АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

ЧУДИНОВИЧ Игорь Юрьевич

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СРЕД

01.01.03 - математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков - 1993

Работа выполнена на кафедре математической физики и вычислительной математики Харьковского государственного университета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук М.В.Паукшто

доктор физико-математических наук, профессор Я.А.Ройтберг

член-корреспондент АН Украины, доктор физико-математических наук, профессор Е.Я.Хруслов

Ведущая организация – Ростовский-на-Дону государственный университет

Защита диссертации состоится "8" февраля 1993 года в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.27.02 при Физико-техническом институте низких температур АН Украины /310164, Харьков, пр.Ленина, 47/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физико-технического института низких температур АН Украины.

Автореферат разослан "30" декабря 1992 года.

Ученый секретарь совета,
доктор физико-математических наук,
профессор В.А.Ткаченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Роль методов теории потенциалов в теоретических исследованиях и численном решении краевых задач для уравнений и систем эллиптического типа хорошо известна. Их становление связано с именами К.Неймана, А.Пуанкаре, О.Гельдера, А.М.Ляпунова, В.А.Стеклова, Э.Фредгольма и многих других. Основной идеей этих методов является представление решений дифференциальных уравнений и систем уравнений в виде специальных интегралов, содержащих неизвестные функции - плотности потенциалов, позволяющее свести краевую задачу к решению интегральных /псевдодифференциальных/ уравнений относительно этих плотностей на граничной поверхности. В настоящее время построение теории потенциалов для общих эллиптических краевых задач можно считать практически завершенным /см. работы Ю.П.Красовского, опубликованные в конце 60-х годов/. Почти столь же хорошо методы теории потенциалов развиты в параболических начально краевых задачах. Совсем иное положение с граничными уравнениями сложилось в гиперболическом случае.

Начиная с конца 60-х - начала 70-х годов, в связи с бурным развитием метода граничных элементов стремительно растет количество работ, посвященных численному решению начально краевых задач для различных уравнений и систем гиперболического типа с помощью запаздывающих потенциалов. Общим для этих работ являлось не только отсутствие обоснований сходимости приближенных решений, возникающих при таком подходе граничных уравнений, к точным. Без ответа вплоть до последнего времени оставались основные вопросы теории - вопросы разрешимости этих уравнений и гладкости их решений. Между тем граничные уравнения в гиперболическом случае целым рядом свойств существенно отличаются от аналогичных уравнений в эллиптическом и параболическом случаях, причем эти свойства существенно влияют на сходимость и устойчивость алгоритмов их численного решения. Имевшиеся несколько строгих математических работ, посвященных граничным свойствам скалярных запаздывающих потенциалов /С.Г.Михлин, В.Д.Сапожникова, 1976 г./ и разрешимости двух граничных уравнений, возникающих при решении с помощью этих потенциалов двух основных начально краевых задач для трехмерного волнового уравнения /А.Бамбергер, Ха Дуонг, 1986 г./, являясь пионерскими в построении теории граничных уравнений в гиперболическом случае, давали ответы лишь на первоначальные вопросы этой теории. Особо отметим вклад в исследование вопросов разрешимости задач динамики упругих сред, сделанный математиками Грузии /В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе, Р.В.Дудучава и др./. В диссертации проанализированы различия между подходом, традиционным для математиков грузинской школы, также использующим методы теории потенциалов, и подходом к решению этих задач, использованным автором. Суммируя сказанное, отметим, что отсутствие последовательной и достаточно полной теории запаздывающих потенциалов в гиперболическом случае к концу 80-х годов начало сдерживать развитие численных методов решения соответствующих начально краевых задач, входя в противоречие со все возрастающими потребностями исследования многих физических процессов.

Цель работы состоит в изучении свойств псевдодифференциальных граничных операторов, порожденных запаздывающими потенциалами, в шкалах пространств типа соболевских; исследовании на основе этих свойств вопросов разрешимости граничных уравнений /ГУ/ в начально краевых задачах для систем гиперболического типа, гладкости их решений, связи между решениями ГУ и исходных начально краевых задач; построении методов приближенного решения ГУ вместе с оценками погрешностей, возникающих при замене точных решений приближенными. В качестве модели, на которой демонстрируются развитые методы и полученные результаты, выбрана динамическая теория упругости.

Метод исследований. Для получения результатов в работе использованы методы функционального анализа и вариационные методы математической физики.

Научная новизна. Полученные в работе результаты являются новыми - автору неизвестны строгие математические работы других авторов, посвященные вопросам разрешимости рассмотренных ниже ГУ в задачах динамики упругих сред. Работы же прикладного характера, в которых численно решаются практически важные задачи /например, задача о распространении упругих волн при землетрясении/ обладают недостатками, указанными выше.

Теоретическая и практическая ценность работы. Теоретическая ценность работы состоит в изучении свойств основных граничных операторов теории упругости в шкалах соболевских пространств, что позволило дать ответы на вопросы об однозначной разрешимости ГУ для широкого класса начально краевых задач теории упругости и о гладкости их решений. Отметим также, что многие из развитых в работе методов, по-видимому, могут быть перенесены на другие классы задач математической физики - задачи колебаний тонких упругих пластин, задачи термо- и вязкоупругости /для сред с "памятью"/, а также на начально краевые задачи электродинамики для системы уравнений Максвелла.

Практическая ценность работы состоит в построении методов приближенного решения ГУ в задачах динамической теории упругости. Отметим, в частности, результаты, собранные в последней главе работы. В них указаны минимальные порядки пространств граничных элементов по пространственным переменным и сплайнов по временной переменной, достаточные для сходимости алгоритмов приближенного решения ГУ. Все это дает возможность использования результатов работы при численном решении задач динамики упругих сред.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации.

I. Теоремы о свойствах в шкалах соболевских пространств псевдодифференциальных операторов, возникающих при решении с помощью упругих запаздывающих потенциалов следующих задач динамической теории упругости.

а/ Четырех основных начально краевых задач,

б/ начально краевой задачи с граничным условием смешанного типа,

в/ задачи трансмиссии /динамической контактной задачи/,

г/ задач нестационарной дифракции упругих волн на незамкнутой поверхности /многообразии с краем/, моделирующей пространственную трещину или разного рода включение в упругой среде.

2. Теоремы об однозначной разрешимости и о гладкости решений нестационарных ГУ в перечисленных выше задачах.

3. Исследование разрешимости и гладкости решений ГУ, полученных в рамках, так называемого, "прямого" варианта.

4. Построение методов приближенного решения нестационарных ГУ в перечисленных выше задачах. Обоснование их сходимости в соболевских пространствах вместе с оценками погрешностей.

5. Конкретизация оценок погрешностей в наиболее распространенном при численном решении ГУ случае выбора аппроксимирующих подпространств.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах Харьковского, Санкт-Петербургского, Ростовского университетов, Черниговского педагогического института, Института математики АН Украины /Киев/, Института проблем механики Российской

АН /Москва/, а также на заседаниях республиканского семинара "Эффективные методы решения краевых задач математической физики" /Харьков/. Отдельные результаты докладывались на УII-й Всесоюзной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" /Черноголовка, 1989/, Всесоюзном совещании "Метод граничных интегральных уравнений: задачи, алгоритмы, численная реализация" /Пущино-на-Оке, 1988/, Региональной конференции "Динамические задачи механики сплошной среды" /Геленджик, 1988/, IУ-м /Харьков, 1989/ и У-м /Одесса, 1991/ Всесоюзных симпозиумах "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики", Республиканской конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" /Харьков, 1989/, Х-м Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн /Винница, 1990/, Всесоюзной школе по современным методам вычислительной математики /Харьков, 1990/, Международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции" /Самара, 1992/, Международной конференции, посвященной памяти академика М.Ф.Кравчука /Киев, 1992/.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 24 работах. Список основных публикаций автора приведен в конце автореферата.

Объем работы. Диссертация изложена на 268 страницах и состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы, заключения и списка цитированной литературы /205 наименований/.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор методов решения задач статики и динамики упругих сред и полученных этими методами результатов. Заметим, что к настоящему моменту сформировались два основных подхода к изучению граничных уравнений. Первый, традиционный, состоит в исследовании ядер граничных операторов, участвующих в соответствующих ГУ, с последующим применением альтернативы Фредгольма при исследовании их разрешимости. Этот подход, позволивший провести полное исследование ГУ в задачах статики упругих сред, а также в задачах их установившихся колебаний /С.Г.Михлин, В.Д.Купрадзе, А.М.Кусков и др./, оказывается неприменимым в существенно нестационарных задачах. Причиной этому является то, что основные граничные операторы, введенные ниже, перестают быть нормально разрешимыми - области их значений не замкнуты в соответствующих пространствах. На языке псевдодифференциальных операторов это связано с вырождением их символов на многообразиях меньшей размерности.

