

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АХМЕДОВ Абдухамид

УДК 531.011

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ  
НА УПРУГИХ АМОРТИЗАТОРАХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ  
ВОЗДЕЙСТВИЯХ

01.02.01 - теоретическая механика

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

К и е в - 1993



00373770 (R)

Работа выполнена в Институте механики АН Украины

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,  
профессор Я.Ф.КАЮК

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор В.И.ГУЛЯЕВ  
кандидат физико-математических наук  
Б.П.ИВАЩЕНКО

Ведущая организация: Институт прикладной математики и механики  
АН Украины

Защита состоится 23 февраля 1993 г. в 12 часов на заседании  
специализированного совета К 016,49.01 в Институте механики АН  
Украины (252057, Киев-57, ул.Нестерова, 3)

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке  
Института механики АН Украины

Автореферат разослан "21" января 1993 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета  
доктор технических наук

*Назар*  
В.М.Наваренко

ЛННБ ім. В. Стефаніка  
АН УРСР

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. К настоящему времени механика абсолютно твердых тел постоянной массы и их систем является в определенном смысле завершенным разделом естествознания. В ней сформулированы основные модельные представления, законы и теоремы, на основе которых решены многочисленные задачи, представляющие теоретический и практический интерес.

Динамика тел и системы тел переменной массы начала развиваться в начале XX в. Основоположником этого раздела механики следует считать И.В.Мещерского, который впервые сформулировал основные теоремы механики тел переменной массы. Дальнейшее развитие динамики тел переменной массы изложено в трудах ученых К.Э.Циолковского, Г.Н.Дубошина, М.К.Тихонравова, Д.Е.Охотимского, А.А.Космодемьянского, Ф.Р.Гантмахера, Л.М.Левина, Н.В.Бутенина, А.И.Лурье, В.С.Новоселова, В.А.Сапа, В.М.Карогодина, Р.Ф.Аппазова, С.С.Лаврова, В.П.Мишина, T. Levi-Civita, R. Goddard, H. Obert, J. M. J. Kooy, J. W. H. Uytendbogart, A. Miele, G. Leitmann, D. F. Lawden, P. Cicala и др.

Построение фундаментальных теоретических основ механики тел переменной массы имеет некоторую специфику, обусловленную переменностью массы и появлением эффектов, которые возникают при этом. Вследствие этого формулировка некоторых положений динамических величин таких, например, как количество движения, кинетический момент и др. требует привлечения эвристических рассуждений и специальных подходов; особые подходы также необходимы и при формулировке теорем динамики тел переменной массы.

Могут существовать различные механизмы изменения массы и соответственно этому различные методологические подходы к формулировке основных теорем динамики тел переменной массы, методы решения соответствующих задач. Например, ракеты различных систем, массы которых изменяются в процессе сгорания топлива. Изменение массы может происходить вследствие истечения (откачки, накачки) жидкости; в результате химических превращений; путем изменения размеров элементов системы (например, намоткой нитей, кабатов на барабаны) и т.п. На практике наиболее встречающимися механическими моделями твердых тел переменной массы являются сферические, цилиндрические, эллипсоидальные, тороидальные и др. резервуары на амортизаторах, из которых истекает жидкость, и они совершают

колебательные движения. Они чаще всего являются элементами или рабочими органами (камерами) различных вибрационных объектов, установок и др. Исследование задач динамики указанных тел в большинстве случаев сводится к исследованию нелинейных колебательных режимов тел переменного состава.

Развитие современных методов теоретического и экспериментального анализа колебательных систем выполнены в трудах ученых Л.И.Менделъштама, Н.Д.Палалекси, А.А.Андропова, Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского, С.П.Тимошенко, В.В.Болотина, И.И.Блехмана, Ю.И.Неймарка, Я.Г.Пановко, Р.Ф.Ганиева, А.В.Увингия, В.О.Коновенко, М.Я.Кушуля, В.Н.Гуляева, П.В.Харламова, А.А.Ильхина, Я.Ф.Кавка, Л.Г.Лобаса, А.Я.Савченко, Н.П.Плахтиенко, А.Э.Закржевского, Б.П.Иващенко, А.Тилавова, Р.Е.Д.Вishop, В. Van der Pol, С.Е. Crede, J.P. Den Hartog, I. Gutman, M. Schuler, A. Tondl, J.J. Stoker, A.H. Nayfeh, J.K. Hale, Ch. Hayashi, J.D. Cole, M. Urabe, M. Roseau, W.D. Hayes, C.C. Chang, D.S. Schmidt, G.E.O. Giacaglia и др.

Учет фактора переменности массы приводит не только к появлению дополнительных (реактивных) сил, но и существенно влияет на постановку и выбор метода решения. Решение поставленной задачи необходимо находить в областях, размеры и формы которых изменяются со временем.

