

**КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

З правами рукопису

**КИСЛИЙ Олександр Олександрович**

УДК 621.534

# **КОЛИВАННЯ В МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ СУХИМ ТЕРТЯМ**

**Спеціальність 01.02.06 — динаміка, міцність машин,  
приладів та апаратури**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття вченого ступеня  
доктора технічних наук

Київ — 1993

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00814454 (Q)

КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

З правами рукопису

*Ки*

КИСЛИЙ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 621.534

КОЛИВАННЯ В МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ СУЖИМ ТЕРТЯМ

Спеціальність 01.02.06 – динаміка, міцність машин, приладів та апаратури

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеню  
доктора технічних наук

Київ - 1993

№ 26. 489

Робота виконана у Хмельницькому вищому артилерійському командному училищі

- Офіційні опоненти:
- академік Академії технологічних наук України, засл. діяч науки і техн. України, доктор технічних наук, професор ПАВЛОВСЬКИЙ М.А.
  - академік Транспортної Академії України, засл. діяч науки і техн. України, доктор технічних наук, професор РАССКАЗОВ О.О.
  - доктор фізико-математичних наук, професор КАЖК Я.Ф.

Ведуча організація: - Київський інженерно-будівельний інститут, кафедра теоретичної механіки

Захист відбудеться "1" 03 1993 р. о 15 годині  
 на засіданні спеціалізованої вченої Ради А 068.14.04  
 в Київському політехнічному інституті за адресою:  
 252056, м.Київ, пр.Перемоги 37, КПІ, корп.І, ауд.166

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотечі інституту.

Автореферат розіслано "21" 01 1993 р.

Вчений секретар  
 спеціалізованої вченої Ради

к.т.н., доцент

Онищенко Є.Є.



## А Н О Т А Ц І Я

Метою даної роботи є знаходження і аналіз точних розв'язків вихідних диференціальних рівнянь для різних видів коливальних рухів, що враховують вплив сил сухого тертя, без заміни його еквівалентним в'язким. При цьому розглянуті випадки опору як у вигляді тільки сухого тертя, так і спільної дії з ним в'язкого в одній та багатомасових системах. Для розв'язку подібних задач в даній роботі запропоновано спосіб затримки сигнум-функції.

Теоретично обгрунтовано і експериментально підтверджено, що при вимушених коливаннях сухе тертя відіграє роль фільтра, який пропускає коливання тільки строго визначеного діапазону частот. Останні зручно визначати при допомозі графіка сило-частотних характеристик.

Показано, що в ряді автоколивальних систем з сухим і в'язким тертям існує співвідношення між параметрами, при дотриманні якого в таких системах відразу ж настає усталений режим, минаючи перехідний процес.

Встановлено, що якщо в параметричних коливаннях змінною є маса, то її зростання приводить до збільшення періодів коливань, а зменшення – до зменшення періодів. Розмахи коливань для зростаючої маси залежать від величини сили в'язкого і сухого тертя і можуть спадати, зростати або залишатися постійними. При зменшувчій масі розмахи коливань збільшуються.

Показано використання виявлених властивостей сухого тертя в ряді галузей техніки. Застосування демпферів сухого тертя в динамічних гасителях коливань при певних співвідношеннях параметрів приводить до того, що не тільки основна система, але і динамічний гаситель залишаються нерухомими. Для сейсмічних зон запропоновано конструкції споруд із суцільним поясом з елементів сухого тертя, яка не реагує на дію виникаючих при землетрусі найбільш небезпечних поперечних хвиль. Такі конструкції вже знайшли своє застосування при будівництві сейсмостійких споруд.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Для точного розв'язку задач на коливання систем із сухим тертям використовують звичайний метод зшивання, що дозволяє визначити закони руху тільки на окремих ділянках. Наявність у вихідних диференціальних рівняннях кусково-лінійної функції  $\text{sign } \dot{x}$ , що характеризує сухе тертя, не дозволяло до цього часу одержати та проаналізувати навіть найпростіші неперервні закони таких коливальних рухів.

В зв'язку з цим сухе тертя заміняють еквівалентним в'язким, прирівнюючи відповідні площі петель гістерезиса. Однак така заміна в багатьох випадках не виправдана, оскільки в'язке і сухе тертя мають різну фізичну природу і по-різному впливають на основні характеристики як власних, так і вимушених коливань. Більш того, площа петлі гістерезиса при в'язкому терті пропорціональна квадрату амплітуди, а при сухому - її першому ступеню. Через те, що сухе тертя наявне в багатьох коливальних системах, а іноді є і визначальним, то його облік дозволяє суттєво наблизити розрахункову схему до реальної.

Ціль роботи. Одержати неперервні закони руху для різних коливальних процесів в системах як з окремо взятим сухим, так і при поєднанні з ним в'язкого тертя. Здійснити при цьому теоретико-експериментальні дослідження властивостей, що відрізняють сухе тертя, і запропонувати їх використання в ряді галузей техніки.

Наукова новизна. Запропоновано спосіб знаходження неперервного розв'язку диференціальних рівнянь при наявності періодичних кусково-лінійних функцій типу  $\text{sign } \dot{x}$ . З допомогою цього способу вперше одержано точний розв'язок задач механіки для вільних коливань систем з сухим та в'язким тертям. При цьому виведено неперервне рівняння фазової траєкторії.

Одержано закон вимушених коливань в системах із сухим тертям. При цьому встановлено, що цей вид тертя є фільтром, що пропускає вимушені коливання строго визначеного діапазону частот. А додавання в'язкого тертя до сухого звуку пропускні ділянки цього фільтра. Показано одержання розв'язків і для систем із скінченним числом ступенів вільності.

В автоколивальній системі з сухим і в'язким тертям виведено неперервний закон руху при дії як симетричної, так і несиметричної підштовхуючої сили.

Він дозволяє описати не тільки перехідний процес, але і усталений режим. Приведене співвідношення між параметрами системи, при дотриманні якого в ній відразу ж діє усталений режим, минаючи перехідний процес.

При розгляді параметричних коливань вперше одержано неперервний закон руху системи з урахуванням дії як в'язкого, так і сухого тертя для одного із законів зростаючої та зменшуваної маси.

Практичне значення і реалізація результатів. В результаті проведення теоретико-експериментальних досліджень запропоновано використання виявлених в даній роботі властивостей сухого тертя в ряді галузей техніки. Зокрема, застосування в динамічному гасителі коливань демпферів сухого тертя сприяє появі як зони інерційного застою, так і додаткової антирезонансної частоти в основній системі. При допомозі запропонованого способу затримки сигнум-функції визначені залежності між параметрами, при призначенні яких не тільки основна система, але і динамічний гаситель коливань залишаються нерухомими.

Однак найбільший ефект дає використання зон інерційного застою при будівництві сейсмостійких споруд. Якщо вільно покласти верхню частину будинку на фундамент, а між ними розташувати елемент сухого тертя, то період власних коливань верхньої частини, як коливальника, для звичайних розмірів будівлі перебуває в межах 5-17с. Це в десятки разів перевищує період коливань жорстких споруд, який практично дорівнює періоду найбільш небезпечних сейсмічних  $S$ -хвиль (0,1-2 с). Отже відношення цих частот відповідає глибокій зоні інерційного застою і тому верхня частина споруди не встигає реагувати на такі хвилі і залишається нерухомою.

Вказані конструкції, основані на використанні виявлених властивостей сухого тертя, вже знайшли своє застосування при будівництві сейсмостійких споруд в м.Ялті та м.Спітаку.