Для того, чтобы сделать более ясным смысл ряда приведенных ниже теорем, опишем типичную ситуацию, возникающую в гиперболическом случае. Пусть $\mathcal{L}$ - один из граничных операторов, порожденных упругими запаздывающими потенциалами. Во всех случаях удается доказать непрерывность и инъективность отображения $\mathcal{L}: E_1 \mapsto F_1$, где E_1 и F_1 - некоторые гильбертовы пространства. Область значений $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ лишь плотна в пространстве F_1 , не совпадая с ним, обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}: R(\mathcal{L}) \subset F_1 \mapsto E_1$ неограничен. Однако, оператор $\mathcal{L}^{-1}$, отображающий $R(\mathcal{L}) \subset F_1$ в более широкое пространство $E_2 \supset E_1$ с более слабой, чем в пространстве E_1 , топологией, оказывается ограниченным. Следовательно, $\mathcal{L}^{-1}$ по непрерывности продолжается до оператора $\mathcal{L}^{-1}: F_1 \mapsto R(\mathcal{L}^{-1}) \subset E_2$, причем его область значений снова лишь плотна в E_2 . В свою очередь, обратный к нему оператор $\mathcal{L}$ можно по непрерывности продолжить на E_2 до оператора $\mathcal{L}: E_2 \mapsto F_2 \supset F_1$ и т.д. Отсюда следует целесообразность изучения свойств операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ в шкалах пространств. Проблемой при этом является как можно более точный выбор пространств E_2 , F_2 и т.д., обладающих как можно более сильной топологией. Применительно к ГУ это означает получение неулучшаемых результатов о гладкости их решений. Отметим также, что свойства граничных операторов в шкалах пространств оказываются весьма полезными при построении методов приближенного решения соответствующих ГУ /глава 6/.

Второй подход к изучению ГУ использует тесную связь между ними и исходными начально краевыми задачами. Такой подход, в частности, использовали Ж.-Л.Лионс, а также В.Г.Мазья в недавнем цикле работ, посвященных разрешимости ГУ в задачах статики упругих сред в областях с кусочно-гладкой границей. Именно этот подход использован в диссертации.

Используя стандартные методы, несложно доказать существование обобщенных решений начально краевых задач теории упругости в пространствах вектор-функций, обладающих "конечной энергией". Однако этого оказывается недостаточным для исследования свойств граничных операторов в шкалах соболевских пространств вектор-функций на граничной поверхности. Одним из его центральных моментов является использование оценок соболевских норм решений начально краевых задач в пространствах с высшими номерами /в шкале пространств/. Трудность здесь состоит в следующем. Нужные оценки естественно искать в работах, посвященных разрешимости общих начально краевых задач гиперболического типа. Однако результаты большинства этих работ /Л.Р.Волевич, С.Г.Гиндикин, Я.А.Ройтберг и многие другие/относятся лишь к, так называемым, строго гиперболическим по И.Г.Петровскому /или Лере-Волевичу/ уравнениям и системам. Система же уравнений динамической теории упругости является нестрого гиперболической /в терминологии В.Д.Купрадзе - вырожденной гиперболической/. В связи с этим автору пришлось получить требуемые оценки - соответствующие результаты собраны в главе 3 диссертации. Метод их получения основан на переходе к преобразованиям Лапласа по временной переменной и изучении возникающей при этом эллиптической системы с параметром. Изучение этой системы при каждом фиксированном значении параметра преобразования Лапласа ρ тривиально, сложности возникают при попытке проследить зависимость констант, входящих в оценки решений соответствующих краевых задач, от параметра ρ. Аналогичные задачи рассматривались ранее рядом авторов /М.С.Агранович, М.И.Вишик, Я.А.Ройтберг и др./, однако возникающая в теории упругости система "нерегулярно" зависит от параметра ρ, что не позволяет использовать полученные ранее результаты. В работе предложен метод получения оценок решений краевых задач для системы теории упругости с параметром, который, с одной стороны, существенно использует специфику этой системы, а, с другой стороны, по-видимому, может быть распространен на системы более сложной структуры.

Перейдем к изложению результатов, полученных в диссертации.

Первая ее глава насит вспомогательный характер. в §I.I вводятся нужные обозначения. Пусть S - гладкая класса C^∞ замкнутая гиперповерхность /многообразие без края/, разделяющая $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$ /в реальных задачах $d=2,3$ / на области Ω^+ /внутреннюю/ и Ω^- /внешнюю/. В областях $G^+=\Omega^+\times\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$ или $G^-=\Omega^-\times\mathbb{R}_+$ ищем вектор-функцию $u(X)=(u_1(X),\dots,u_d(X))$, $X=(x,t)$ /в теории упругости - смещение точки x в момент времени t /, являющуюся решением начально краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(\partial_t^\ell u)(X) + (\mathcal{A}u)(X) = 0, \quad X \in G^\pm, & (\mathrm{I}) \\ u(x,+0) = (\partial_t u)(x,+0) = 0, \quad x \in \Omega^\pm, & (2) \\ \text{граничное условие.} \end{cases}$$

В (I), (2) $\partial_t = \partial/\partial t$, ρ - постоянная /плотность среды/, которая далее полагается равной единице, $\mathcal{A}$ - матричный дифференциальный оператор анизотропной теории упругости

$$(\mathcal{A}u)_i(X) = -\sum_{j=1}^d \partial_j \sigma_{ij}(u), \quad i=1,\dots,d,$$

$\sigma(u) = \{\sigma_{ij}(u)\}_{i,j=1}^d$ - тензор напряжений, связанный с тензором деформаций среды $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\}_{i,j=1}^d$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ з коном Гука

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,h=1}^d a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u),$$

a_{ijkh}, $i,j,k,h = 1,\dots,d$ - компоненты тензора упругих коэффициентов среды, удовлетворяющего условиям симметричности и эллиптичности. Заметим, что однородность уравнения (I) и условий (2) не существенно ограничивает общность задачи, поскольку имеющиеся неоднородности можно с помощью хорошо известной процедуры перенести в краевые условия, к формулировке которых мы переходим.

В задачах $\mathfrak{M}_1^\pm$ /первой основной внутренней или внешней/ граничное условие имеет вид $u^\pm(X) = f(X)$, $X \in \Sigma^+ = S \times \mathbb{R}_+$. Здесь и далее верхние индексы "$\pm$" над вектор-функциями обозначают их предельные значения при $X \to \Sigma^+$ из G^+ или G^- соответственно. Во второй основной задаче $\mathfrak{M}_2^\pm$ задан вектор $(T_\nu u)^\pm(X) = g(X)$, $X \in \Sigma^+$, где $\nu(x)$ - орт нормали к S, внешней относительно Ω^+, $T_\nu u$ - операция нормальных граничных напряжений, определенная формулой

$$(T_\nu u)_i(X) = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(u)\nu_j(x), \quad i=1,\dots,d$$

Мы не приводим здесь постановки третьей $\mathfrak{M}_3^\pm$ и четвертой $\mathfrak{M}_4^\pm$ основных начально краевых задач, основной задачи с краевым условием смешанного типа $\mathfrak{mix}^\pm$, задачи трансмиссии $\mathfrak{tr}$ и двух задач нестационарной дифракции упругих волн на многообразиях с краем

dif_1 и dif_2 - они будут даны при описании соответствующих разделов работы. Заметим, что в §I.I даны математически "наивные" постановки - корректные же постановки начально краевых задач приводятся в §I.5 после введения необходимых функциональных пространств.

В §I.2 вводятся упругие запаздывающие потенциалы и излагаются известные сведения об их поведении при переходе точки X через гиперповерхность $\Sigma = S \times R$. Упругие запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев с d -компонентными плотностями α, β, заданными на Σ, вводятся формулами

$$V(X) = \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^{d} (\Phi_j(X-Y), \alpha(Y)) e_j \, ds_Y , \tag{3}$$

$$W(X) = \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^{d} ((T_{\nu(y)} \Phi_j)(X-Y), \beta(Y)) e_j \, ds_Y \tag{4}$$

соответственно. Поясним использованные в (3), (4) обозначения. Через $\Phi_j(X)$, $j=1, \dots, d$ обозначены столбцы фундаментального решения $\Phi(X)$ уравнения (I), представляющего собой $d \times d$ -матрицу /тензор/, удовлетворяющую условию причинности: $\Phi(X)=0$ при $t<0$, $(a,b)=\sum_{i=1}^{d} a_i b_i$, e_j, $j=1, \dots, d$ - орты декартовой системы координат, $T_{\nu(y)}$ - операция нормальных граничных напряжений, действующая по переменной y. Очевидно, оба потенциала при финитных плотностях α, $\beta \in [C^\infty(\Sigma)]^d$, равных нулю при $t<0$, удовлетворяют (I) и условиям (2). Формулы скачков потенциалов (3), (4) аналогичны формулам скачков соответствующих статических потенциалов:

$$\begin{aligned} &V^+(X) = V^-(X), && (T_\nu V)^+(X) - (T_\nu V)^-(X) = \alpha(X), \\ &W^+(X) - W^-(X) = -\beta(X), && (T_\nu W)^+(X) = (T_\nu W)^-(X), \end{aligned} \quad X \in \Sigma$$

Основные граничные операторы, действующие в функциональных пространствах на Σ^+, вводятся формулами:

$$\begin{aligned} &V\alpha = V^\pm(X), && W^\pm \beta = W^\pm(X), \\ &K^\pm \alpha = (T_\nu V)^\pm(X), && F\beta = (T_\nu W)^\pm(X), \end{aligned} \quad X \in \Sigma.$$

Изучение свойств операторов V, $W^\pm$, $K^\pm$, F, проведенное во второй и третьей главах работы, является одним из ее центральных моментов. При этом удобно перейти к преобразованиям Лапласа по переменной t :

$$U(p) = u(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\exp(-pt)\,dt \tag{5}$$

Как видно из (5) , для оригиналов и изображений сохранено одно и то же обозначение u . После перехода к преобразованиям Лапласа уравнение (I) принимает вид

$$(p^2 + A)u(x,p) = 0\ , \quad x \in \Omega^{\pm}\ , \tag{6}$$

потенциалы (3) , (4) обозначаются через $V_p(x)$, $W_p(x)$, основные граничные операторы - через V_p , $W_p^{\pm}$, $K_p^{\pm}$, F_p .