В данной диссертации выбрана следующая модель тела переменной массы. Тело переменной массы представляем в виде замкнутой оболочки (несущее тело), которая содержит жидкую или дисперсную среду (несомое тело). Через отверстия на поверхности несущего тела непрерывно вытекают (поступают) с определенной скоростью в виде струи частицы среды. Вследствие этого происходит изменение количественного состава частиц, находящихся в объеме несущего тела. Наличие внутри несущего тела устройства (типа пластин или др.) ограничивает влияние волновых процессов (движений) на свободной поверхности, если несомая среда является жидкостью. Несущее тело считается прикрепленным с помощью амортизаторов к неподвижному основанию, и оно подвергается внешним периодическим возмущениям.

Актуальность приведенных в диссертации исследований обуславливается следующими обстоятельствами. Прежде всего, с чисто теоретической точки зрения исследования по динамике тела переменной массы, модель которого указана выше, позволяют установить, какими

образом изменяется закон движения исследуемого тела, его амплитудно-частотные характеристики, если его масса изменяется с течением времени по определенному закону. Выполненных исследований по динамике пространственных тел переменной массы на амортизаторах с учетом нелинейных эффектов почти не имеется; отсутствуют также исследования нелинейных колебательных режимов твердых тел переменной массы на амортизаторах под действием внешних гармонических воздействий. Решение указанного класса задач предопределяет актуальность и в практическом смысле. Именно, информация, получаемая в результате решения конкретных задач, может оказаться полезной при исследовании колебаний систем типа топливных баков, цистерн с жидкостью и др. объектов при их эксплуатации с учетом изменения массы.

Целью работы является исследование нелинейных пространственных колебательных режимов тела переменной массы на упругих амортизаторах при гармоническом воздействии. Это предопределяет разработку следующих вопросов:

1. Создание математической модели, которая описывает указанные процессы, и формулировка основных допущений, уравнений движения с различной степенью нелинейности.

2. Постановка и решение новых конкретных задач, описывающих нелинейные колебательные режимы твердых тел переменной массы, вызываемых внешними гармоническими возбуждениями.

3. Разработка эффективного вычислительного алгоритма решения задач; установление на основе полученных числовых данных механических эффектов, отражающих влияние фактора переменности массы на возбуждение колебательных режимов по различным обобщенным координатам; возникновение резонанса и характер перехода системы через резонанс, выход системы на стационарный режим и др.

Научная новизна. В диссертации предложена математическая модель твердого тела переменной массы, на основе которой поставлены и решены новые нелинейные задачи о пространственных колебаниях указанных тел, подвешенных на пружинах и находящихся под действием периодических нагрузений, представляющие теоретический и практический интерес.

Достоверность полученных результатов подтверждена предварительным решением ряда тестовых задач, применением эффективного в смысле точности и сходимости вычислительного алгоритма, согласо-

ванием полученных результатов с известными механическими эффектами.

Практическая ценность работы состоит в том, что полученные при решении конкретных задач данные могут быть использованы в модельных разработках проблем амортизации тел переменной массы. Результаты численных расчетов, а также основные выводы, могут быть использованы в инженерной практике при оценке и прогнозировании виброразгрузки сыпучих или жидких сред различных амортизированных объектов (вагонов, цистерн, контейнеров) и при оценке интенсификации технологических процессов, проектировании и эксплуатации различных машин и механизмов.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на XVI, XVII научных конференциях молодых ученых Института механики АН Украины (1991, 1992);

- на III Всесоюзной научно-технической конференции "Вибрация и вибродиагностика. Проблемы стандартизации" (Нижегород, 17-19 сентября 1991 г.);

- на научном семинаре отдела динамики полиагрегатных систем Института механики АН Украины (1992);

- на научном семинаре по направлению "Теория колебаний и устойчивости движения механических систем" секции Ученого совета Института механики АН Украины (1992).

Публикации. Основное содержание и научные результаты диссертационной работы отражены в публикациях [1-6].

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 128 наименований и "Приложений".

Общий объем диссертации 176 страниц, включая 29 страниц рисунков и 23 страницы "Приложений".

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткий обзор работ, посвященных истории становления и развития основ механики тел переменной массы. Рассмотрены возможные механизмы изменения массы, проанализирована специфика исследования задач динамики тел переменной массы. Сформулирована цель исследования, обоснована актуальность проблемы и

ее новизна, приводится аннотация глав диссертационной работы.

В первой главе формулируется математическая модель изучаемого тела переменной массы. Тело переменной массы представляем в виде замкнутой оболочки (несущее тело), которое содержит жидкую или дисперсную среду (несомое тело). Через отверстия на поверхности несущего тела вытекают (поступают) непрерывно с определенной скоростью в виде струи частицы среды. Наличие внутренних устройств в несущем теле (типа пластин или др.) обеспечивает ограничение влияния волновых процессов (движений) на свободной поверхности несомой среды. Несущее тело считается прикрепленным с помощью амортизаторов к неподвижному основанию, и оно подвергается внешним периодическим возмущениям.

Применительно к выбранной модели тела переменной массы сформулированы основные теоремы динамики (теорема об изменении количества движения и кинетического момента) на основе принципа соответствия. В результате в явном виде представлены формулы вычисления векторов реактивной силы и момента.