Одержані неперервні розв'язки вільних, вимушених, параметричних і автоколивань в системах із сухим тертям можна використати і при викладі теорії коливань в навчальному процесі.

Апробація результатів. Основні результати роботи доповідалися і обговорювалися на XV Республіканській конференції з питань розсіяння енергії при коливаннях механічних систем (Кам'янець-Подільський, 1969 р.), на всесоюзній конференції з нетрадиційних систем сейсмозахисту будівель і споруд (Севастополь, 1990 р.), на

конференції по захисту машин від вібрації (Челябінськ, 1990 р.), на дев'ятій Європейській конференції з сейсмостійкого будівництва (Москва, 1990 р.), на конференції з динаміки і сейсмостійкості будівель і споруд з нетрадиційним сейсμοзахистом (Севастополь, 1992 р.), а також на наукових семінарах кафедр теоретичної механіки Київського інженерно-будівельного інституту (1988 р.) і Київського політехнічного інституту (1992 р.).

Публікування результатів. Основні результати даної дисертаційної роботи викладені і опубліковані в 25 наукових роботах автора.

Об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, семи глав, загальних висновків і заключення, списку літератури із 102 найменувань і додатка. Вона містить 296 сторінок, в тому числі 206 сторінок тексту, 61 сторінка малюнків, 16 сторінок таблиць і 9 сторінок списку літератури. Дана робота виконана на кафедрі прикладної механіки Хмельницького вищого артилерійського командного училища.

#### КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дослідженню тертя при коливальних рухах різних систем присвячена велика кількість робіт, серед яких слід виділити роботи Давиденка Н.Н., Дубинця В.Г., Василенка М.В., Крагельського І.В., Матвеева В.В., Павловського М.А., Пановка Я.Г., Писаренка Г.С., Сорокіна Є.С., Хильчевського В.В. на інших. В цих роботах вказувалося, що в коливальних системах завжди присутні різні види тертя. Однак для зручності розв'язку вихідних диференціальних рівнянь опір рухові в подавляючій більшості випадків приймався у вигляді сил в'язкого тертя. Якщо ж доводилось враховувати інший вид тертя - сухе, яке часто є визначальним, то його як правило, заміняли еквівалентним в'язким, докорінно спотворюючи при цьому фізичну картину явищ.

Слід відмітити, що в роботах Андропова О.О., Баженсва В.А., Булгакова В.В., Бутеніна М.В., Вітта О.А., Гуляєва В.І., Ден Гартоги Дж., Каннігхема В., Лізунова П.П., Магнуса К., Хайкіна С.Е. та інших розглядалися коливальні рухи різних систем з врахуванням сил сухого тертя. І при точному його врахуванні одержували розв'язок тільки на окремих ділянках і при русі системи від одного з крайніх її положень.

Для одержання неперервного розв'язку подібних кусково-ліній-

них рівнянь в даній роботі запропоновано спосіб затримки сигнум-функції, смисл якого полягає в наступному. Із довільного положення системи розглядають спочатку перший розмах коливань і знаходять закон руху, в якому постійні величини виражені через  $q_0, \dot{q}_0$  та  $\text{sign } \dot{q}_0$ . Потім знаходять час до першої зупинки  $t_1$ . Далі розглядають наступні розмахи коливань, в яких постійні величини виражені через початкові умови,  $t_1$ , а також через номер розмаху коливань  $n$ . При цьому функцію  $\text{sign } \dot{q}_n$  не замінюємо на величину  $(-1)^n$  або відношенням  $|\dot{q}_n|/\dot{q}_n$ , а залишаємо (затримуємо). І в результаті переходу від часткового до загального знаходимо неперервний розв'язок.

Відомо, що при дії сухого тертя коливальний процес спостерігається тільки до певного моменту часу, починаючи з якого дана система потрапляє в зону застою. Якщо вважати, що цьому проміжковому часу відповідає номер розмаху коливань  $N$ , то вихідне рівняння осцилятора з сухим і в'язким тертям можна представити у вигляді

$$m \ddot{q}_n + \mu \dot{q}_n + c q_n = F_T \text{sign } \dot{q}_n \quad (n < N), \quad (I)$$

де  $q_n$  - узагальнена координата,  $m$  і  $c$  - відповідно інерційний та квазіпружний коефіцієнти;  $\mu$  - коефіцієнт в'язкого опору,  $F_T$  - сила кулонового тертя. Використовуючи спосіб затримки сигнум-функції, можна знайти неперервний розв'язок рівняння (I) у вигляді

$$q_n = D(n) e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - \delta \text{sign } \dot{q}_n, \quad (2)$$

де  $\beta = \mu/2m$ ;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  та  $\delta = F_T/c$ . При цьому

$$D(n) = a \frac{2\delta e^{\beta t_1}}{\sin(\omega t_1 + \alpha)} \cdot \frac{e^{\pi\beta(n-1)/\omega} - 1}{e^{\pi\beta/\omega} - 1}. \quad (3)$$

Тут  $a$  та  $\alpha$  - постійні величини.

$$a = \sqrt{(q_0 + d \operatorname{sign} \dot{q}_0)^2 + [\dot{q}_0 + b(q_0 + d \operatorname{sign} \dot{q}_0)]^2} \omega^{-2}$$

$$t_{gd} = \frac{(q_0 + d \operatorname{sign} \dot{q}_0) \omega}{\dot{q}_0 + b(q_0 + d \operatorname{sign} \dot{q}_0)} \quad (4)$$

Час до першої зупинки  $t_1$  та поточний номер розмаху коливань  $n$  визначають відповідно за формулами

$$t_1 = [\arctg(\omega/b) - d] / \omega$$

$$n = [(t - t_1) \omega / \pi] + 1. \quad (5)$$

При цьому дробова величина  $n$  округляється до більшого числа. Швидкість системи та її прискорення в будь-який момент часу  $t$  рівні

$$\dot{q}_n = D(n) e^{-bt} [\omega \cos(\omega t + d) - b \sin(\omega t + d)]$$

$$\ddot{q}_n = -D(n) e^{-bt} [2b\omega \cos(\omega t + d) + (\omega^2 - b^2) \sin(\omega t + d)]. \quad (6)$$

Неперервне рівняння фазової траєкторії при сумісній дії сил сухого тертя і в'язкого набуває форму

$$[\dot{q}_n + b(q_n + d \operatorname{sign} \dot{q}_n)]^2 + \omega^2 (q_n + d \operatorname{sign} \dot{q}_n)^2 = [\omega D(n)]^2 \times$$

$$\times e^{\frac{2b}{\omega} \left[ d - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\dot{q}_n + b(q_n + d \operatorname{sign} \dot{q}_n)}{\omega(q_n + d \operatorname{sign} \dot{q}_n)} \right]} \quad (7)$$

Така крива має вигляд спіралі, що скручується. В ній є не одна особлива точка, а безліч, розташованих на відрізку, що сполучає координати  $(-d, 0)$  та  $(+d, 0)$ . При зображенні такої траєкторії відпадає необхідність будувати її окремо для верхньої та нижньої напівплощин або розрізати і взаємно зсувати згадані напівплощини, як це робили раніше.

При дії тільки сухого тертя ( $\theta = 0$ ) закон вільних коливань набуває форми

$$q_n = [a - 2\delta(n-1)] \sin(\omega_0 t + \alpha) - \delta \operatorname{sign} \dot{q}_n. \quad (8)$$

Це рівняння, як і (2), описує затухаючі коливання. При цьому переміщення також будуть неперервними, оскільки стрибок величини  $\delta \operatorname{sign} \dot{q}_n$  в місцях зміни знака швидкості компенсується величиною першого доданка за рахунок зміни номера розмаху коливань  $n$ . Швидкість системи і рівняння фазової траєкторії, як і у випадку змішаного тертя, будуть також неперервні. Що стосується прискорення системи, то воно, в місцях зміни знака швидкості зазнає розриву, величина якого дорівнює  $2F_T/m$ .