В §I.3 поставленные ранее начально краевые задачи с помощью представлений их решений в виде различных комбинаций упругих запаздывающих потенциалов сводятся к системам ГУ на гиперповерхности Σ^+. Так, например, представляя решения задач $m_1^{\pm}$ потенциалом простого слоя

$$u(X) = V(X)\ , \quad X \in G^{\pm} \tag{7}$$

после предельного перехода $X \to \Sigma^+$ из $G^{\pm}$ приходим к ГУ

$$m_{1,V} \qquad V\alpha = f \tag{8}$$

Представляя решения этих же задач потенциалом двойного слоя

$$u(X) = W(X)\ , \quad X \in G^{\pm}\ , \tag{9}$$

приходим к ГУ

$$m_{1,W}^{\pm} \qquad W^{\pm}\beta = f \tag{10}$$

Представление (7) решений задач $m_2^{\pm}$ приводит к ГУ

$$m_{2,V}^{\pm} \qquad K^{\pm}\alpha = g\ , \tag{11}$$

представление (9) для решений тех же задач дает ГУ

$$m_{2,W} \qquad F\beta = g \tag{12}$$

Отметим, что ГУ (10), (11) содержат внеинтегральные члены $\mp\frac{1}{2}\beta$, $\pm\frac{1}{2}\alpha$ соответственно. Входящие же в них интегральные члены представлены сингулярными интегралами с запаздывающим аргументом у подинтегральных функций. Левые части в (8), (12) являются соответственно слабосингулярными и гиперсингулярными интегралами с запаздывающими аргументами подинтегральных функций.

Ограничимся пока этими ГУ. Другие ГУ, возникающие при решении задач $m_3^{\pm}$, $m_4^{\pm}$, $mix^{\pm}$, tr, dif_1, dif_2, будут приведены при описании соответствующих разделов работы.

В §1.4 вводятся функциональные пространства, в которых действуют граничные операторы, определенные в §1.2. Пусть $æ > 0$. Введем при всех $m, k \in \mathbb{R}$ пространства $H_{2;m,k,æ}(\Sigma^+)$, состоящие из обобщенных d-компонентных вектор-функций $u(X)$, заданных на Σ, равных нулю при $t < 0$, таких, что $\exp(-æt)(\partial_t^k u)(X) \in [W_m^2(\Sigma)]^d$, где ∂_t^k - оператор дробного дифференцирования, $W_m^2(\Sigma)$ - стандартное пространство С.Л.Соболева с номером m. Аналогично вводятся пространства $H_{2;m,k,æ}(G^{\pm})$. Через $\gamma^{\pm}$ обозначим операторы следов, непрерывно при $m > 1/2$ отображающие пространства $H_{2;m,k,æ}(G^{\pm})$ на $H_{2;m-1/2,k,æ}(\Sigma^+)$.

Как уже было сказано, в §1.5 даны корректные обобщенные постановки начально краевых задач из §1.1. Ограничимся здесь постановками задач $m_1^{\pm}$. Предположив, что заданная вектор-функция $f \in H_{2;1/2,0,æ}(\Sigma^+)$, назовем решением задач $m_1^{\pm}$ элемент $u \in H_{2;1,0,æ}(G^{\pm})$, такой, что $\gamma^{\pm}u = f$, удовлетворяющий уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma_{ij}(u), \varepsilon_{ij}(\eta))_{G^{\pm}} - \sum_{i=1}^{d} (\partial_t u_i, \partial_t \eta_i)_{G^{\pm}} = 0,$$

где $(\cdot,\cdot)_{G^{\pm}}$ - скалярное произведение в $L^2(G^{\pm})$, для любой финитной вектор-функции $\eta \in [C^{\infty}(\overline{G^{\pm}})]^d$, равной нулю на Σ^+. Объем автореферата не позволяет привести здесь аналогичные постановки остальных начально краевых задач.

Вторая глава посвящена изучению свойств основных граничных операторов, позволяющих ответить на вопрос о разрешимости ГУ в двух первых основных начально краевых задачах теории упругости. Результаты главы 2 справедливы для кусочно-гладких поверхностей S класса $C^{0,1}$, состоящих из гладких "кусков" класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$. В случае же гладких S эти результаты могут быть обобщены и усилены, что и сделано в главе 3. Объектом исследования являются операторы V_ρ, $W_\rho^{\pm}$, $K_\rho^{\pm}$, F_ρ, действующие в пространствах С.Л.Соболева d-компонентных вектор-функций $U(\rho)=u(x,\rho)$ $H_{m,\rho}(S)$ с параметром ρ, меняющимся в $\mathbb{C}_{æ}=\{\rho\in\mathbb{C}: Re\rho>æ\}$. В случае $S=\mathbb{R}^{d-1}$ нормы в этих пространствах вводятся формулой

$$\|u\|^2_{m,\rho;S}=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(1+|\xi|+|\rho|\right)^{2m}|\tilde{u}(\xi,\rho)|^2 d\xi, \qquad (13)$$

где $\tilde{u}(\xi,\rho)$ – преобразование Фурье элемента $u(x,\rho)$ по переменной $x\in\mathbb{R}^{d-1}$. В случае произвольной S нормы пространств $H_{m,\rho}(S)$ определяются с помощью стандартной процедуры локализации. Аналогично определяются пространства $H_{m,\rho}(\Omega^{\pm})$. Заметим, что при всяком фиксированном $\rho\in\mathbb{C}_0$ пространство $H_{m,\rho}(S)$ и пространство С.Л.Соболева $[W_m^2(S)]^d$ совпадают как множества, их нормы эквивалентны. Используя это обстоятельство, несложно сделать вывод о том, что основные граничные операторы при каждом фиксированном $\rho\in\mathbb{C}_0$ обладают теми же свойствами, что и аналогичные операторы в статическом случае. Например, оператор V_ρ осуществляет изоморфизм пространств $H_{-1/2,\rho}(S)$ и $H_{1/2,\rho}(S)$. Нетривиальным же здесь является исследование зависимости операторов V_ρ, $W_\rho^{\pm}$, $K_\rho^{\pm}$, F_ρ от параметра ρ.

В §2.I вводится один из основных объектов теории нестационарных ГУ – операторы нормальных граничных напряжений $\mathcal{N}^{\pm}$. Приведем их определение. Пусть $f\in H_{1/2,\rho}(S)$, $u\in H_{1,\rho}(\Omega^{\pm})$ – /обобщенное/ решение уравнения (6) в соответствующих областях $\Omega^{\pm}$ со следом на S, равным f. Пусть z – произвольный элемент пространства $H_{1/2,\rho}(S)$, $v\in H_{1,\rho}(\Omega^{\pm})$ – его произвольное продолжение в $\Omega^{\pm}$. Определим при всех $\rho\in\mathbb{C}_0$ операторы $\mathcal{N}_\rho^{\pm}$ равенствами

$$\pm\langle\mathcal{N}_\rho^{\pm}f,z\rangle_{0,S}=\rho^2\sum_{i=1}^{d}(u_i,v_i)_{0,\Omega^{\pm}}+\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma_{ij}(u),\varepsilon_{ij}(v))_{0,\Omega^{\pm}}, \qquad (14)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,S}$ – скалярное произведение в $[L^2(S)]^d$, $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega^{\pm}}$ – в $L^2(\Omega^{\pm})$. Операторы $\mathcal{N}^{\pm}$ определяются с помощью оператора преобразования Лапласа L равенствами $\mathcal{N}^{\pm}=L^{-1}\mathcal{N}_\rho^{\pm}L$. Механический смысл операторов $\mathcal{N}^{\pm}$ состоит в следующем. Эти операторы сопоставляют смещениям граничных точек среды вызываемые ими при отсутствии объемных сил нормальные граничные напряжения. Формула (14) определяет $\mathcal{N}_\rho^{\pm}$ как операторы, отображающие $H_{1/2,\rho}(S)$ в $H_{-1/2,\rho}(S)$. В §2.I доказано, что эти отображения биективны, более того, для любого элемента $f\in H_{1/2,\rho}(S)$

при всех $p \in \bar{\mathbb{C}}_{\ae}, \ae > 0$ справедливы оценки:

$$\|\mathcal{N}_p^{\pm} f\|_{-1/2,p;S} \leq c|p|\,\|f\|_{1/2,p;S}, \tag{I5}$$

$$\|f\|_{1/2,p;S} \leq c|p|\,\|\mathcal{N}_p^{\pm} f\|_{-1/2,p;S}$$

с постоянной c, не зависящей от $p \in \bar{\mathbb{C}}_{\ae}$. Заметим, что именно оценка (I5) в случае гладких S может быть усилена /глава 3/. Установив голоморфность отображений $\mathcal{N}_p^{\pm} f : p \in \mathbb{C}_{\ae} \mapsto [W^2_{-1/2}(S)]^d$, $(\mathcal{N}_p^{\pm})^{-1} g : p \in \mathbb{C}_{\ae} \mapsto [W^2_{1/2}(S)]^d$ при условии голоморфности отображений $f(x,p): p \in \mathbb{C}_{\ae} \mapsto [W^2_{1/2}(S)]^d$, $g(x,p): p \in \mathbb{C}_{\ae} \mapsto [W^2_{-1/2}(S)]^d$, и заметив, что норма элемента $u(X) \in H_{2;m,\kappa,\ae}(\Sigma^+)$ может быть представлена в виде

$$\|u\|^2_{m,\kappa,\ae;\Sigma^+} = \int_{\mathbb{R}} (1+|p|)^{2\kappa} \|U(p)\|^2_{m,p;S}\, d\tau, \qquad p = \ae + i\tau,$$

где $U(p) = u(x,p)$, получаем основное утверждение §2.I.

