-\alpha \end{vmatrix}>0.$$

Нерівності легко перевіряються за допомогою ЕОМ, що дає можливість вказувати області параметрів, де спостерігається стабілізація стохастичної системи "різець-деталь".

В § 2 розглянута стійкість стану рівноваги системи фазової автопідстройки частоти (ФАПЧ).

В п.2.1 описана стохастична модель ФАПЧ при наявності смугового підсилювача в ланцюгу оберненого зв"язку.

В п. 2.2 проведений аналіз стійкості стану рівноваги системи ФАПЧ з багатокаскадним смуговим підсилювачем при відсутності перешкод. Цей аналіз зводиться до дослідження стійкості тривіального розв"язку диференціального рівняння другого порядку з загаяним аргументом

$$T\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)-bx(t-\tau)+bmT\dot{x}(t-\tau)=0, \tag{30}$$

де $b=\Omega_Y F'(\varphi_0)$, Ω_Y - смуга утримання, T - стала фільтру низьких частот. При $m=0$ область захвату (стійкості) сильно відрізняється при всіх $T>0$ від випадку ФАПЧ без смугового підсилювача. При $\Omega_Y F'(\varphi_0)$ близьких до одиниці та достатньо великих T слід досліджувати вплив малих випадкових збурень параметрів на динаміку ФАПЧ, тобто досліджувати стійкість тривіального розв"язку лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння при наявності випадкових збурень

$$
T\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t-\tau) + bmT\dot{x}(t-\tau) =
$$
$$
= [\alpha_1 x(t) + \alpha_2 x(t-\tau) + \alpha_3 \dot{x}(t-\tau)]\dot{w}(t) +
$$
$$
+ [c_1 \dot{x}(t) + c_2 x(t-\tau) + c_3 \dot{x}(t-\tau)] \int_{U} f(v)\dot{\tilde{\nu}}(dv,t). \qquad (31)
$$

Знайдено області стійкості в середньому квадратичному тривіального розв"язку СДРР (31).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Доведена теорема існування та єдиності для розв"язку стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими функціоналами.
2. Побудовано класи функціоналів Ляпунова-Красовського та знайдені алгоритми обчислення слабких інфінітезимальних операторів на розв"язках СДФР з обмеженою післядією та пуассоновими збуреннями.
3. Доведено прямі теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість в середньому квадратичному та асимптотичну стохастичну стійкість розв"язків СДФР з розривними траєкторіями.
4. Встановлено зв"язки стійкостей для розв"язків СДФР з обмеженою післядією, необхідні та достатні умови експоненціальної р-стійкості в цілому.
5. Доведено теореми існування та єдиності розв"язків для СДФР з необмеженою післядією, про неперервну залежність розв"язків від початкових даних.
6. Побудовано класи функціоналів Ляпунова-Красовського та обчислені слабкі інфінітезимальні оператори для розв"язків СДФР з необмеженою післядією та пуассоновими збуреннями.
7. Доведено прямі теореми Ляпунова про стійкість майже скрізь СДФР з необмеженою післядією з розривними траєкторіями.
8. Побудовано квадратичні функціонали, які дають умови стійкості тривіального розв"язку квазілінійних СДФР із скінченною післядією та розривними траєкторіями.
9. Розроблений інтегральний метод, який дає необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв"язків лінійних СДФР.
10. Знайдено достатні умови стійкості в середньому квадратичному

стохастичних диференціально-різницевих рівнянь у термінах влас - них значень деякої інтегральної матриці.

11. Досліджена стійкість стохастичної моделі " звісаючий павук " (теорія суцільного середовища та в"язкопружності).

12. Проведений якісний аналіз стохастичної моделі задачі різання на токарному верстаті (машинобудування).

13. Досліджена стохастична модель фазової автопідстройки частоти з багатокаскадним смуговим підсилювачем (радіоелектроніка).

14. Знайдено умови асимптотичної стабілізації в середньому квадратичному стохастичної задачі Коші длчя рівнянь параболічного типу з сталими коефіцієнтами.