Слід відмітити, що функцію  $\operatorname{sign} \dot{x}$  зручно використовувати і при розгляді іншої, також нерозв'язаної задачі про визначення довжини шляху, пройденого системою при її коливальному русі. Подібні питання зустрічаються при визначенні довговічності, інтенсивності зношування деталей, тощо. Вважаючи, що маса коливальної системи зостережена в одній точці, величину довжини шляху тертя

$L$  можна визначити за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_n} \operatorname{sign} \dot{x} dx, \quad (9)$$

де  $x_0$  і  $x_n$  - відповідно початкове та кінцеве положення точки. Як слідує із (9), числове значення величини  $L$  при будь-якому знаку швидкості завжди додатне. Зокрема для системи з сухим та в'язким тертям

$$L = x_n \operatorname{sign} \dot{x}_n - x_0 \operatorname{sign} \dot{x}_0 + 2 \left\{ A_1 \cdot \frac{1 - e^{-\pi\delta(n-1)/\omega}}{1 - e^{-\pi\delta/\omega}} - \frac{\delta(1 + e^{-\pi\delta/\omega})}{1 - e^{-\pi\delta/\omega}} \left[ n - 1 - \frac{1 - e^{-\pi\delta(n-1)/\omega}}{1 - e^{-\pi\delta/\omega}} \right] \right\}, \quad (10)$$

де  $A_1$  - максимальне відхилення при першому розмаху коливань. Якщо потрібно визначити довжину шляху до повної зупинки системи, то кількість розмахів при цьому

$$n_2 = 1 + \frac{\omega}{\pi \delta} \ln \left[ 1 + \frac{(A_1 - \delta')(1 - e^{-\pi \delta / \omega})}{2 \delta'} \right] \quad (11)$$

А при дії тільки одного сухого тертя

$$L_1 = x_n \operatorname{sign} \dot{x}_n - x_0 \operatorname{sign} \dot{x}_0 + 2 [A_1 - \delta'(n-2)](n-1) \quad (12)$$

$$n_2 = 0,5 (1 + A_1 / \delta')$$

При розгляді вільних коливань механічної системи з 5 ступенями вільності з урахуванням сил сухого тертя вихідні диференціальні рівняння в матричній формі мають вигляд

$$[a] \{\ddot{q}\} + [c] \{\dot{q}\} + [d] \{\operatorname{sign} \dot{q}\} = 0. \quad (13)$$

Тут  $[d]$  - симетрична матриця сухого демпфування та  $\{\operatorname{sign} \dot{q}\}$  - матриця-стовпчик знака швидкостей.

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{s1} & d_{s2} & \dots & d_{ss} \end{bmatrix} \quad \{\operatorname{sign} \dot{q}\} = \begin{bmatrix} \operatorname{sign} \dot{q}_1 \\ \operatorname{sign} \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \operatorname{sign} \dot{q}_s \end{bmatrix} \quad (14)$$

Крім того,  $[a]$  і  $[c]$  відповідно симетричні матриці інерційних та квазіпружних коефіцієнтів, а  $\{q\}$  і  $\{\ddot{q}\}$  - матриці-стовпчики узагальненої координати, прискорення. При визначенні власних частот  $\omega_i$  враховувалась та обставина, що сухе тертя не впливає на їх величину, але змінює амплітуди коливань. Це дає можливість одержати закон зміни узагальненої координати, який при допомозі коефіцієнтів власних форм  $\mathcal{K}_{ki}$  можна представити у виді

$$q_k = \sum_{i=1}^S [k_{ki} A_{1i} \sin(\omega_i t + \alpha_i) - \delta_k \operatorname{sign} \dot{q}_i] \quad (15)$$

$$(k=1, 2, \dots, S; i=1, 2, \dots, S)$$

Тут  $A_{1i}$  та  $\alpha_i$  - постійні величини, які визначають звичайним шляхом. В цілому ж закон руху (15) описує згасаючі коливання.

Вказаний принцип знаходження власних частот застосовувався і при розгляді вільних коливань в системах із 3 ступенями вільності при сумісній дії сухого та в'язкого тертя. При вимушених коливаннях механічних систем з сухим (а також і при поєднанні з ним в'язким) тертям характер коливань задежить від виду змушуючої сили. Якщо остання є лінійно зростаючою, імпульсивною або раптово прикладною і надалі зберігаючою постійне значення навантаження, то спостерігаються згасаючі коливання.

При дії гармонічної змушуючої сили на одномасову систему із сухим тертям вихідне рівняння коливань має вид

$$\ddot{q}_n + \omega_0^2 q_n = [-F_T \operatorname{sign} \dot{q}_n + H \sin(\rho t + \gamma)] / m, \quad (16)$$

де  $H$  - амплітуда змушуючої сили,  $\rho$  та  $\gamma$  - відповідно її частота і початкова фаза. Застосовуючи спосіб затримки сигнум-функції, можна одержати розв'язок рівняння (16) при  $\omega_0 \neq \rho$  у формі

$$q_n = [a - 2\delta(n-1)] \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{H \sin(\rho t + \gamma)}{m|\omega_0^2 - \rho^2|} - \delta \operatorname{sign} \dot{q}_n \quad (17)$$

Це рівняння описує закон коливального руху тільки на протязі перехідного процесу. З нього, зрештою, можна одержати і закон стаціонарних коливань (для сталого режиму) у вигляді

$$q = \left( \frac{H}{m|\omega_0^2 - \rho^2|} - \delta \right) \sin(\rho t + \psi) - \frac{\omega_0^2 \delta}{2\rho^2} \cos^2(\rho t + \psi) \times \quad (18)$$

$$\times \operatorname{sign}[\cos(\rho t + \psi)].$$

Відповідно швидкість і прискорення таких коливань будуть

$$\dot{q} = \left( \frac{H}{m|\omega_0^2 - p^2} - d' \right) p \cos(pt + \varphi) + \frac{\omega_0^2 d'}{2p} x \times \sin[2(pt + \varphi)] \operatorname{sign}[\cos(pt + \varphi)] \quad (19)$$

$$\ddot{q} = - \left( \frac{H}{m|\omega_0^2 - p^2} - d' \right) p^2 \sin(pt + \varphi) + \omega_0^2 d' x \times \cos[2(pt + \varphi)] \operatorname{sign}[\cos(pt + \varphi)]. \quad (20)$$

На рис.1 представлено графік переміщень, котрі описуються рівнянням (18) при таких даних  $d' = 0,04 \text{ м}$ ;  $\omega_0 = 12 \text{ с}^{-1}$ ;  $H/(m|\omega_0^2 - p^2|) = 0,03 \text{ м}$ ;  $p = 8 \text{ с}^{-1}$ . Для порівняння на рис.1б і 1в приведені графіки швидкостей і прискорень. Переміщення і швидкість будуть неперервними, а прискорення в місцях зміни знака швидкості стаціонарних коливань має стрибок величиною  $2d'\omega_0^2$ .