Теорема 2.I. Операторы $\mathcal{N}^{\pm}$ осуществляют непрерывные инъективные отображения

$$\mathcal{N}^{\pm} : H_{2;1/2,\kappa,\ae}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;-1/2,\kappa-1,\ae}(\Sigma^+)$$

при всех $\kappa \in \mathbb{R}$, $\ae > 0$; области их значений плотны в соответствующих пространствах.

Обратные операторы, продолженные с плотных множеств на эти пространства, осуществляют отображения

$$(\mathcal{N}^{\pm})^{-1} : H_{2;-1/2,\kappa,\ae}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;1/2,\kappa-1,\ae}(\Sigma^+),$$

непрерывные при тех же κ, $\ae$.

Отметим, что важность исследования свойств операторов $\mathcal{N}^{\pm}$ связана с тем, что основные граничные операторы V, $W^{\pm}$, $K^{\pm}$, F являются элементами алгебры, натянутой на образующие $\mathcal{N}^{\pm}$. На это обстоятельство в статическом случае обратил внимание В.А.Щербина, использовав его при решении задачи Неймана с помощью потенциала двойного слоя.

В §2.2 изучаются свойства оператора потенциала простого слоя V. Заметим, что в силу формул скачков $V = (\mathcal{N}^+ - \mathcal{N}^-)^{-1}$. Основные результаты представлены в теореме 2.2, в которой доказана непрерывность операторов V, V^{-1} и плотность областей их значений в следующих парах пространств:

$$V: H_{2;-1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;1/2,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$V^{-1}: H_{2;1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;-1/2,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \quad k\in\mathbb{R},\ \varkappa>0$$

Сочетание этого утверждения и утверждения теоремы 2.I приводит к непрерывности при всех $k\in\mathbb{R}$, $\varkappa>0$ операторов $K^{\pm}=N^{\pm}V$ и обратных к ним $(K^{\pm})^{-1}$, отображающих $H_{2;-1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ в $H_{2;-1/2,k-2,\varkappa}(\Sigma^+)$.

§2.3 посвящен изучению свойств операторов предельных значений потенциала двойного слоя $W^{\pm}$. Заметив, что $W^{\pm}=VN^{\mp}$, получаем непрерывность при всех $k\in\mathbb{R}$, $\varkappa>0$ операторов $W^{\pm}$, отображающих $H_{2;1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ в $H_{2;1/2,k-2,\varkappa}(\Sigma^+)$. Наконец, прямым следствием предыдущих результатов является утверждение о непрерывности оператора $F=N^+W^+=N^-W^-$ и обратного к нему. Однако эти результаты могут быть усилены. Справедливо утверждение /теорема 2.5/ о непрерывности при всех $k\in\mathbb{R}$, $\varkappa>0$ операторов

$$F: H_{2;1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;-1/2,k-3,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$F^{-1}: H_{2;-1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;1/2,k-1,\varkappa}(\Sigma^+).$$

Полученные результаты дают ответ на вопрос о разрешимости нестационарных ГУ (8), (I0) - (I2) в первых двух основных начально краевых задачах. При этом следует лишь воспользоваться свойствами разрешающих операторов V^{-1}, $(W^{\pm})^{-1}$, $(K^{\pm})^{-1}$, F^{-1} этих ГУ, приведенными выше.

Решив ГУ (8), (I0) - (I2), построим соответствующие потенциалы простого или двойного слоев с найденными плотностями. Дают ли эти потенциалы решения соответствующих начально краевых задач $m_1^{\pm}$ или $m_2^{\pm}$? Другими словами, обладают ли эти потенциалы "конечной энергией" в $G^{\pm}$? Утверждения теоремы 2.7 дают положительный ответ на этот вопрос при выполнении условий $f\in H_{2;1/2,1,\varkappa}(\Sigma^+)$, $g\in H_{2;-1/2,1,\varkappa}(\Sigma^+)$.

Последний раздел главы 2 посвящен разрешимости нестационарных ГУ в рамках, так называемого, "прямого" варианта. В отличие от уравнений (8), (I0) - (I2), полученных методами потенциалов, искомые величины в прямом варианте имеют непосредственный механический смысл - это смещения или нормальные граничные напряжения на S. Сами уравнения выводятся с помощью формулы Сомильяны - упругого аналога 3-й формулы Грина. В наших обозначениях эти уравнения в задачах $m_1^{\pm}$ имеют вид:

$$m^{\pm}_{1,V;z} \qquad V\alpha = W^{\mp} f, \tag{I6}$$

$$m^{\pm}_{1,K;z} \qquad K^{\mp}\alpha = F f \tag{I7}$$

Решив уравнения (I6) или (I7), строим вектор-функцию

$$u(X) = \begin{cases} V(X) - W(X), & X \in G^{+}, \\ W(X) - V(X), & X \in G^{-}, \end{cases} \tag{I8}$$

в которой $V(X)$ - потенциал с найденной плотностью α, $W(X)$ - потенциал с плотностью f, дающую решения задач $m_1^{\pm}$. В случае задач $m_2^{\pm}$ ГУ имеют вид

$$m^{\pm}_{2,W;z} \qquad W^{\mp}\beta = Vg, \tag{I9}$$

$$m^{\pm}_{2,F;z} \qquad F\beta = K^{\mp} g \tag{20}$$

При этом решением задач $m_2^{\pm}$ является вектор-функция $u(X)$, определенная формулой (I8), в которой теперь $V(X)$ - потенциал с заданной плотностью g, $W(X)$ - потенциал с найденной плотностью β. Заметив, что разрешающими для уравнений (I6), (I7) являются операторы $V^{-1}W^{\mp} = (K^{\mp})^{-1}F = N^{\pm}$, для уравнений (I9), (20) - операторы $(W^{\mp})^{-1}V = F^{-1}K^{\mp} = (N^{\pm})^{-1}$, видим, что разрешимость ГУ (I6), (I7), (I9), (20) является следствием полученных ранее результатов. При $f \in H_{z;1/2,1,\varkappa}(\Sigma^{+})$, $g \in H_{z;-1/2,1,\varkappa}(\Sigma^{+})$ вектор-функция $u(X)$, построенная по формулам (I8), дает решение задач $m_1^{\pm}$, $m_2^{\pm}$ соответственно.

Глава 3 посвящена исследованию гладкости решений нестационарных ГУ, существование которых доказано в §2.4. В этой главе обобщаются и уточняются результаты §§2.I-2.3, касающиеся свойств граничных операторов. Основным моментом исследований является получение оценок в пространствах $H_{m,p}(\Omega^{\pm})$, $H_{m,p}(S)$, $p \in \mathbb{C}_{\varkappa}$, $\varkappa > 0$ решений эллиптических краевых задач с параметром для уравнения

$$p^2 u(x,p) + (\mathcal{L}u)(x,p) = q(x,p), \quad x \in \Omega^{\pm}, \tag{2I}$$

где $\mathcal{L}$ - матричный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами

$$(\mathcal{L}u)_i(x,p) = -\sum_{j,k,h=1}^{d} \partial_j\left(a_{ijkh}(x)\partial_k u_h\right)(x,p), \quad i=1,\dots,d,$$

$\{a_{ijkh}(x)\}_{i,j,k,h=1}^{d}$ – тензор упругих коэффициентов неоднородной анизотропной среды, удовлетворяющий условиям:

$$a_{ijkh}(x) = a_{khij}(x) = a_{jikh}(x),\ x\in\mathbb{R}^d;\ i,j,k,h=1,\dots,d, \tag{22}$$

$$\sum_{i,j,k,h=1}^{d} a_{ijkh}(x)\eta_{ij}\eta_{kh} \geqslant \alpha\sum_{i,j=1}^{d}\eta_{ij}^2 \quad \forall\eta_{ij}\in\mathbb{R},\ \eta_{ij}=\eta_{ji}, \tag{23}$$

$$a_{ijkh}(x) = a_{ijkh,0} + \tau_{ijkh}(x),\quad i,j,k,h=1,\dots,d,$$

где постоянная $\alpha>0$, $a_{ijkh,0}$, $i,j,k,h=1,\dots,d$ постоянны, $\tau_{ijkh}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\{a_{ijkh,0}\}_{i,j,k,h=1}^{d}$ также удовлетворяют условиям симметричности (22) и эллиптичности (23). Гиперповерхность предполагается гладкой класса .

Как уже было сказано, изучению эллиптических краевых задач с параметром посвящено большое число работ, однако применение развитых в этих работах методов исследования общих эллиптических задач с параметром сталкивается в данном случае со значительными трудностями, связанными с нарушением "регулярной" зависимости от параметра. Это обстоятельство существенно усложняет исследования. Вместе с тем, система (21) обладает рядом благоприятных свойств /симметричность (22) и эллиптичность (23) ее коэффициентов/, что в конечном счете и позволяет получить требуемые оценки.