Известно, что при вычислении величин упругих сил амортизаторов появляются иррациональные выражения. В работе, следуя подходу Я.Ф.Каюка, предложен процесс рационализации, позволяющий эффективно избавиться от иррациональностей общего вида в выражениях для определения указанных силовых факторов.

Получены уравнения движения тела переменной массы на упругих амортизаторах. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_t \dot{\xi}_{1ct}) &= F_{\xi_1}^{(s)} + \frac{d}{dt} (M_t v_{ctz}^{(\xi_1)}) + \sum_{(i,j)} F_{ij}^{\xi_1} + \\ &+ \sum_{(j)} \pm \mu_j [v_{y1} (\cos \varphi \cos \psi + \sin \psi \sin \theta) + v_{y2} (-\sin \varphi \cos \psi + \\ &+ \cos \varphi \sin \psi \sin \theta) + v_{y3} \sin \psi \cos \theta]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (J_{11} \omega_1) + (J_{33} - J_{22}) \omega_2 \omega_3 = M_{x_1}^{(s)} + \sum_{(i,j)} M_{ij}^{x_1} + \sum M_y^{x_1}; \quad (2)$$

где  $\xi_{1C_t}, \xi_{2C_t}, \xi_{3C_t}$  - координаты центра масс тела;  $F_{S_1}^{(3)}$ ,  $\sum_{(i,j)} F_{ij}$  - соответствующие проекции главного вектора заданных сил и сил упругости ( $i$  - номер точки крепления пружин к несущему телу,  $j$  - номер пружины, которая исходит из этой точки);  $\pm \mu_{\gamma}(t)$  - временной расход (приход) массы через  $\gamma$ -ое отверстие;  $v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}$  - проекции  $\vec{v}_y$  вектора скорости истечения среды;  $\theta, \psi, \varphi$  - углы Эйлера-Крылова;  $J_{kk} (k=1,3)$  - главные моменты инерции;  $\omega_k (k=1,3)$  - проекция угловой скорости тела переменной массы в системе отсчета  $C_t x_1 x_2 x_3$ , которая неразрывно связана с телом;  $M_{x_1}^{(3)}$ ,  $\sum_{(i,j)} M_{ij}^{x_1}$ ,  $\sum_{(y)} M_y^{x_1}$  - соответственно проекции главных моментов внешних заданных сил, сил упругости и реактивных сил. Аналогичной структуры остальные уравнения движения. В уравнениях (1), (2) слагаемые вида  $\frac{d}{dt} (M_t v_{C_t}^{(S_j)}) (j=1,3)$  обусловлены движением центра масс относительно несущего тела и определяются в процессе решения конкретных задач.

Полученные основные уравнения движения тела переменной массы справедливы для тел произвольной формы, различного типа их крепления к неподвижным основаниям, произвольного диапазона распределения отверстий, через которые происходит истечение среды на поверхности (оболочке) несущего тела, при фиксированных точках приложения и линиях действия внешних периодических сил, различных значений геометрических и механических характеристик пружин (амортизаторов).

Во второй главе приведены упрощенные варианты уравнений движения изучаемого тела переменной массы. В основу упрощения общих уравнений движения приняты известные преобразования. Именно, в тригонометрических функциях, аргументы которых есть угловые координаты, удерживаются в разложении в ряд слагаемые вплоть до кубической нелинейности; аналогичные преобразования проводятся с выражениями, зависящими от этих тригонометрических функций.

В конечном итоге получены уравнения движения, в которых сохранены члены кубической нелинейности относительно искомых величин и их производные по времени. Получена такая структура уравнений, которая включает отдельно линейные и нелинейные слагаемые различных порядков нелинейностей относительно искомых функций.

Для иллюстрации ниже приведено по одному уравнению, которые относятся соответственно к поступательной и вращательной частям движения.

Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_t \dot{\xi}_{1c_t}) + \alpha_{11} \xi_{1c_t} + \alpha_{12} \xi_{2c_t} + \alpha_{13} \xi_{3c_t} + \alpha_{14} \theta + \alpha_{15} \psi + \alpha_{16} \varphi = \\ = \mathcal{F}_{\xi_1}^{(3)} + \sum_{(y)} (\pm \mu_y v_{y1}) + \frac{d}{dt} (M_t v_{c_t}^{(\xi_1)}) + \Phi(\xi_{1c_t}, \xi_{2c_t}, \xi_{3c_t}, \theta, \psi, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha_{11} = \sum_{(i,j)} \frac{C_{ij}}{(l_{ij}^0)^2} (\xi_{ij}^{(1)} - x_1^{(i)});$$