При цьому амплітуда таких коливань

$$A = H/(m|\omega_0^2 - p^2|) - d'. \quad (21)$$

Дія сил сухого тертя приводить до зменшення амплітуди вимушених коливань на величину  $d' = F_T/c$ . Приймаючи в рівнянні (21)  $A > 0$ , одержимо умову підтримання коливань в такій системі

$$\frac{H}{F_T} > \left| 1 - \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 \right|. \quad (22)$$

На рис.2 представлений графік сило-частотних характеристик (залежності  $H/F_T$  від  $p/\omega_0$ ) для нерівності (22). В областях, розташованих вище цієї кривої, рух спостерігається, а в нижніх (заштригованих) рух відсутній. Як видно із цього рисунка, при повільному збільшенні відношення  $p/\omega_0$  спочатку зустрічаються зона залипання 1. Тут змушуюча сила не може подолати тертя між ті-

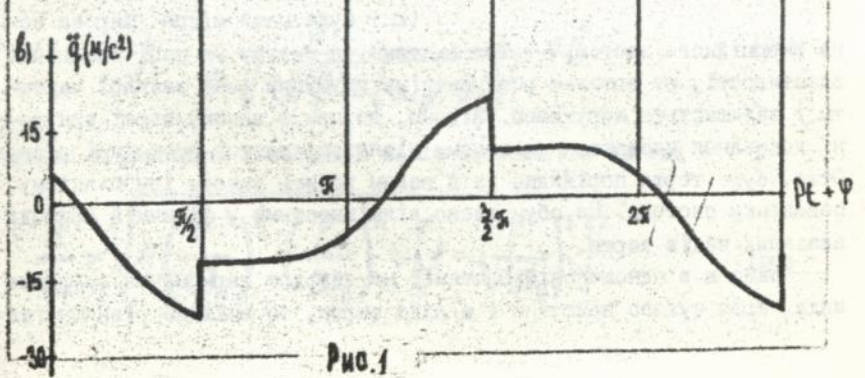
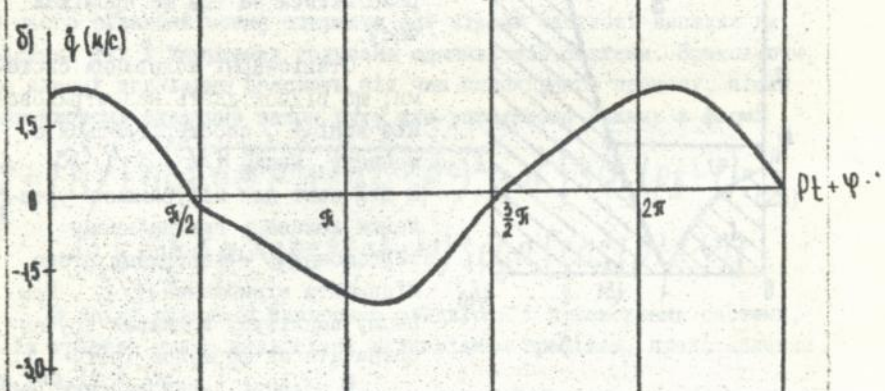
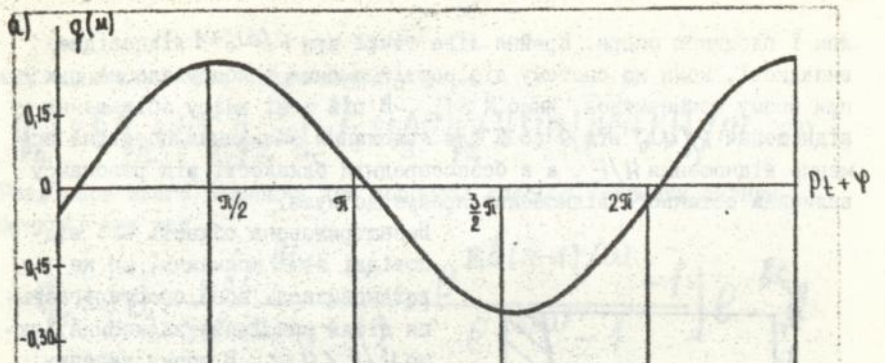


Рис. 1

лом і площиною опори. Крайня ліва точка при  $\rho/\omega_0=1$  відповідає випадкові, коли на систему діє постійна сила і поступальний рух при цьому починається, якщо  $H > F_T$ . В цій зоні зміру збільшення відношення  $\rho/\omega_0$  від 0 до 1 для подолання залипання потрібне все менше відношення  $H/F_T$ , а в безпосередній близькості від резонансу величина останнього відношення прямує до нуля.

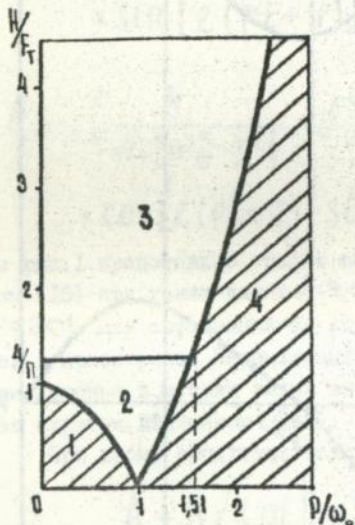


Рис. 2

на інерційного застою 4. Тут система, з огляду на свої інерційні властивості, не встигає реагувати на змушуючу силу великої частоти і залишається нерухомою. Відомо, що при в'язкому терті вимушені коливання настають при всьому діапазоні частот змушуючої сили. Отже, сухе тертя порівняно із в'язким робить завсім іншою якісну поведінку системи. Це обумовлено відмінностями у фізичній природі взаєних видів тертя.

Якщо ж в одномасовій системі, на яку діє гармонічна змушуюча сила, крім сухого присутне і в'язке тертя, то вихідне рівняння та-

Незаштрихована область 2 відповідає зоні коливань, що не встановилися. Вона спостерігається після подолання залипання, якщо  $H/F_T < 4/\pi$ . В цьому випадку кількість енергії, що поступає в систему за один період коливань ( $\mathcal{E}_{НА}$ ), менша енергії  $4F_T A$ , яка розсіюється за той же проміжок часу.

Стационарні коливання системи, що відповідають незаштрихованій зоні 3, спостерігаються з моменту, коли  $H/F_T \geq 4/\pi$ . В цій зоні для підтримання установлених коливань при дальшому збільшенні  $\rho/\omega_0$  потрібно різко підвищити відношення  $H/F_T$ . При цьому амплітуду коливань зручно визначати за формулою (21).

В області зарезонансних частот при недотриманні нерівності (22) буде мати місце широка зо-

ких коливань можна представити у формі

$$\ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = [-F_T \operatorname{sign} \dot{q}_n + H \sin(pt + \gamma)] / m. \quad (23)$$

Розв'язок цього рівняння при допомозі способу затримки сигнум-функції має вид

$$q_n = \left[ a - \frac{2\beta e^{\beta t_1}}{\sin(\omega t_1 + d)} \cdot \frac{e^{\pi\beta(n-1)/\omega} - 1}{e^{\pi\beta/\omega} - 1} \right] e^{-\beta t} \times \\ \times \sin(\omega t + d) + \frac{H \sin(pt + \gamma - \varepsilon)}{m \sqrt{4\beta^2 p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2}} - d' \operatorname{sign} \dot{q}_n. \quad (24)$$

З цього рівняння можна одержати всі відомі часткові випадки як вільних так і вимушених коливань одномасової системи. Враховуючи, що власні коливання згасають під час перехідного процесу, після перетворень одержимо закон руху для усталеного режиму в формі

$$q = \left\{ H / [m \sqrt{4\beta^2 p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2} - d'] \right\} \sin(pt + \varphi) - \\ - 0,5 \omega_0^2 d' p^{-2} \cos^2(pt + \varphi) \operatorname{sign} [\cos(pt + \varphi)]. \quad (25)$$

З цього рівняння знаходимо швидкість і прискорення системи, а їх графіки також аналогічні відповідним графікам, представленим на рис. 16 і 1в.