Результаты исследований, проведенных в двух первых разделах главы 3, собраны в следующем утверждении.

Теорема 3.3. Пусть $u\in H_{\ell+1,p}(\Omega^\pm)$, $\ell\geqslant 1$, $(p^2+\mathcal{L})u=q$. Существуют положительные постоянные C_ℓ, $\varkappa(\ell)$, такие, что при $\operatorname{Re}p=\sigma\geqslant\varkappa(\ell)$ справедливы оценки:

$$\|u\|^2_{\ell,p;\Omega^\pm} \leqslant C_\ell\sigma^{-1}\left(|p|\,\|u^\pm\|^2_{\ell-1/2,p;S} + \|q\|^2_{\ell-1,p;\Omega^\pm}\right),$$

$$\|u\|^2_{\ell,p;\Omega^\pm} \leqslant C_\ell\sigma^{-1}\left(|p|^2\|(T_\nu u)^\pm\|^2_{\ell-3/2,p;S} + \|q\|^2_{\ell-1,p;\Omega^\pm}\right),$$

$$\|(T_\nu u)^\pm\|^2_{\ell-3/2,p;S} \leqslant C_\ell\left(\|u^\pm\|^2_{\ell-1/2,p;S} + |p|^{-1}\|q\|^2_{\ell-1,p;\Omega^\pm}\right),$$

$$\|u^\pm\|^2_{\ell-1/2,p;S} \leqslant C_\ell\sigma^{-1}\left(|p|^2\|(T_\nu u)^\pm\|^2_{\ell-3/2,p;S} + \|q\|^2_{\ell-1,p;\Omega^\pm}\right),$$

в которых верхние индексы "±" обозначают предельные значения соответствующих величин при $x \to S$ из $\Omega^{\pm}$ соответственно.

В §3.1 утверждения теоремы 3.3 доказаны в случае полупространства, в §3.2 с помощью стандартной процедуры локализации эти результаты перенесены на случай произвольных областей $\Omega^{\pm}$ с гладкой границей.

В следующем §3.3 аналогичные оценки получены для решений задачи трансмиссии. Предположим, что $u \in H_{\ell+1,p}(\Omega^{+}), \tilde{u} \in H_{\ell+1,p}(\Omega^{-}), \ell \geq 1$; $(\rho^2+\mathcal{L})u = q, (\rho^2+\mathcal{L})\tilde{u} = \tilde{q}$, причем на граничной гиперповерхности S $u^{+} = \tilde{u}^{-}$. Основным результатом §3.3 является теорема 3.4, содержащая оценку

$$\|u\|^2_{\ell,p;\Omega^+} + \|\tilde{u}\|^2_{\ell,p;\Omega^-} \leq C_\ell \sigma^{-1} \left\{ |p|^2 \|(T_\nu u)^+ - (T_\nu \tilde{u})^-\|^2_{\ell-3/2,p;S} + \|q\|^2_{\ell-1,p;\Omega^+} + \|\tilde{q}\|^2_{\ell-1,p;\Omega^-} \right\}$$

при $\sigma \geq \varkappa(\ell) > 0$.

Результаты теорем 3.3, 3.4 позволили в §3.4 доказать одну из центральных теорем работы, касающуюся свойств основных граничных операторов динамической теории упругости. Ввиду ее важности, приведем здесь ее полную формулировку.

Теорема 3.5. Операторы $N^{\pm}$, V, $W^{\pm}$, $K^{\pm}$, F осуществляют непрерывные инъективные отображения:

$$N^{\pm}: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$V: H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$W^{\pm}: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$K^{\pm}: H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$F: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+)$$

при всех $m \geq -1/2$, $k \in \mathbb{R}$, $\varkappa \geq \varkappa(m) > 0$. Области их значений плотны в соответствующих пространствах.

Обратные операторы, продолженные с плотных множеств на эти пространства, осуществляют отображения

$$(N^{\pm})^{-1}: H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$V^{-1}: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$(W^{\pm})^{-1}: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$
$$(K^{\pm})^{-1}: H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{2;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+),$$

$$F^{-1}: H_{\varepsilon; m,k,\text{æ}}(\Sigma^+) \mapsto H_{\varepsilon; m+1,k-1,\text{æ}}(\Sigma^+),$$

непрерывные при тех же m , k , æ .

Результаты теоремы 3.5 позволяют существенно уточнить и обобщить утверждения о разрешимости нестационарных ГУ (8) , (I0) - (I2), полученные в §2.4. Уточняется при этом также теорема 2.7, принимающая следующий вид.

Теорема 3.6. I. Пусть $f \in H_{\varepsilon; \ell,k,\text{æ}}(\Sigma^+)$. Решив ГУ (8), (I0) , построим потенциалы (7), (9) с найденными плотностями α , β соответственно. При $\ell \geqslant 1/2$, $\ell + k \geqslant 1$, $\text{æ} \geqslant \text{æ}(\ell)$ вектор-функция $u(X) \in H_{\varepsilon; \ell+1/2,k-1/2,\text{æ}}(G^{\pm})$ в обоих случаях дает решения задач $m_1^{\pm}$.

2. Пусть $g \in H_{\varepsilon; m,k,\text{æ}}(\Sigma^+)$. Решив ГУ (II), (I2) , построим потенциалы (7), (9) с найденными плотностями α , β соответственно. При $m \geqslant -1/2$, $m+k \geqslant 1/2$, $\text{æ} \geqslant \text{æ}(m)$ вектор-функция $u(X) \in H_{\varepsilon; m+3/2,k-1,\text{æ}}(G^{\pm})$ в обоих случаях дает решения задач $m_2^{\pm}$.

Нельзя ли усилить полученные результаты? В §3.5 построен пример, показывающий, что для ГУ $m^+_{2,W;\varepsilon}$, $m^+_{2,F;\varepsilon}$, возникающих в рамках прямого варианта при решении плоской задачи теории упругости в полуплоскости, этого сделать нельзя. Этот пример может служить основой для аналогичных примеров, относящихся к другим типам ГУ. Пусть $\Omega^+ = \mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, $\Sigma^+ = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+$. Разрешающим оператором уравнений $m^+_{2,W;\varepsilon}$, $m^+_{2,F;\varepsilon}$ является $(N^+)^{-1}$. В §3.5 строится вектор-функция $g \in H_{\varepsilon; 0,1/2,\text{æ}}(\Sigma^+)$, такая, что $(N^+)^{-1} g \in H_{\varepsilon; 1,-1/2,\text{æ}}(\Sigma^+)$, но $(N^+)^{-1} g \notin H_{\varepsilon; 1,-1/2+\varepsilon,\text{æ}}(\Sigma^+)$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Весьма неожиданным оказалось то, что $g(X)$ - это релеевская волна, бегущая вдоль границы упругой полуплоскости.

В последнем разделе главы 3 рассматриваются начально краевые задачи для неоднородного уравнения динамической теории упругости с неоднородными начальными условиями. Показано, что с помощью объемного запаздывающего потенциала и двух "начальных" потенциалов неоднородности в уравнении и начальных условиях могут быть перенесены в краевые условия. Если при этом выполнены известные "условия согласования" начальных и граничных данных, то задача сводится к рассмотренным ранее.

Четвертая глава работы посвящена исследованию ГУ в динамической контактной задаче, 3-й и 4-й основных начально краевых задачах, а также в основной задаче с граничным условием смешанного типа. При этом возникает необходимость расширения алгебры граничных операторов, действующих в шкалах соболевских пространств на граничной гиперповерхности. Исследование свойств новых образующих этой алгебры в сочетании с результатами, полученными ранее, позволяет доказать утверждения об однозначной разрешимости соответствующих ГУ.

В §4.I рассмотрена следующая задача трансмиссии. Пусть область Ω^+ по-прежнему занята упругой средой с тензором упругих коэффициентов $\{a_{ijkh}\}_{i,j,k,h=1}^{d}$, область Ω^- – другой средой с другим тензором упругих коэффициентов, удовлетворяющих условиям симметричности и эллиптичности. Условимся далее все величины, относящиеся к среде в области Ω^-, помечать сверху волной. В областях G^+ и G^- ищутся вектор-функции $u(X)$, $\tilde{u}(X)$ соответственно, удовлетворяющие соответствующим уравнениям (I), начальным условиям (2) и граничным условиям:

$$u^+(X)-\tilde{u}^-(X)=f(X),\ (T_\nu u)^+(X)-(\tilde{T}_\nu \tilde{u})^-(X)=g(X),\quad X\in\Sigma^+,$$

механический смысл которых состоит в условиях контакта на границе раздела сред. Представив решение этой задачи /задачи tr / в виде

$$u(X)=V(X),\ X\in G^+\ ;\ \tilde{u}(X)=\tilde{V}(X),\ X\in G^-,$$

придем к системе ГУ относительно плотностей α , $\tilde{\alpha}$:

$$\begin{cases} V\alpha-\tilde{V}\tilde{\alpha}=f \\ K^+\alpha-\tilde{K}^-\tilde{\alpha}=g \end{cases} \qquad \text{или} \qquad tr_V\{\alpha,\tilde{\alpha}\}=\{f,g\}.$$

Представление решений задачи tr в виде других комбинаций запаздывающих потенциалов простого или двойного слоев приводит к соответствующим системам ГУ, которые здесь не приводятся.