$$\alpha_{16} = \sum_{(i,j)} \frac{C_{ij}}{(l_{ij}^0)^2} (x_1^{(i)} \xi_{ij}^{(2)} - x_2^{(i)} \xi_{ij}^{(1)}) (\xi_{ij}^{(1)} - x_1^{(i)}) + \sum_{(y)} (\pm \mu_y v_{y2});$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (J_{11} \dot{\theta}) + \alpha_{41} \xi_{1c_t} + \alpha_{42} \xi_{2c_t} + \alpha_{43} \xi_{3c_t} + \alpha_{44} \theta + \alpha_{45} \psi + \alpha_{46} \varphi = \\ = M_{x_1}^{(3)} + \sum_{(y)} M_y^{x_1} + \frac{d}{dt} [J_{11} (-\dot{\psi}\varphi + \frac{1}{2} \dot{\theta}\varphi^2)] - \end{aligned} \quad (4)$$

$$-(J_{33} - J_{22})(\dot{\psi}\varphi - \dot{\psi}^2\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}\varphi) + \Phi_4(\xi_{1c_t}, \xi_{2c_t}, \xi_{3c_t}, \theta, \psi, \varphi),$$

$$a_{41} = \sum_{(i,j)} \frac{C_{ij}}{(l_{ij}^0)^2} (\xi_{ij}^{(1)} - x_1^{(i)}) (x_2^{(i)} \xi_{ij}^{(3)} - x_3^{(i)} \xi_{ij}^{(2)}) ;$$

$$a_{46} = \sum_{(i,j)} \frac{C_{ij}}{(l_{ij}^0)^2} (x_1^{(i)} \xi_{ij}^{(2)} - x_2^{(i)} \xi_{ij}^{(1)}) (x_2^{(i)} \xi_{ij}^{(3)} - x_3^{(i)} \xi_{ij}^{(2)}) .$$

В уравнениях (3), (4) через  $\bar{\Phi}_S (S = \bar{1}, \bar{6})$  обозначены слагаемые нелинейных членов относительно введенных обобщенных координат;  $C_{ij}$  - жесткости упругих пружин;  $l_{ij}^0$  - длины пружины в положении статического равновесия;  $\xi_{ij}^{(1)}, \xi_{ij}^{(2)}, \xi_{ij}^{(3)}, x_1^{(i)}(t), x_2^{(i)}(t), x_3^{(i)}(t)$  - координаты точек крепления пружины.

В полученных уравнениях в общем случае коэффициенты при линейных и нелинейных слагаемых являются функциями времени, и они учитывают различные параметры входных данных, принятый закон изменения массы, относительное перемещение центра масс тела, а также произвольный закон распределения отверстий для истечения жидкости на поверхности оболочки. При этом в законе в явном виде представлены формулы для вычисления соответствующих реактивных сил.

Упрощенный вариант уравнений движения применим при тех же предположениях, которые приняты при выводе общих ("точных") уравнений.

В третьей главе рассмотрена постановка и сформулирован метод решения конкретных задач. Именно, в качестве тела переменной массы рассматривается цилиндрический резервуар, который упруго подвешен на пружинах к неподвижному основанию.

Предполагается, что в начальный момент времени резервуар полностью наполнен жидкостью; его масса изменяется вследствие истечения жидкости через круговые отверстия на боковой поверхности или на нижнем дне резервуара.

Приведены уравнения движения для исследования пространственных нелинейных колебательных режимов движения, учитывающие кубическую нелинейность относительно искомым обобщенных координат. Эти уравнения получены как частный случай уравнений, приведенных во второй главе.

Применительно к этой задаче определен закон изменения массы, закон относительного движения центра масс тела и вычислены в явном виде моменты инерции тела как функции времени. Все уравнения движения, необходимые соотношения представлены в безразмерной форме. Для того, чтобы иметь представление о структуре уравнений, приведем по одному уравнению для поступательного и вращательного движений соответственно. Они имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (M_t \dot{\xi}_{1c_t}) + C_1 \xi_{1c_t} + (C_1 x'_{3c_t} - \sum_{(y)} (\pm d_y \mu_y v_{y3}) + \\ & + \beta \mu(t) \dot{x}'_{3c_t} - M_t \ddot{x}'_{3c_t}) \psi + \sum_y (\pm d_y \mu_y v_{y2}) \varphi = \mathcal{F}_{\xi_1}^{(3)} + \\ & + \sum (\pm d_y \mu_y v_{y1}) + M_t \dot{x}'_{3c_t} \dot{\psi} + b_{13}^{(1)} \xi_{1c_t} \xi_{3c_t} + b_{35}^{(1)}(t) \xi_{3c_t} \psi + \\ & + b_{45}^{(1)}(t) \theta \psi + b_{46}^{(1)} \theta \varphi + b_{55}^{(1)} \psi^2 + b_{66}^{(1)}(t) \varphi^2 + \\ & + \dots + d_{566}^{(1)} \psi \varphi^2 + d_{666}^{(1)}(t) \varphi^3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (J_{33} \dot{\varphi}) + \Omega \varphi = M_{x_3}^{(3)} + \sum_{(y)} M_y^{x_3} + \frac{d J_{33}}{dt} \dot{\psi} \theta + \\ & + J_{33} (\ddot{\psi} \theta + \dot{\theta} \dot{\psi}) + b_{14}^{(6)} \xi_{1c_t} \theta + b_{25}^{(6)} \xi_{2c_t} \psi + \\ & + b_{36}^{(6)} \xi_{3c_t} \varphi + b_{45}^{(6)}(t) \theta \varphi + \dots + d_{556}^{(6)}(t) \psi^2 \varphi + d_{666}^{(6)} \varphi^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$M_t = M_0^T + M_t^{ж}, \quad \mu_y = \pi z_y^2 \rho_{ж} v_y, \quad \mu = \sum_{(y)} \mu_y;$$