При цьому амплітуда стаціонарних коливань рівна

$$A = \frac{H}{m \sqrt{4\beta^2 p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2}} - d'. \quad (26)$$

А умови підтримання коливань в такій системі має вигляд

$$\frac{H}{F_T} > \sqrt{4 \left( \frac{\beta}{\omega_0} \right)^2 \cdot \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \left[ 1 - \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 \right]^2} \quad (27)$$

На рис.3 представлені криві, кожна з яких виражає залежність  $H/F_T$  від  $\rho/\omega_0$  при певному значенні  $\delta/\omega_0$ . Рух спостерігається в облас-

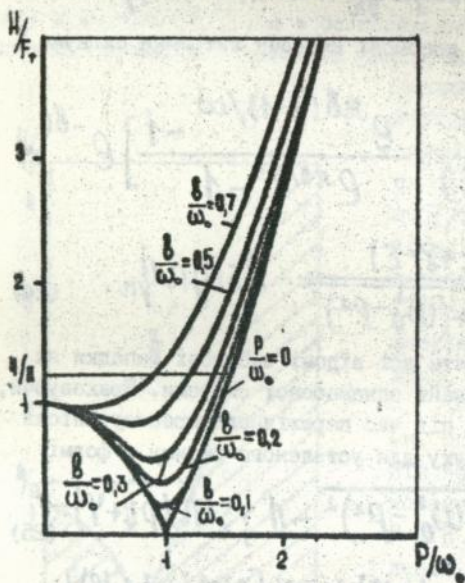


Рис. 3

приводить до того, що система із змішаним тертям при певних умовах не буде реагувати на періодичну змушуючу силу, навіть у випадку  $\rho = \omega_0$ .

Таким чином, сухе тертя відіграє роль фільтра, що пропускає вимушені коливання строго визначеного діапазону частот. А додача в'язкого тертя до сухого зменшує пропускні ділянки цього фільтра.

При розгляді вимушених коливань багатомасової системи з урахуванням сил сухого тертя вихідні диференціальні рівняння в матричній формі мають вигляд

$$[a]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [d]\{\text{sign}\dot{q}\} = \{Q^*\}, \quad (28)$$

де  $\{Q^*\}$  - матриця стовпчик узагальнених змушуючих сил. Вважаючи, що останні мають однакові частоти, але різні амплітуди і фази, їх

тях, розташованих вище цих кривих, а нижче - відсутній. Найнижча крива відповідає відношенню  $\delta/\omega_0 = 0$ , тобто коли в системі діє одне сухе тертя. Тут також спостерігаємо чотири зони: залипання, неусталених і стаціонарних коливань, а також інерційного застою. При збільшенні коефіцієнта в'язкого тертя (тобто з ростом відношення  $\delta/\omega_0$ ) звужується пропускна ділянка і збільшується значення змушуючої сили для підтримки таких коливань. Крім того, слід вказати на ще одну особливість. Сухе тертя не впливає на частоту коливань, в той час як в'язке змінює її величину. Ця обставина, в свою чергу,

можна представити у формі

$$Q_k^* = H_k^* \sin(pt + \gamma_k) \quad (k=1, 2, \dots, S) \quad (29)$$

Звідси випливає, що згадану задачу можна поділити на дві частини. Одна з них відноситься до випадку дії сил  $Q_k = H_k \sin pt$  де  $H_k = H_k^* \cos \gamma_k$  а інша до випадку  $Q_k = H_k^* \cos pt$ , де  $H_k^* = H_k^* \sin \gamma_k$ , тобто одержуємо цілком однотипні задачі. Через те, що сили сухого тертя не впливають на частоти коливань, то спочатку без їх врахування звичайним порядком визначаємо амплітуди стаціонарних коливань. А знаючи закон зміни амплітуд при дії сил сухого тертя  $F_k^T$ , визначаємо потім величину цих амплітуд і складаємо умови підтримання коливань  $K$ -ої маси. За даними цих умов будуємо відповідні графіки сило-частотних характеристик.

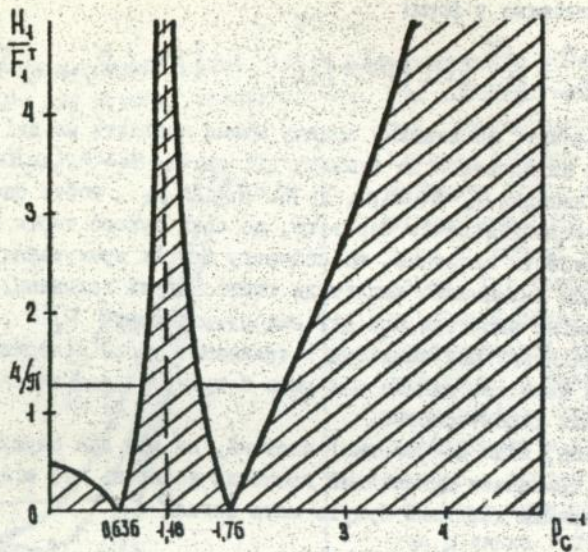
Зокрема, якщо до основної системи, на яку діє змушувача сила  $H_1 \sin pt$  приєднати динамічний гаситель коливань, то відповідно умови підтримки коливань будуть мати вигляд

$$\frac{H_1}{F_1^T} > \left| \frac{(C_{11} - a_{11} p^2)(C_{22} - a_{22} p^2) - C_{12}^2}{C_{11}(C_{22} - a_{22} p^2)} \right| \quad (30)$$

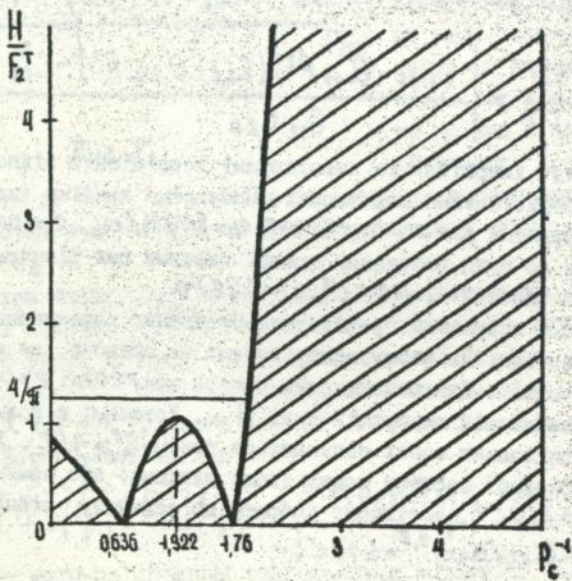
$$\frac{H_1}{F_2^T} > \left| \frac{(C_{11} - a_{11} p^2)(C_{22} - a_{22} p^2) - C_{12}^2}{C_{12} C_{22}} \right| \quad (31)$$

Замінімо тут інерційні та квазіпружні коефіцієнти відповідними масами і коефіцієнтами жорсткості. Побудуємо графіки сило-частотних характеристик для  $m_1 = m_2 = 800 \text{ кг}$ ,  $C_1 = 800 \text{ Н/м}$ ,  $C_2 = 1000 \text{ Н/м}$ . Прирівнюючи до нуля чисельник правої частини цих рівнянь, знаходимо власні частоти  $\omega_1 = 0,636 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 1,76 \text{ с}^{-1}$ .