Центральным моментом исследования систем ГУ в задаче tr является изучение свойств оператора $(N^+-\tilde{N}^-)^{-1}$. Оказывается, при всех $m\geqslant -1/2$, $\varkappa\geqslant\varkappa(m)>0$ этот оператор осуществляет непрерывные отображения $(N^+-\tilde{N}^-)^{-1}: H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)\mapsto H_{2;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+)$. Сочетая этот результат с утверждениями теоремы 3.5, получаем следующее утверждение о непрерывности при $m\geqslant -1/2$, $\varkappa\geqslant\varkappa(m)$ разрешающего оператора tr_V^{-1} /фрагмент теоремы 4.2/ в следующих парах пространств

$$tr_V^{-1}: H_{2;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+)\times H_{2;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)\mapsto H_{2;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+)\times H_{2;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+)$$

Аналогичные утверждения получены и для разрешающих операторов остальных систем ГУ в задаче tr. Далее в теореме 4.3 доказано, что при $f\in H_{\tau;\ell,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, $g\in H_{\tau;\ell-1,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, $\ell\geqslant 1/2$, $\ell+k\geqslant 3/2$ во всех случаях упругие потенциалы с плотностями, являющимися решениями соответствующих систем ГУ, дают решения задачи tr.

В §4.2 рассмотрены ГУ, возникающие при решении 3-й основной динамической задачи $m_3^{\pm}$. В этой задаче к уравнению (I) и условиям (2) добавляются следующие краевые условия:

$$u_\nu^{\pm}(X)=f_\nu(X),\quad (T_\nu u)_\tau^{\pm}(X)=g_\tau(X),\quad X\in\Sigma^+,$$

где нижний индекс ν или τ при вектор-функции обозначает ее нормальную или касательную к S компоненту соответственно. В работе изучены четыре варианта систем ГУ, отвечающие представлениям решений задач $m_3^{\pm}$ в виде потенциалов простого слоя, двойного слоя и их суммы с плотностями, одна из которых касательна, а другая - нормальна к S. Приведем результаты, относящиеся к одному из перечесленных выше вариантов. Представление решения задачи в виде

$$u(X)=W(X)+V(X),\quad X\in G^{\pm}, \tag{24}$$

где плотность β_τ потенциала W касательна, плотность α_ν потенциала V нормальна к S, приводит к системе ГУ

$$\begin{cases}(W^{\pm}\beta_\tau)_\nu+(V\alpha_\nu)_\nu=f_\nu\\ (F\beta_\tau)_\tau+(K^{\pm}\alpha_\nu)_\tau=g_\tau\end{cases}\quad \text{или}\quad m^{\pm}_{3;W,V}\{\beta_\tau,\alpha_\nu\}=\{f_\nu,g_\tau\} \tag{25}$$

Обозначим через $H^{\tau}_{\tau;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ и $H^{\nu}_{\tau;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ подпространства в $H_{\tau;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, состоящие соответственно из касательных и нормальных к векторных полей. Основным моментом исследований раздела 4.2 является изучение свойств операторов $\pi_\tau^{\pm}$, $\pi_\nu^{\pm}$, сопоставляющих элементу $u\in H_{\tau;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ пары $\{(N^{\pm}u)_\tau, u_\nu\}$ и $\{u_\tau,(N^{\pm}u)_\nu\}$ соответственно. Знание этих свойств в сочетании с результатами теоремы 3.5 позволяет доказать следующий результат о непрерывности разрешающего оператора системы (25), составляющий часть утверждений теоремы 4.5. При всех $m\geqslant -1/2$, $k\in\mathbb{R}$, $\varkappa\geqslant\varkappa(m)>0$ оператор $(m_{3;W,V})^{-1}$ осуществляет непрерывные отображения

$$(m^{\pm}_{3;W,V})^{-1}: H^{\gamma}_{\varepsilon;m+1,k,\varkappa}(\Sigma^+)\times H^{\tau}_{\varepsilon;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)\mapsto H^{\tau}_{\varepsilon;m+1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+)\times H^{\gamma}_{\varepsilon;m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+).$$

Решив систему ГУ (25), построим вектор-функцию $u(X)$ по формуле (24). Пусть $f_\gamma \in H^{\gamma}_{\varepsilon;\ell,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, $g_\tau \in H^{\tau}_{\varepsilon;\ell-1,k,\varkappa}(\Sigma^+)$. Если $\ell \geq 1/2$, $\ell+k \geq 3/2$, $\varkappa \geq \varkappa(\ell)$, то $u(X) \in H_{\varepsilon;\ell+1/2,k-1,\varkappa}(G^{\pm})$ дает решение задач $m^{\pm}_3$. Аналогичные утверждения получены и для других систем ГУ в задаче $m^{\pm}_3$.

В §4.3 рассмотрены четыре системы ГУ, возникающие при представлении решения четвертой основной задачи $m^{\pm}_4$ теми же комбинациями потенциалов, что и в предыдущем случае. В задачах $m^{\pm}_4$ на Σ^+ заданы касательная компонента вектора смещений и нормальная компонента вектора нормальных граничных напряжений. Полученные в §4.3 результаты аналогичны результатам §4.2 и поэтому мы их здесь не приводим.

Последние два раздела главы 4 посвящены ГУ в основной задаче $mix^{\pm}$ со смешанным граничным условием. Эта задача состоит в решении в G^+ или в G^- уравнения (I) с условиями (2). Для формулировки граничного условия предположим, что S разбита на две части S_1 и S_2 ненулевой поверхностной меры: $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Обозначим: $\Sigma^+_i = S_i \times R_+$, $i = 1, 2$. Граничное условие в задачах $mix^{\pm}$ имеет вид

$$u^{\pm}(X) = f(X),\ X \in \Sigma^+_1;\ (T_\nu u)^{\pm}(X) = g(X),\quad X \in \Sigma^+_2 \tag{26}$$

Смысл условий 26 состоит в задании на части Σ^+_1 смещений граничных точек среды, а на части Σ^+_2 – нормальных граничных напряжений. Предлагаются четыре варианта представления решений этих задач: в виде потенциала простого слоя, двойного слоя и их суммы с плотностями, сосредоточенными на разных частях гиперповерхности Σ^+. Рассмотрим здесь лишь один из вариантов. Представим решение задачи $mix^{\pm}$ в виде

$$u(X) = W(X) + V(X),\quad X \in G^{\pm}, \tag{27}$$

где плотность β потенциала W сосредоточена на Σ^+_1, плотность α потенциала V – на Σ^+_2. Представление (27) приводит к системе ГУ

$$\begin{cases} P_1(W^{\pm}\beta + V\alpha) = f \\ P_2(F\beta + K^{\pm}\alpha) = g \end{cases} \quad \text{или} \quad mix^{\pm}_{W,V}\{\beta,\alpha\} = \{f,g\}, \qquad (28)$$

в которой P_i - операции сужения вектор-функций с Σ^+ на Σ^+_i, $i=1,2$.

Введем при $m,k\in\mathbb{R}$, $\varkappa>0$ пространства $\mathring{H}_{z;m,k,\varkappa}(\Sigma^+_i)$, $i=1,2$, являющиеся подпространствами в $H_{z;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, состоящими из элементов u с носителями $supp\, u\subset\overline{\Sigma}^+_i$. Через $H_{z;m,k,\varkappa}(\Sigma^+_i)$, $i=1,2$ обозначим пространства, образованные сужениями на Σ^+_i элементов пространства $H_{z;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$. Основным моментом исследования систем ГУ в задачах $mix^{\pm}$ является изучение свойств операторов $\mathcal{K}^{\pm}_{i,j}$, $i,j=1,2$, $i\neq j$, которые сопоставляют элементам $u\in H_{z;m,k,\varkappa}(\Sigma^+)$ пары $\{P_i u, P_j N^{\pm}u\}$. Свойства этих операторов исследованы в §4.4. Сочетание полученных в этом разделе результатов со свойствами основных граничных операторов позволило в §4.5 доказать однозначную разрешимость всех четырех типов ГУ в задачах $mix^{\pm}$. Приведем здесь результат, касающийся непрерывности разрешающего оператора системы (28), составляющий часть утверждений теоремы 4.9.

Оператор $(mix^{\pm}_{W,V})^{-1}$ при всех $k\in\mathbb{R}$, $\varkappa>\varkappa_0>0$ осуществляет непрерывные отображения:

$$(mix^{\pm}_{W,V})^{-1}: H_{z;1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+_1)\times H_{z;-1/2,k,\varkappa}(\Sigma^+_2)\mapsto \mathring{H}_{z;1/2,k-2,\varkappa}(\Sigma^+_1)\times \mathring{H}_{z;-1/2,k-2,\varkappa}(\Sigma^+_2)$$

Теорема 4.10 утверждает, что при выполнении условий $f\in H_{z;1/2,1,\varkappa}(\Sigma^+_1)$, $g\in H_{z;-1/2,1,\varkappa}(\Sigma^+_2)$ вектор-функция $u(X)$, построенная по формуле (27), в которой β, α - решение системы (28), дает решения задач $mix^{\pm}$.

Первые три раздела главы 5 посвящены ГУ в задачах нестационарной дифракции упругих волн на незамкнутых гиперповерхностях /многообразиях с краем/, моделирующих трещины или разного рода включения в упругой среде. Для определенности будем говорить о трещине. Основной трудностью, возникающей при исследовании этих ГУ, является удачное введение граничных операторов и соответствующих функциональных пространств, позволяющее вести исследования, придерживаясь использованных ранее схем.