$M_0^T$  - масса резервуара,  $M_t^{ж}$  - масса жидкости,  $z_y$  - радиус  $y$ -го отверстия;  $\rho_{ж}$  - плотность жидкости;  $v_y$  - величина скорости истечения;  $x'_{5ct}$  - координаты центра масс системы "тело+среда" относительно  $O'x'_1x'_2x'_3$  - системы отсчета, которая жестко связана с цилиндрическим резервуаром;

$$c_1 = \frac{4c t_0^2}{M_0}, \quad d_y = \frac{\mu_{y0} v_{y0} t_0^2}{M_0 \xi_0}, \quad \beta = \frac{t_0}{M_0} \sum_{(y)} \mu_{y0},$$

$$b_{13}^{(4)} = \frac{4c \xi_0 t_0^2}{M_0 l}, \quad b_{35}^{(4)}(t) = - \frac{4c \xi_0 t_0^2}{M_0 l} \left( \frac{R}{\xi_0} - x'_{5ct} \right), \dots,$$

$$d_{566}^{(4)}(t) = - \frac{2cR \xi_0 t_0}{M_0 l^2} \left[ \frac{lR}{\xi_0^2} + \frac{4(l+3R)}{\xi_0} x'_{5ct} \right],$$

$$\Omega = \frac{8cR^2 t_0^2}{J_{33}^0}, \quad b_{25}^{(6)} = - \frac{4cR^2 \xi_0 t_0^2}{J_{33}^0 l}, \dots,$$

$$d_{666}^{(6)} = \frac{4cR^2 t_0^2}{J_{33}^0 l^2} \left[ 2R(2l+3R) - \frac{l^2}{3} \right],$$

$M_0, t_0, \mu_{y0}, \xi_0, J_{33}^0, v_{y0}$  - характерные размерные величины. Коэффициенты, которые входят в уравнения (5), (6), представлены в диссертации в виде отдельных таблиц в "Приложении I".

Изложена общая схема решения указанных нелинейных задач, основанная на применении численного алгоритма типа Рунге-Кутты.

В четвертой главе приведены результаты исследований одномерных и пространственных нелинейных колебаний цилиндрического тела

при заданных конкретных значениях входных параметров, типа и величины внешнего гармонического возбуждения. Выполненных исследований о нелинейных колебательных режимах указанного тела переменной массы почти не имеется.

Для проверки достоверности выбранной модели и алгоритма решения решены, в первую очередь, тестовые задачи; исследованы одномерные (поступательные) нелинейные колебательные режимы для цилиндрического резервуара переменной массы при различных законах ее изменения, при наличии и отсутствии внешнего гармонического возбуждения. Преследовалась цель предварительно уяснить: какие колебательные процессы можно установить на основе предложенной математической модели, как система (тело) реагирует на наличие резонанса, как она переходит его, как по истечении жидкости она выходит на установившийся режим и др.

Получена достаточно обширная числовая и графическая информация, которая дает ответы на поставленные вопросы и тем самым подтверждает достоверность как выбранной модели исследования, так и полученных результатов.

Так, например, на рис. I представлены результаты для случая, когда тело совершает лишь вертикальные колебания, под действием гармонической силы. Предполагается, что жидкость вытекает через отверстие, расположенное в центре нижнего дна. При этом частота внешней гармонической силы выбиралась такой, чтобы она соответствовала частоте собственных колебаний тела, из которого за определенный промежуток времени истекло определенное количество жидкости. Из анализа изображенных на рис. I результатов решения задачи видим, что:

- на начальном этапе движения появляются колебания типа биений (на определенном интервале времени), затем система постепенно переходит на квазипериодические режимы колебаний, у которых с течением времени постепенно нарастают амплитуды (рис. I);
- при прохождении системы через резонанс амплитуды существенно увеличиваются по сравнению с максимальными значениями амплитуд биений на первоначальном этапе движения (приблизительно в 8-9 раз); так как жидкость является демпфером колебаний, то при прохождении через резонанс амплитуда имеет конечное значение (рис. I);
- предрезонансная и послерезонансная зоны являются почти симметричными относительно вертикальной оси, проходящей через максимальное значение амплитуды при резонансе; прохождение через рео-