На рис.4 зображено графік сило-частотних характеристик для основної системи. На ньому заштриховано ті області, де коливання не підтримуються. Для резонансних частот при  $p = \omega_1$  і  $p = \omega_2$  рух виникає при найменшій змушувчій силі  $H$ . Усталені ж коливання в цих незаштригованих зонах починаються при  $H_1/F_1^T \geq 4/\pi$ . Усунути вібрації основної системи можна двома шляхами: або призначити частоту  $p > 4,5 \text{ с}^{-1}$ , або точно вибрати цю величину рівну антирезонансній  $p = (C_{22}/a_{22})^{0,5} = 1,18 \text{ с}^{-1}$ .



Pue. 4



Pue. 5

На рис.5 зображено аналогічний графік для динамічного гасителя, що визначається умовою (31). Тут також спостерігаються три (заштриховані) області, в яких відсутні всякі рухи. Вони розділені резонансними частотами  $\rho = \omega_1$ ;  $\rho = \omega_2$ . Однак, на відміну від попереднього випадку, тут друга область має значно меншу площу, оскільки в ній відсутня антирезонансна частота. Рух спостерігається тільки в незаштригованих областях. І хоч тут зона інерційного застою настає при значно меншій частоті  $\rho$ , для одночасного усунення вібрації як основної системи, так і динамічного гасителя коливачь слід призначати  $\rho \approx 4,5 \text{ c}^{-1}$ .

Розглянемо тепер систему із скінченим числом ступенів вільності, в якій поряд із сухим присутні і в'язке тертя. Вихідні диференціальні рівняння вимушених коливань в матричній формі мають вигляд

$$[a]\{\ddot{q}\} + [b]\{\dot{q}\} + [c]\{q\} + [d]\{\text{sign } \dot{q}\} = \{Q\} \sin pt. \quad (32)$$

При цьому вважаємо, що узагальнені сили мають одну і ту ж частоту, але різні амплітуди. В зв'язку з тим, що в подібних системах має місце запізнення фази переміщення по відношенню до змушуючої сили, то при розв'язку рівнянь (32) зручно користуватися відомим методом комплексних амплітуд. Розглядаємо усталений процес із стаціонарною амплітудою. Спочатку звичайним порядком знаходимо амплітуди без врахування сухого тертя. Після цього знаходимо дійсні амплітуди з урахуванням цих сил і складаємо умови підтримання коливань в таких системах. Потім, будувачи графіки сило-частотних характеристик  $H_k/F_k^T = f(\rho)$ , знаходимо області, де коливання підтримуються або згасають.

Розглянемо поширений випадок, коли динамічний гаситель коливань приєднаний до основної системи, а між нею і гасителем встановлено демпфер з коефіцієнтом в'язкого (внутрішнього) тертя  $\alpha$ . Нехай на основну систему діє змушувача сила  $H_1 \cos pt$ . Тоді в такій системі з сухим і в'язким тертям можна одержати умову підтримання коливань у вигляді

$$\frac{H_1}{F_1^T} > \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \alpha^2 \rho^2}{h^2 + \alpha^2 \rho^2}} \quad (33)$$

де  $k=c_1-m_2\rho^2$ ;  $\beta=c_1-(m_1+m_2)\rho^2$ ;  $a=(c_1-\rho^2 m_1)h-c_2 m_2 \rho^2$ . На рис. 6 зображено криві залежності  $H_1/F_1^T$  від  $\rho$  для різних коефіцієнтів  $\mu = \alpha \times \sqrt{m_1} / (2m_2 \sqrt{c_1})$  для  $m_1=1000 \text{ кг}$ ;  $m_2=50 \text{ кг}$ ;  $c_1=1000 \text{ н/м}$ ;  $c_2=50 \text{ н/м}$ .

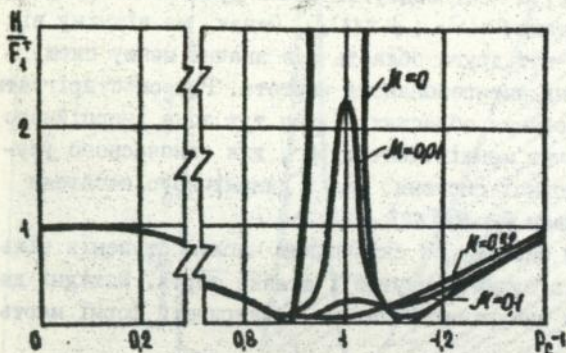


Рис. 6

Тут спостерігають-ся дві резонансні частоти. А для одержання антирезонансної частоти треба виключати внутрішнє в'язке тертя, або замінити його зовнішнім в'язким.

Розглянуті найпростіші автоколивання в системі з сухим і в'язким тертям, вихідне диференціальне рівняння яких має вигляд

$$\ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = (F - F_T) \text{sign} \dot{q}_n / m, \quad (34)$$

де  $F$  - постійна підштовхувача сила, завжди направлена в сторону руху. Приймаючи тут  $F^0 = F - F_T$  при допомозі способу затримки сигнум-функції одержимо неперервний розв'язок рівняння (34) у формі

$$q_n = D_1(n) e^{-\beta t} \sin(\omega t + d) + \delta_0 \text{sign} \dot{q}_n. \quad (35)$$

У цьому законі коливальних рухів позначено

$$D_1(n) = a + \frac{2\delta_0 e^{\beta t_1}}{\sin(\omega t_1 + d)} \cdot \frac{e^{\pi\beta(n-1)/\omega} - 1}{e^{\pi\beta/\omega} - 1} \quad (36)$$

Постійні величини  $\Omega$  та  $\alpha$  знаходимо звичайним порядком. Із (35) слідує, що на період розглянутих автоколивань  $T = 2\pi/\omega$  сухе тертя не впливає. Вказаний закон руху дозволяє знайти як амплітуду при будь-якому розмаху коливань, так і залежність між ними у вигляді

$$A_{n+2} = A_n e^{-\beta\tau} + d_0 (e^{-\beta\tau/2} + 1)^2 \quad (37)$$

Звідси легко визначити амплітуду граничного циклу  $A_n = d_0 \operatorname{ctg}(\beta\tau/4)$ . Із закону руху (35) знаходимо швидкість системи, яка в свою чергу дозволяє одержати рівняння фазової траєкторії у формі

$$\begin{aligned} & [\dot{q}_n + \beta(q_n - d_0 \operatorname{sign} \dot{q}_n)]^2 + \omega^2 (q_n - d_0 \operatorname{sign} q_n) \stackrel{(38)}{=} \\ & = [\omega D_1(n)]^2 e^{\frac{2\beta}{\omega} [\alpha - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\dot{q}_n + \beta(q_n - d_0 \operatorname{sign} \dot{q}_n)}{\omega(q_n - d_0 \operatorname{sign} q_n)}]} \end{aligned}$$

Якщо початкове збудження системи таке, що  $A_1 > A_n$ , то рівняння (38) з часом, описує спіраль, що скручується, а при  $A_1 < A_n$  - спіраль, що розкручується. Однак в обох випадках амплітуда таких коливань прямує до величини  $A_n$ .