Пусть S_0 - незамкнутая гиперповерхность, являющаяся частью замкнутой гиперповерхности S, $\Omega=\mathbb{R}^d\setminus\overline{S}_0$, $G=\Omega\times\mathbb{R}_+$, $\Sigma^+_0=S_0\times\mathbb{R}_+$.

В G решается уравнение (I) с начальными условиями (2). Краевые условия в задаче dif_1 имеют вид

$$u^+(X) = f^+(X),\ u^-(X) = f^-(X),\quad X \in \Sigma_0^+, \tag{29}$$

что отвечает заданию смещений берегов трещины, в задаче dif_2 –

$$(T_\nu u)^+(X) = g^+(X),\ (T_\nu u)^-(X) = g^-(X),\ X \in \Sigma_0^+, \tag{30}$$

то есть на берегах трещины известны нормальные граничные напряжения.

Ищем решения обеих задач в виде

$$u(X) = V(X) + W(X),\quad X \in G \tag{31}$$

с плотностями α, β, сосредоточенными на Σ_0^+. Граничные условия (29) приводят к системе ГУ

$$\begin{cases} P_0(V\alpha + W^+\beta) = f^+, \\ P_0(V\alpha + W^-\beta) = f^-, \end{cases}$$

в которой P_0 – операция сужения с Σ^+ на Σ_0^+, условия (30) – к системе ГУ

$$\begin{cases} P_0(K^+\alpha + F\beta) = g^+, \\ P_0(K^-\alpha + F\beta) = g^-. \end{cases}$$

Перепишем полученные системы ГУ в виде

$$\begin{cases} P_0(V\alpha + W^+\beta) = f^+, \\ P_0(W^+\beta - W^-\beta) = f^+ - f^- \end{cases} \quad \text{или } Dif_V\{\alpha,\beta\} = \{f^+, \delta f\}, \tag{32}$$

где $\delta f = f^+ - f^-$,

$$\begin{cases} P_0(K^+\alpha - K^-\alpha) = g^+ - g^-, \\ P_0(K^-\alpha + F\beta) = g^- \end{cases} \quad \text{или } Dif_W\{\alpha,\beta\} = \{\delta g, g^-\}, \tag{33}$$

где $\delta g = g^+ - g^-$. Введем пространства $\mathring{H}_{r;m,k,\varkappa}(\Sigma_0^+)$, $H_{r;m,k,\varkappa}(\Sigma_0^+)$ так же, как были введены пространства $\mathring{H}_{r;m,k,\varkappa}(\Sigma_i^+)$, $H_{r;m,k,\varkappa}(\Sigma_i^+)$ при исследовании ГУ в задачах $mix^\pm$. В §5.I определяются действующие в этих пространствах основные граничные операторы. Поясним для примера, как определяется в этом случае оператор нормальных граничных напряжений $\mathcal{N}$. Пусть f^+ и f^- – смещения берегов трещины. Решив в G уравнение (I) с начальными условиями (2) и граничными условиями (29), построим векторы нормальных граничных напряжений $g^+(X)=(T_\nu u)^+(X)$ и $g^-(X)=(T_\nu u)^-(X), X\in\Sigma_0^+$. Оператор $\mathcal{N}$ сопоставляет паре $\{f^+, \delta f=f^+-f^-\}$ пару $\{\delta g=g^+-g^-, g^-\}$. Приведем одно из утверждений теоремы 5.I, касающееся свойств оператора $\mathcal{N}$.

Оператор $\mathcal{N}$ осуществляет при всех $k\in\mathbb{R}$, $æ\geqslant æ_0>0$ непрерывные отображения

$$\mathcal{N}: H_{2;1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\mapsto \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+)\times H_{2;-1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+),$$

области их значений плотны в соответствующих пространствах.

Обратный оператор $\mathcal{N}^{-1}$, продолженный с плотных множеств на эти пространства, осуществляет отображения

$$\mathcal{N}^{-1}: \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\times H_{2;-1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\mapsto H_{2;1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+),$$

непрерывные при тех же k, $æ$.

Кроме оператора $\mathcal{N}$ в §5.I введены: оператор потенциала простого слоя $\hat{V}$, двойного слоя W, нормальных граничных напряжений потенциала простого слоя $\hat{K}$ и двойного слоя $\hat{F}$, а также изучены их свойства.

На основании этих свойств в §5.2 доказана однозначная разрешимость ГУ (32),(33). Приведем утверждения теоремы 5.2 о непрерывности соответствующих разрешающих операторов.

Операторы $\mathcal{D}if_V^{-1}$, $\mathcal{D}if_W^{-1}$ при всех $k\in\mathbb{R}$, $æ\geqslant æ_0>0$ осуществляют непрерывные отображения:

$$\mathcal{D}if_V^{-1}: H_{2;1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\mapsto \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,k,æ}(\Sigma_0^+),$$

$$\mathcal{D}if_W^{-1}: \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\times H_{2;-1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\mapsto \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,k,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,k-1,æ}(\Sigma_0^+)$$

Теорема 5.2 дает ответ на вопрос о разрешимости ГУ (32), (33). Теорема же 5.3 утверждает, что при $\{f^+, \delta f\}\in H_{2;1/2,1,æ}(\Sigma_0^+)\times \overset{\circ}{H}_{2;1/2,1,æ}(\Sigma_0^+)$, $\{\delta g, g^-\}\in \overset{\circ}{H}_{2;-1/2,1,æ}(\Sigma_0^+)\times H_{2;-1/2,1,æ}(\Sigma_0^+)$ вектор-функция $u(X)$, построенная по формуле (3I), в которой $\{\alpha,\beta\}$ – решение ГУ (32) или (33), является решением задач dif_1 или dif_2 соответственно.

В §5.3 рассмотрены четыре задачи в ограниченной области Ω^+, содержащей трещину S_0, различающиеся видом краевых условий на внешней гиперповерхности S и на берегах трещины S_0. Эти задачи сведены к системам ГУ, разрешимость которых доказана с помощью сочетания методов, развитых в §§5.I, 5.2 и результатов, полученных в предыдущих главах.

До сих пор переменная t изменялась на бесконечном интервале $\mathbb{R}_+$. В §5.4 изучен случай, когда t изменяется на конечном интервале $(0,T), T>0$. Все утверждения о свойствах основных граничных операторов и о разрешимости нестационарных ГУ остаются справедливыми, если в их формулировках пространства $H_{z;m,\kappa,æ}(\Sigma^+)$, $\overset{\circ}{H}_{z;m,\kappa,æ}(\Sigma_i^+), H_{z;m,\kappa,æ}(\Sigma_i^+)$, $i=0,1,2$ заменить на $H_{z;m,\kappa}(\Sigma_T)$, $\overset{\circ}{H}_{z;m,\kappa}(\Sigma_{iT}), H_{z;m,\kappa}(\Sigma_{iT})$ соответственно, где $H_{z;m,\kappa}(\Sigma_T)$ - пространства, состоящие из сужений на Σ_T элементов пространств $H_{z;m,\kappa,0}(\Sigma^+), \Sigma_T = S\times(0,T)$. Нормы пространств $H_{z;m,\kappa}(\Sigma_T)$ индуцированы нормами соответствующих пространств $H_{z;m,\kappa,0}(\Sigma^+)$. Аналогично определяются пространства $\overset{\circ}{H}_{z;m,\kappa}(\Sigma_{iT}), H_{z;m,\kappa}(\Sigma_{iT}), i=0,1,2$.

Напомним, что справедливость утверждений о непрерывности основных граничных операторов и обратных к ним /теорема 3.5/ доказана лишь в пространствах $H_{z;m,\kappa}(\Sigma_T)$ при $m\geqslant -1/2$. Справедливы ли эти утверждения в полной шкале соболевских пространств, то есть при всех $m\in\mathbb{R}$? Вопрос этот интересен и сам по себе, однако, кроме того, необходимость его решения связана с оценками, проводимыми в следующей главе 6, посвященной методам приближенного решения нестационарных ГУ. В §5.5 на этот вопрос дан положительный ответ. Доказательство соответствующего утверждения основано на идее "транспонирования". Наряду с запаздывающими вводятся "опережающие" потенциалы. Эти потенциалы определяются формулами (3),(4), в которых $\Phi(X)$ заменено фундаментальным решением $\Phi_a(X)$ уравнения (I), равным нулю при $t>0$. "Опережающие" граничные операторы V_a, $W_a^{\pm}$, $K_a^{\pm}$, F_a обладают теми же свойствами, что и запаздывающие с заменой пространств $H_{z;m,\kappa}(\Sigma_T)$ на пространства $H_{a;m,\kappa}(\Sigma_T)$, состоящие из вектор-функций, равных нулю при $t>T$. Далее остается лишь воспользоваться сопряженностью операторов V и V_a, $K^{\pm}$ и $W_a^{\mp}$, $W^{\pm}$ и $K_a^{\mp}$, F и F_a.