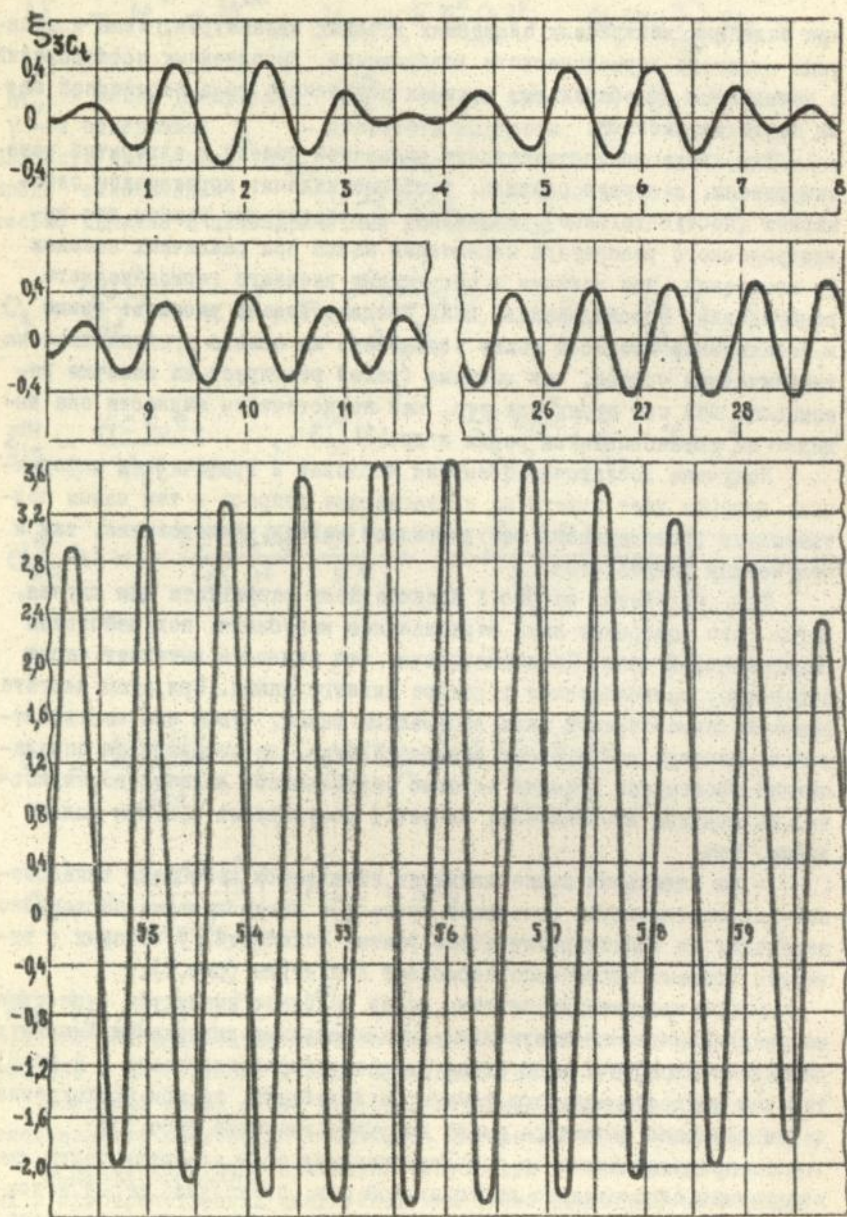


Рис. I

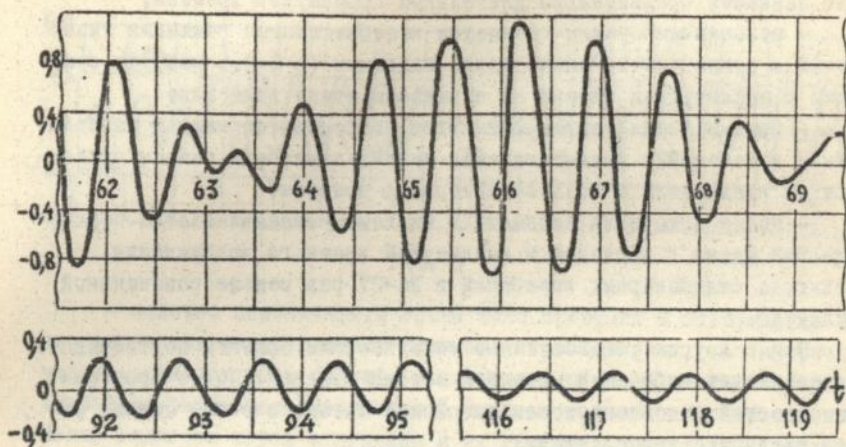


Рис. I (продолжение)