Якщо ж підштовхувача сила несиметрична, то вихідну систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = (F_1 - F_T \operatorname{sign} \dot{q}_n) / m & \text{для } \dot{q}_n > 0 \\ \ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = (-F_2 - F_T \operatorname{sign} \dot{q}_n) / m & \text{для } \dot{q}_n < 0 \end{cases} \quad (39)$$

можна замінити одним рівнянням у формі

$$\ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = \frac{F_1 - F_2}{2m} + \left( \frac{F_1 + F_2}{2m} - \frac{F_T}{m} \right) \operatorname{sign} \dot{q}_n. \quad (40)$$

Потім запроваджуємо нову координату  $q^1 = q - \eta$ , де постійна величина  $\eta = (F_1 - F_2) / 2c$ . Далі представимо рівняння (40) у вигляді

$$\ddot{q}^1 + 2\beta\dot{q}^1 + \omega_0^2 q^1 = d_1 \omega_0^2 \operatorname{sign} \dot{q}^1, \quad (41)$$

де  $d_1 = (F_1 + F_2 - 2F_T) / 2c$ . А його розв'язок при допомозі способу затримки сигнум-функції вже відомий. Визначаючи величину умовних амплітуд для різних розмахів коливань і вважаючи потім  $A_1 = A_n = A_n$ ,

одержимо таке співвідношення між параметрами системи

$$F_1 + F_2 - 2F_T = a e^{-\beta t_1} \sin(\omega t_1 + \alpha) (e^{\beta \tau/2} - 1) c. \quad (42)$$

При дотриманні цієї умови в даній системі відразу ж настає усталений режим, минаючи перехідний процес. В розглянутих вище автоколивальних системах був тільки один стійкий граничний цикл, і тому в даних системах можуть існувати стаціонарні процеси тільки з однією амплітудою.

Цікавим є випадок, коли на автоколивальну систему з сухим і в'язким тертям діє гармонічна змушуюча сила  $H \sin(\rho t + \gamma)$ . При цьому вихідне диференціальне рівняння можна представити у вигляді

$$\ddot{q}_n + 2\beta \dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = F^0 \text{sign} \dot{q}_n / m + h \sin(\rho t + \gamma), \quad (43)$$

де  $h = H/m$ . Розв'язок його при допомозі способу затримки сигнум-функції буде у формі

$$q_n = \left[ a + \frac{2\beta_0 e^{\beta t_1}}{\sin(\omega t_1 + \alpha)} \cdot \frac{e^{\pi \beta(n-\nu)/\omega} - 1}{e^{\pi \beta/\omega} - 1} \right] e^{-\beta t} \times \quad (44)$$

$$+ \sin(\omega t + \alpha) + \beta_0 \text{sign} \dot{q}_n + \frac{H \sin(\rho t + \gamma - \varepsilon)}{m \sqrt{4\beta^2 \rho^2 + (\omega_0^2 - \rho^2)^2}}$$

Розглядаючи усталений процес (тобто для досить великих значень  $t$  і  $n$ ), його можна представити у вигляді

$$q = A_n \sin(\omega t + \beta) + A_\beta \sin(\rho t + \gamma - \varepsilon), \quad (45)$$

де амплітуда граничного циклу  $A_n = \beta_0 \text{cth}(\beta \tau / \omega)$  та

$$A_\beta = H / [m \sqrt{4\beta^2 \rho^2 + (\omega_0^2 - \rho^2)^2}]. \quad (46)$$

В загальному випадку коливання, що описуються рівнянням (45), не є періодичними. Однак на практиці часто зустрічаємо випадки, коли  $\omega$  і  $\rho$  близькі за значеннями, тобто  $|\omega - \rho| \ll \omega + \rho$ . Тоді рів-

няння (45) можна представити у вигляді

$$q = A(t) \sin [\omega + \beta - \theta(t)] \quad (47)$$

Це рівняння описує биття, через те що  $A(t)$  і  $\theta(t)$  є функціями, що повільно змінюються у часі. Період зміни амплітуди  $A(t)$  буде  $2\pi/(\omega - \rho)$ , а її максимальні та мінімальні за абсолютною величиною значення відповідно будуть рівні

$$A_{\max}(t) = d_0 \operatorname{cth}(\beta\tau/4) + H / [m \sqrt{4\beta^2 \rho^2 + (\omega_0^2 - \rho^2)^2}] \quad (48)$$

$$A_{\min}(t) = |d_0 \operatorname{cth}(\beta\tau/4) - H / [m \sqrt{4\beta^2 \rho^2 + (\omega_0^2 - \rho^2)^2}]|$$

Розглянемі також параметричні коливання. Як відомо, вони обумовлені звичайно зміною в часі жорсткості або маси і можливі лише в нестационарних системах. Вплив періодично змінної жорсткості в основному досліджений. Однак, якщо змінним параметром є маса, то навіть найпростіші коливання описувати аналітично досить важко. Окремі характеристики таких коливань, одержані наближеними методами, наведені в роботах Каюка Я.Ф., Анікієва Г.І., Бессонова А.П., Сільвестрова Е.Б. В зв'язку з цим одержання рівнянь таких коливань, хоча б за одним із законів зміни маси, дозволило б дати і якісну оцінку для інших законів її зміни. Для дослідження особливостей впливу сухого тертя на такі параметричні коливання розглянемо спочатку ці процеси в системах без опору і з в'язким тертям. При цьому припускаємо, що приєднання або відокремлення часток маси відбувається безударно при нульовій відносній швидкості в напрямку, перпендикулярному до швидкості руху системи.

Нехай система з одним ступенем вільності здійснює коливальні рухи на гладкій горизонтальній поверхні. Будемо вважати, що її маса змінюється за законом

$$m(t) = (\sqrt{m_0} + \beta t)^2, \quad (49)$$

де  $m_0$  - початкова маса, а  $\beta$  - коефіцієнт, що характеризує швидкість її зміни. Вихідне рівняння таких коливань має вигляд

$$(\sqrt{m_0} + \beta t)^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + c q = 0. \quad (50)$$

Тут  $c$  - коефіцієнт жорсткості, який приймаємо постійним. Для розв'язку цього рівняння : застосовуємо підстановку

$$e^z = (\sqrt{m_0} + \beta t) \rho, \quad (51)$$

де  $\rho$  - розмірний коефіцієнт . Тоді рівняння (50), виражене через нову змінну  $z$  , можна буде представити у формі

$$\beta^2 \left( \frac{d^2 q}{dz^2} - \frac{dq}{dz} \right) + c q = 0. \quad (52)$$

Розв'язуючи його, одержуємо корені характеристичного рівняння, які рівні  $0,5 \pm \sqrt{0,25 - c/\beta^2}$ . А поведінка системи залежить від знака підкореневого виразу. При  $c/\beta^2 > 0,25$  маємо закон незгасаючих коливань у вигляді

$$q = a \left[ \rho (\sqrt{m_0} + \beta t) \right]^{0,5} \sin \{ h \ln [\rho (\sqrt{m_0} + \beta t)] + d \}. \quad (53)$$

Тут  $h = \sqrt{c/\beta^2 - 0,25}$ , а  $d$  і  $a$  - постійні величини, що визначаються з початкових умов. Напівперіоди таких коливань  $\tau_n^*$  зростають за законом геометричної прогресії

$$\tau_n^* = \tau_{n-1}^* e^{\pi/h}. \quad (54)$$

Умовні амплітуди також зростають, а залежність між ними може бути представлена у формі

$$A_{n+2} = A_n \left[ 1 + \frac{\beta (1 + e^{\pi/h}) \tau_n^*}{\sqrt{m_0} + \beta (t_1 + \sum_1^{n-1} \tau_i^*)} \right]^{0,5}. \quad (55)$$

При  $c/\beta^2 \leq 0,25$  одержуємо аперіодичний рух, причому система, одержавши початкове збудження, продовжує поступово віддалятися від стану спокою.