Последняя глава работы посвящена построению методов приближенного решения нестационарных ГУ, разрешимость которых доказана в предыдущих главах. Каждое из рассматриваемых ГУ сведено к эквивалентному вариационному уравнению с последующим применением при его решении метода Галеркина. Однако использование этого метода оказывается нетривиальным. Основным препятствием, с которым приходится сталкиваться при решении каждого уравнения, является невозможность выбора пространства, в котором билинейная форма соответствующего вариационного уравнения была бы одновременно непрерывной и эллиптической /коэрцитивной/. Для преодоления этого препятствия в работе вводится понятие "слабо эллиптической" формы. Суть его состоит в следующем. Форма $a(u,v)$, непрерывная на некотором пространстве $H \times H$, называется "слабо эллиптической" относительно более широкого пространства $\tilde{H} \supset H$ с более слабой, чем в H топологией, если

$$a(u,u) \geq c\|u\|^2_{\tilde{H}} \qquad \forall u \in H.$$

Оказалось, что все рассмотренные в главе 6 билинейные формы являются слабо эллиптическими относительно некоторых специальным образом выбранных пространств, что, в конечном счете, и позволило доказать сходимость галеркинских приближений к точным решениям в топологии пространства $\tilde{H}$.

В §6.I собраны вспомогательные утверждения технического характера, используемые в следующих разделах. §§6.2-6.5 посвящены построению методов приближенного решения нестационарных ГУ в четырех основных начально краевых задачах /§6.2/, в задаче с краевым условием смешанного типа /§6.3/, в динамической контактной задаче /§6.4/ и в задачах нестационарной дифракции упругих волн на пространственных трещинах /§6.5/. Объем автореферата вынуждает нас ограничиться изложением результатов для какого-нибудь одного нестационарного ГУ.

Возьмем, к примеру, ГУ $V\alpha = f$ в случае конечного интервала времени $(0,T)$. В пространстве $H_{2;0,1/2}(\Sigma_T)$ это ГУ эквивалентно вариационному уравнению

$$<\partial_t V\alpha, (T-t)\chi>_{0,T} = <\partial_t f, (T-t)\chi>_{0,T} \qquad \forall \chi \in H_{2;0,1/2}(\Sigma_T), \tag{34}$$

где $<\cdot,\cdot>_{0,T}$ – скалярное произведение в $[L^2(\Sigma_T)]^d$. На пространстве $[H_{2;0,1/2}(\Sigma_T)]^2$ вводится билинейная форма

$$a(\alpha,\chi) = <\partial_t V\alpha, (T-t)\chi>_{0,T} \tag{35}$$

Справедливы следующие утверждения /лемма 6.2/. Форма (35) непрерывна на $[H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T)]^2$ и слабо эллиптична в следующем смысле:

$$a(\alpha,\alpha) \geq c\|\alpha\|^2_{-1/2,0;\Sigma_T} \qquad \forall \alpha \in H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T),$$

где $\|\cdot\|_{m,k;\Sigma_T}$ - норма пространства $H_{\tau;m,k}(\Sigma_T)$.

Пусть $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность конечномерных подпространств, образующих внутреннюю аппроксимацию пространства $H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T)$. Назовем приближенным решением уравнения (34) элемент $\alpha_n \in \mathcal{H}_n$, удовлетворяющий аппроксимирующему вариационному уравнению

$$a(\alpha_n,\chi_n) = \langle \partial_t f,(T-t)\chi_n\rangle_{0,T} \qquad \forall \chi_n \in \mathcal{H}_n. \tag{36}$$

Теорема 6.I. Уравнения (36) однозначно разрешимы при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\alpha \in H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T)$ и $\alpha_n \in \mathcal{H}_n$ - соответственно точное и приближенное решения уравнения (34). Справедлива оценка

$$\|\alpha-\alpha_n\|_{-1/2,0;\Sigma_T} \leq c\cdot \inf_{\chi_n\in\mathcal{H}_n} \|\alpha-\chi_n\|_{0,1/2;\Sigma_T} \tag{37}$$

Заметим, что из (37) и определения понятия "внутренняя аппроксимация" следует сходимость приближенных решений α_n к точному α в топологии пространства $H_{\tau;-1/2,0}(\Sigma_T)$. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то, что и точное α и приближенное решения α_n являются элементами пространства $H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T)$, сходимость α_n к α имеет место лишь в пространстве $H_{\tau;-1/2,0}(\Sigma_T)$ с более слабой, чем у $H_{\tau;0,1/2}(\Sigma_T)$ топологией. Построим потенциалы $u(X)=V(X)$ и $u_n(X)=V_n(X)$ с плотностями α и α_n соответственно. Справедливо утверждение о сходимости приближенных решений $u_n(X)$ начально краевых задач $m_1^{\pm}$ к точному решению $u(X)$ "по энергии" в областях $G_T^{\pm}=\Omega^{\pm}\times(0,T)$. Аналогичные утверждения доказаны и для других ГУ в перечисленных выше начально краевых задачах.

В заключительном разделе 6.6 оценки погрешности типа (37) конкретизируются в случае наиболее часто используемых при численном решении аппроксимирующих подпространств $\mathcal{H}_n$. Пусть $d=3$, $V_{\ell h}$ - пространство граничных элементов порядка $\ell \geq 0$, построенное с помощью регулярной триангуляции поверхности S с максимальным диаметром разбиения $h>0$. Через $S_0(2p-1,\rho,\tau)$ обозначим подпространство в пространстве сплайнов по переменной t порядка $2p-1$, $p \geq 1$, дефекта ϱ, $1 \leq \varrho \leq p$, построенное по разбиению промежутка $[0,T]$ с максимальным шагом $\tau > 0$, состоящее из сплайнов, удовлетворяющих условиям $s^{(j)}(0)=0$, $j=0,1,\dots,p-1$. Возьмем в качестве аппроксимирующих пространства $[V_{\ell h} \times \overset{\circ}{S}(2p-1,\varrho,\tau)]^3$.

Теорема 6.13. Пусть $\alpha \in H_{2;m,k}(\Sigma_T)$ – точное, $\tilde{\alpha} \in [V_{\ell h} \times \overset{\circ}{S}(2p-1,\varrho,\tau)]^3$ – приближенное решения уравнения $V\alpha = f$.

1. При $m \geq \ell+1$, $m+k \geq p$, $m-\ell+k \geq 3/2$

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{-1/2,0;\Sigma_T} \leq c\{h^{\ell+1} + \tau^{p-1/2}\}\|\alpha\|_{m,k;\Sigma_T}$$

2. При $m \geq \ell+1$, $m+k \geq 2p$, $m-\ell+k \geq 3/2$

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{-1/2,0;\Sigma_T} \leq c\{h^{\ell+1} + \tau^{2p-1/2}\}\|\alpha\|_{m,k;\Sigma_T}$$

Аналогичные выражения для оценок погрешностей получены и для других ГУ, методы приближенного решения которых построены в разделах 6.2 – 6.5.

В заключении отмечено, что многие из развитых в работе методов, по-видимому, могут быть перенесены на другие классы нестационарных задач математической физики. Особый интерес представляет построение теории нестационарных ГУ на кусочно-гладких поверхностях, включающей асимптотики их решений вблизи многообразий, на которых нарушается гладкость граничных поверхностей.

ПУБЛИКАЦИИ

1. Чудинович И.Ю. Метод граничных уравнений в динамических задачах теории упругости /Харьковский ун-т.– Харьков, 1990. – 122 с.– Деп. в ВИНИТИ 26.06.90, № 3649-В90.
2. Чудинович И.Ю. Метод граничных уравнений в задачах динамики упругих сред.– Харьков: Изд-во ХГУ, 1991.– 131 с.
3. Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред //Докл. АН УССР. Сер.А.– 1990.– №11.– С.19-21.
4. Чудинович И.Ю. Методы приближенного решения граничных уравнений в задачах динамики упругих сред /Харьковский ун-т.– Харьков, 1991.– 92 с.– Деп. в ВИНИТИ 22.10.91, № 4024-В91.
5. Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных упругих сред //Матем. заметки.– 1992.– Т.51, вып.2. – С.124-127.

6. Чудинович И.Ю. Методы решения граничных уравнений в задачах динамики упругих сред //Докл. АН УССР. Сер.А.- 1991.- №4.- С.14-17.
7. Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции упругих волн на пространственных трещинах //Матем. заметки.- 1992.- Т.51, вып.4.- С.126-130.
8. Чудинович И.Ю. Замечание о гладкости решений нестационарных граничных уравнений //Матем. заметки.- 1992.- Т.52, вып.5.- С.132-135.
9. Чудинович И.Ю. Энергетические оценки решений краевых задач для дифференциального оператора анизотропной теории упругости с параметром //Динамические системы и комплексный анализ.- Киев, 1992.- С.91-103.
10. Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред //Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики.- Владивосток, 1992.- Ч.2.- С.105-111.
11. Чудинович И.Ю. Метод граничных уравнений в задачах нестационарной дифракции упругих волн //Волны и дифракция-90.- М., 1990.- Т.1.- С.65-68.
12. Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред с краевыми условиями смешанного типа //Доп. АН України.- 1992.- №11.- С.24-26.
13. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. Part I. Existence theorems //Math. Meth. in the Appl. Sci.- 1992.- Vol.15, N5.- P.496-509.
14. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. Part 2. Methods for approximate solutions //Math. Meth. in the Appl. Sci. - 1992.- Vol.15, N6.- P.580-591.

Ответственный за выпуск В.П.Котляров

Подписано к печати 2I.I2.92 Физ. п.л. 2

Уч.-изд. л. 2 Заказ № I8I. Тираж I00 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины, Харьков I64, просп. Ленина, 47