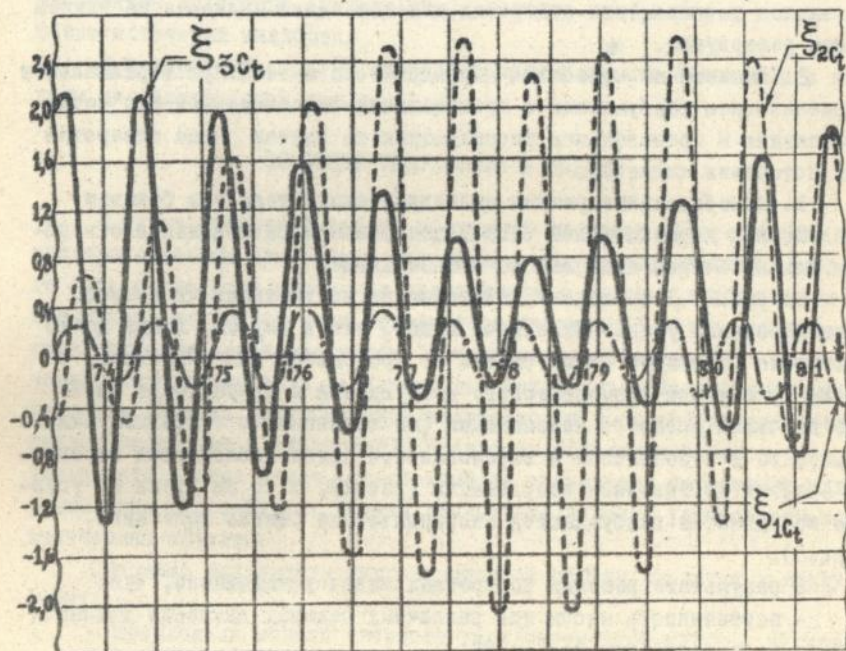


Рис. 2

напо занимает сравнительно длительный промежуток времени;

- резонансный режим сменяется колебательными режимами типа биений с амплитудами, значительно большими (в 2-2,5 раз) по сравнению с амплитудами биений на начальном этапе движения;

- режимы биений затем сменяются последовательностью гармонических колебаний с уменьшающимися амплитудами; эти режимы существуют на сравнительно большом интервале времени;

- после истечения жидкости в системе устанавливается периодический режим с частотой и амплитудой внешнего возбуждения.

Амплитуда стационарных колебаний в 26-27 раз меньше резонансной амплитуды.

Эти и другие установленные механические эффекты подтверждают достоверность выбранной модели и метода решения. После проверки возможностей и достоверности выбранной математической модели решены следующие новые задачи:

1. Нелинейное колебание тела при вертикальном гармоническом возбуждении с точкой приложения на продольной оси симметрии, произвольном расположении отверстия для истечения жидкости на нижнем днище резервуара.

2. Нелинейные колебания цилиндрического тела при вертикальном гармоническом возбуждении с произвольным расположением его точки приложения и произвольным расположением на нижнем днище отверстия для истечения жидкости.

3. Колебательные режимы цилиндрического тела при боковом воздействии гармонической силы и центральном расположении отверстия для истечения жидкости на нижнем днище.

На рис.2, 3 приведены некоторые из результатов численного интегрирования указанных задач. Видим, что в случае, когда центр отверстия на нижнем днище смещен от продольной оси симметрии, а точка приложения гармонического возбуждения и направление линии его действия остаются неизменными (по сравнению с тостовыми задачами), то в резонансной и зарезонансной зонах наблюдается перекачка энергии по линейным координатам (рис.2), в то же время по угловым координатам возбуждаются аperiodические режимы колебаний (рис.3).

В результате решения конкретных задач установлено, что:

- переменность массы при различных режимах движения является своего рода демпфером колебаний;

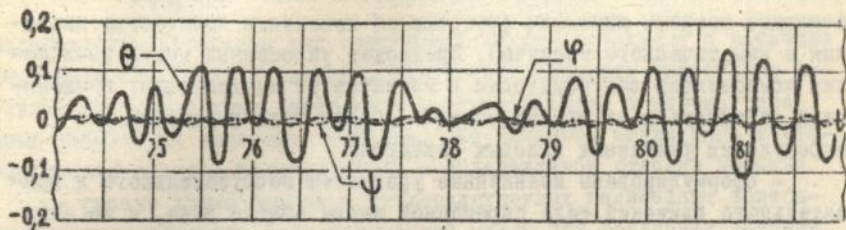


Рис. 3

- наличие переменности массы тела приводит к возбуждению типа нелинейных колебательных режимов: периодических, квазипериодических, режимов типа биений, резонансных режимов; интенсивность указанных режимов в значительной степени зависит от скорости истечения жидкости через отверстия и их месторасположения, а также от места приложения внешнего гармонического возбуждения.

Во всех рассмотренных частных случаях установлены стационарные режимы колебаний (равновесия), которые возбуждаются в теле после истечения жидкости.

В заключении кратко сформулированы основные положения и выводы диссертационной работы.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе поставлены и решены новые задачи о пространственных нелинейных колебаниях упруго подвешенного твердого тела переменной массы при периодических внешних возбуждениях. Предложена математическая модель тела переменной массы, включающая механизм изменения массы, вычисление соответствующих динамических характеристик и различных вариантов нелинейных уравнений движения (вплоть до кубической нелинейности соответствующих обобщенных координат и скоростей). Предложен эффективный метод решения указанного класса задач, основанный на применении численного алгоритма типа Рунге-Кутты; решены конкретные задачи, установлены механические эффекты.