15. Отримано умови асимптотичної стабілізації в середньому квадратичному розв"язків стохастичних рівнянь коливання та теплопровідності з мішаними початковими умовами.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Царьков Е.Ф.,Ясинский В.К. Об устойчивости тривиального решения линейных стохастических систем//Укр.мат. журн.-1970.-Т.22,N5.-699-701.
2. Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических дифференциальных систем с последействием //Уравнения математической физики и теории алгоритмов.-Рига,1972.-С.97-109.
3. Ясинский В.К. Об L(p,q)-устойчивости решений линейных дифференциал но-функциональных уравнений //Уравнения математической физики и теория алгоритмов.-Рига, 1972.-109-120.
4. Слюсарчук В.Е., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости решений линейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений к случайным возмущениям их параметров//Укр. мат. журн.-1973.-Т.25,N8.-С.412-418.
5. Ионин Л.Л., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости решений стохастических дифференциально-разностных уравнений// Исследование по теории дифференциальних и разностных уравнений.-Рига: Латв. ун-т, 1974.-С.29-72.
6. Ясинський В.К. Про моментну стійкість розв"язків диференціально-функціональних рівнянь до випадкових збурень їх параметрів // Матеріали другої конференції молодих науковців Західного центру АН УРСР. Секція математики та механіки.-

Ужгород, 1975.-С.112-115.

7. Слюсарчук В.Е., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических систем с последействием // Исследование систем со случайными возмущениями.-Киев,1977.-С.3-15.-Препринт /АН УССР. Ин-т кибернетики, N77.14.
8. Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в критическом случае //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.-1977.-Т.31,N6.-С. 977-1005.
9. Ясинский В.К. Устойчивость почти наверное тривиального решения функционально-лифференциальных уравнений// Асимптотические методы нелинейной механики.-Киев;Ин-т математики АН УССР, 1979.-С.111-117.
10. Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат.журн., 1980, Т.32, N1, С.89-98.
11. Ясинский В.К.Об устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами//Аналитические методы исследования нелинейных колебаний.-Киев: Ин-т математики АН У ССР, 1980.-С.109-117.
12. Свердан М.Л., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических функционально - дифференциальных уравнений в критическом случае // Изв.вузов. Сер.математика.-1982.-Т. 241, N6,-С.53-56.
13. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Некоторые свойства функционально-дифференциальных уравнений/ Черновиц.ун-т.-Черновцы,1982.-47с.-Деп. в ВИНИТИ 9.10.82, N6202-82 деп.
14. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Устойчивость стохастических дифференциально-разностных систем/ Черновиц. ун-т.-Черновцы,1982.-36с.-Деп.в ВИНИТИ 9.07.82,N3668-82 деп.
15. Ясинский В.К. Поведение на бесконечности решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными операторами // Дифференциальные уравнения и применения I : Тр. третьей конф. (Руссе, 26 авг.-2 сент. 1985 г.).- Руссе, 1987 - С.487-490.
16. Ясинский В.К. Анализ устойчивости резца в радиальном направлении с учетом стохастических возмущений //Нелинейные ко -

лебания механических систем: Тр. всесоюзн. конф. (Горький, 11-17 окт.), 1987.-С.113-114.

17. Ясинский В.К. Устойчивость стохастических дифференциально - функциональных уравнений при наличии пуассоновских возмущений // Функционально-дифференциальные уравнения и их применения: III Уральская региональная конф.-Пермь, 1988.-С.304.

18. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений//Кибернетика и вычислительная техника.-1988.-Т.81.-С.7-12.

19. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения // Стохастические модели в функциональных пространствах.-Киев,1989.-С.27-46.- Препринт / АН УССР. Ин-т математики, N89.-13.

20. Ясинский В.К. Устойчивость решений счетных систем стохастических дифференциальных уравнений с разрывными траекториями // V межд. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и математической статистике.-Вильнюс,1989.-С.395-396.

21. Перун Г.М., Ясинский В.К. Стабилизация решения стохастического уравнения колебания с оператором Бесселя при наличии пуассоновских возмущений.-Укр.мат.журн.,1990.-Т.42,N7-С.974 -978.

22. Ясинский В.К. Исследование потери устойчивости стержня в динамических системах с учетом стохастических возмущений // Нелинейные колебания механических систем : II всесоюзная конф.- Горький, 1990.-Т.2.-С.31-32.

23. Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Про зв"язок експоненціальної та асимптотичної стохастичної стійкості розв"язків диференціально-функціональних рівнянь з розривними траєкторіями // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями:Збірн. наук.праць.-Чернівці,1990.-С.183-189.

24. Цынгаева А.В., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений с раз - рывными траекториями //Укр.мат.журн.-1989, Т.41,N5.-С.666 - 671.

25. Ясинский В.К. Об асимптотическом поведении решений стохас - тических дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием при наявности пуассоновских возмущений//Стохастические системы и их приложение:Сб. Научн.тр.-Киев,1990.-С.107-116.

26. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. - Рига, Ориентир, 1992.-328 с.
27. Yasinsky V.K. The Investigation of Stochastic Quasilinear Differential-Functional Equations with Poisson Disturbances //19 Conference on Stochastic Processes and their Applica - tions (Eisenach, German Democratic Republic, September 3-8, 1990).-Jena (GDR), 1990.-P.97-98. Co-author Tsarkov E.F.
28. Yasinsky V.K. Research of Accountable System of Stochastic Differential Equations with Breaking Trajectories // Second Collogvium on Differ-ntial Equations (Plovdiv , Bulgaria, August 19-24).-Plovdiv, 1991.-P.111. Co-author Ivaniv I.I.
29. Yasinsky V.K. Stability of Solution of Nonlihear Stochastic Functional Differential Equations. // Second Collogvium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, August 19-24). - Plovdiv, 1991.-P.111. Co-author Yasinskaya L.I.
30. Yasinsky V.K. On Strong Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations with Infinite Aftereffect// Procee - dings of the Latvian Probality Seminar.-1992.-Vol.1.-P.189-214.
31. Yasinsky V.K. The Second Lyapunov Method for Stochastic Functional-Differential Equations with Poisson Disturbancess //Random Opereters and Stochastic Equations.-1992.-Vol.4. - P.1-18, Co-author Tsarkov E.F.
32. Yasinsky V.K. Study of the Stability of Nonlinear Functio - nal-Differential Equations with Infinite Aftereffect Pois - son's Perturbations.//Тези міжнародної конференції, присвяченої пам"яті академіка М.П. Кравчука (Київ-Луцьк, Україна, 22-28 вересня 1992 року).-Київ, 1992.-с.254.

26. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.

27. Yasinsky V.K. The investigation of Stochastic Quasilinear Differential-Functional Equations with Poisson disturbances // 3 Conference on Stochastic Processes and their Applications [illegible], September 3-6, 1990), Jena [illegible], 1990.-P.37-38. Co-author Tsarkov E.F.

28. Yasinsky V.K. Research of Accountable System of Stochastic Differential Functions with Breaking trajectories // Second Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, August 19-24), Plovdiv, 1991.-P.[illegible]. Co-author [illegible]

29. Yasinsky V.K. Stability of Solution of Nonlinear Stochastic Functional Differential Equations // Second Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, August 19-24), Plovdiv, 1991.-P.111. Co-author Yasinska [illegible]

30. Yasinsky V.K. [illegible] of Stochastic Differential Equations with infinite aftereffect // Proceedings of the Latvian Probability Seminar.-1992.-Vol.1.-P.185-213.

31. Yasinsky V.K. The Second Lyapunov Method of Stochastic Functional-Differential Equations with Poisson Disturbances // [illegible] -Vol.1 [illegible] Co-author Tsarkov E.F.

32. Yasinsky V.K. [illegible] Stochastic Functional-Differential Equations with Infinite Aftereffect Poisson's Perturbations // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П. Кравчука (Київ-Луцьк, Україна, 22-28 травня 1992 року). - Київ, 1992. - С.254.

Підписано до друку 18.01.93.
Формат 60x84/16. Папір друкарський № 2.
Офсетний друк. Ум. друк. аркушів 1,9.
Обл.-вид. аркушів 2,0. Замовлення 023.
Тираж 100. Безплатно

Лабораторія копіювально-розмножувального друку

Чернівецького державного університету

м.Чернівці, вул.Коцюбинського,2