Основные результаты диссертационной работы сводятся к следующему:

- предложена модель твердого тела переменной массы - несущее тело типа оболочки, наполненной жидкой или сыпучей средой, которая истекает через отверстия на поверхности оболочки. Применительно к этой модели сформулированы основные характеристики (количество

движения, момент количества движения), а также сформулированы основные теоремы динамики (теорема об изменении количества движения и кинетического момента). Предложен упрощенный метод вычисления компонентов сил упругости и моментов от их действия, позволяющий избавляться от иррациональных общего вида выражений для определения указанных силовых факторов;

- сформулированы нелинейные уравнения поступательного и вращательного движений тела переменной массы общего вида, и из них, как частный случай, получены уравнения движения с учетом кубической нелинейности относительно координат центра масс и углов Эйлера-Крылова. Составлены в явном виде выражения для вычисления коэффициентов этих уравнений, учитывающие различные параметры входных данных, принятый закон изменения массы, относительное перемещение центра масс тела, а также произвольный закон распределения отверстий для истечения жидкости на поверхности оболочки. При этом законе в явном виде представлены формулы для вычисления соответствующих реактивных сил;

- для решения конкретных задач рассмотрено тело переменной массы типа полностью заполненного в начальный момент времени цилиндрического резервуара; изменение массы тела происходит путем истечения жидкости через отверстие на нижнем днище или на боковой поверхности. Для этого тела сформулированы в размерной и безразмерной формах соответствующие нелинейные пространственные уравнения движения (с учетом кубической нелинейности), вытекающие как частный случай из указанных выше уравнений. Безразмерная форма уравнений позволяет оценивать порядок малости коэффициентов в уравнениях, особенно при нелинейных слагаемых, а также переносить полученную числовую информацию для широкого спектра значений размерных величин входных параметров. Вычислены в безразмерном виде значения коэффициентов этих уравнений;

- составлен в общем виде алгоритм решения уравнений движения, на основе которого можно исследовать периодические и нестационарные режимы колебаний цилиндрического тела переменной массы при различных типах внешних возбуждений, в том числе периодических;

- алгоритм решения апробирован предварительно при решении ряда тестовых сравнительно простых нелинейных задач движения цилиндрического тела переменной массы. Установлено, что разработанная математическая модель в состоянии описывать различного рода

колебательно процессы тел переменной массы, начальные и конечные состояния исследуемой системы. Полученная числовая информация согласуется с принятыми известными представлениями о рассматриваемых физических явлениях. Отметим, что решенные нелинейные тестовые задачи следует рассматривать в определенной степени новыми;

- решены новые задачи о пространственных нелинейных колебаниях цилиндрического тела переменной массы при различных законах изменения массы, для различных вариантов расположения отверстия, через которое происходит истечение жидкости, и различных вариантов приложения внешнего гармонического возбуждения.

Основное содержание и научные результаты диссертации отражены в следующих публикациях:

1. Каюк Я.Ф., Тилавов А., Ахмедов А. Колебания твердого тела переменной массы на упругих амортизаторах //Вибрация и вибродиагностика. Проблемы стандартизации. Тезисы докладов III Всесоюз. научно-техн. конф., Нижний Новгород, 17-19 сентября 1991. - Нижний Новгород, 1991. - С. 110.
2. Ахмедов А. Уравнения движения твердого тела переменной массы на амортизаторах с учетом кубической нелинейности относительно искомым величин //Труды ХУТ научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР, Киев, 21-24 мая, 1991. Ч.2. С. 208-214. Деп. в ВИНТИ 12.11.91, № 4260-В91.
3. Тилавов А., Ахмедов А. Основные соотношения динамики твердого тела переменной массы на упругом подвесе //Самаркандс.ун-т. - Самарканд, 1992. - 14 с. Деп. В УзНИНТИ 18.05.92, № 1649-Уз92.
4. Ахмедов А. Колебания цилиндрического тела переменной массы при гармоническом воздействии //Труды ХУП научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины, Киев, 19-22 мая. Ч.2. Ин-т механики АН Украины. - Киев, 1992. - С. 8-13. - Деп. в УкрИНТЭИ 07.07.92, № 1022-Укр92.
5. Каюк Я.Ф., Ахмедов А. Пространственные движения цилиндрического тела переменной массы на упругом подвесе //Прикл.механика. - 1992. - 28, № 7. - С. 62-69.
6. Каюк Я.Ф., Тилавов А., Ахмедов А. Анализ колебательных движений твердого тела переменной массы //Прикл.механика. - 1992. - 28, № 8. - С. 71-77.

*Ахмедов А.*

AB 26461  
**AB 26.461**

Подписано к печати 18.01.1993г.      Формат 60x84/16  
Бумага офсетная Усл.-печ.лист, 1,0. Уч.-изд.лист 1,0.  
Тираж 100. Заказ 35.      Бесплатно

---

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,  
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.