Коли ж маса системи зменшується за законом

$$m(t) = (\sqrt{m_0} - \beta t)^2 \quad (56)$$

то для  $c/\beta^2 > 0,25$  спостерігаємо коливання із зменшуваними амплітудами та напівперіодами. При цьому коливання відбуваються до повного вичерпання маси. Якщо для такої зменшуваної маси  $c/\beta^2 \leq 0,25$ , то система, одержавши початкову швидкість, спочатку повільно віддаляється від стану спокою, а потім швидко до нього повертається.

Розглянено також подібні коливання і в системі з в'язким тертям. При цьому вважалось, що маса системи зростає за законом (49), а сила опору рухові буде у вигляді

$$R = \mu (\sqrt{m_0} + \beta t) dq/dt. \quad (57)$$

При  $4c > (\beta - \mu)^2$  одержано закон коливального руху у формі

$$q = a [\rho (\sqrt{m_0} + \beta t)]^{(\beta - \mu)/2\beta} \sin \left\{ (s/2\beta) \times \right. \\ \left. \times \ln [\rho (\sqrt{m_0} + \beta t)] + \alpha \right\}. \quad (58)$$

Тут прийнято  $s = [4c - (\beta - \mu)^2]^{0,5}$ . Закон (58) описує коливання із змінними амплітудою і періодами. При  $\beta > \mu$  умовні амплітуди зростають, при  $\beta < \mu$  вони зменшуються, і якщо  $\beta = \mu$  амплітуда постійна і рівна  $a$ . Напівперіоди таких коливань збільшуються за законом геометричної прогресії

$$\tau_n^* = \tau_{n-1}^* e^{2\pi\beta/s} \quad (59)$$

Залежність між суміжними амплітудами можна представити у вигляді

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} = \left[ 1 + \frac{\tau_n^* (1 + e^{2\pi\beta/s}) \beta}{\sqrt{m_0} + \beta (t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i^*)} \right]^{(\beta - \mu)/2\beta} \quad (60)$$

На рис.7 представлено графіки коливань для вказаних трьох випад-

ків при  $m_0 = 1 \text{ кг}$ ;  $c = 6,25 \text{ Н/м}$ ;  $q_0 = 0,2 \text{ м}$ ;  $\dot{q}_0 = 0,6 \text{ м/с}$ ;  $\beta = 0,1 \sqrt{\text{кг/с}}$ ;  $\rho = 1 \sqrt{\text{кг/с}}$  для таких значень  $\mu$ : крива 1 при  $\mu = 0,005 \sqrt{\text{кг/с}}$ , крива 2 при  $\mu = 0,1 \sqrt{\text{кг/с}}$  та крива 3 при  $\mu = 0,5 \sqrt{\text{кг/с}}$ .

Якщо у даному випадку зростаючої маси  $(\beta - \mu)^2 \geq 4c$ , то спос-

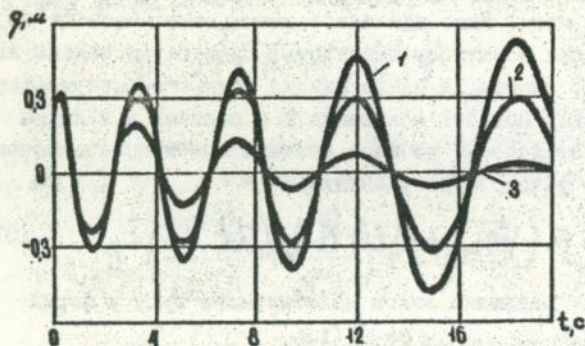


Рис. 7

терігаємо аперіодичні рухи системи. При цьому, якщо  $\beta > \mu$ , то система повільно віддаляється від стану спокою. У випадку  $\beta < \mu$  система, одержавши початкову швидкість, спочатку віддаляється, а потім повільно повертається до стану спокою.

Якщо розглянемо систему з масою, яке зменшується за законом (56), то при  $4c > (\mu + \beta)^2$  будемо спостерігати коливальні рухи до повного вичерпання маси із зменшуваними умовними амплітудами та напівперіодами. У випадку  $4c < (\mu + \beta)^2$  одержуємо аперіодичний рух, коли система прямує до стану спокою.

Розглянуті також коливання маси, що змінюються за законом (49), коли опор рухові у вигляді сухого тертя має форму

$$R = (\sqrt{m_0} + \beta t)^2 g f \text{ sign } \dot{q}_n, \quad (61)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння. Застосовуючи підстановку (51) і розглядаючи випадок  $4c > \beta^2$  знайдемо закон таких коливань у вигляді

$$q_n = a_n [\rho(\sqrt{m_0} + \beta t)]^{0,5} \sin \{ (h_1/2\beta) \ln [\rho \times (\sqrt{m_0} + \beta t)] + \alpha_n \} - \delta_1 [\rho(\sqrt{m_0} + \beta t)]^2 \text{ sign } \dot{q}_n. \quad (62)$$

Тут  $h_1 = \sqrt{4c - \beta^2}$ ;  $\delta_1 = g f / [(2\beta^2 + c)\rho^2]$ . Напівперіоди таких коливань зростають за законом

$$\tau_n^* = \tau_{n-1}^* e^{2\beta h_1 / k_1} \quad (63)$$

Щодо умовних амплітуд, то як і при в'язкому терті вони можуть збільшуватися, зменшуватися і бути постійними. Зростаючі та постійні амплітуди спостерігаються при дуже великих коефіцієнтах

$\beta$  і одночасно для досить малих  $f$ . Однак для звичайних значень  $f > 0,01$  та  $\beta < 0,2 \sqrt{\text{кг/с}}$  коливання будуть згасати.

Якщо маса системи убаває за законом (56), то напівперіоди і умовні амплітуди будуть зменшуватися.

На рис.8 зображе-

ний графік таких коливань, при дії сил сухого тертя для  $\beta = 0,1 \sqrt{\text{кг/с}}$ ;  $m_0 = 1 \text{ кг}$ ;  $c = 6,25 \text{ Н/м}$ ;  $q_0 = 0,2 \text{ м}$ ;  $\dot{q}_0 = 0,6 \text{ м/с}$ ;  $f = 0,02$ ;  $\rho = 1/\sqrt{\text{кг}}$ . При виділенні маси зменшується також і ширина зони застою  $2\delta_1 \rho \times (\sqrt{m_0} - \beta t)^2$  і тому коливання відбуваються до повного вичерпання маси.

Виявлені властивості сухого тертя при вимушених коливаннях механічних систем, як відмічено вище, можна використати в динамічних гасителях коливань. Однак найбільший ефект дає застосування сухого тертя як фільтра, що пропускає коливання тільки строго визначеного діапазону частот, в конструкціях сейсмостійких будівель. Відомо, що при землетрусах із чотирьох типів хвиль, що переносять енергії від гіпоцентра до споруди на поверхні Землі, найбільш небезпечними є  $S$ -хвилі (поперечні). Вони викликають найбільші прискорення, а період їх коливань перебуває в межах  $0,1 - 2 \text{ с}$ . Будівлі із звичайним жорстким закладенням у фундаменті, в залежності від їх геометричних параметрів і матеріалу, мають період першої

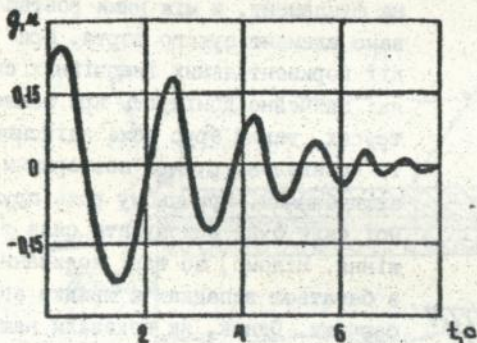
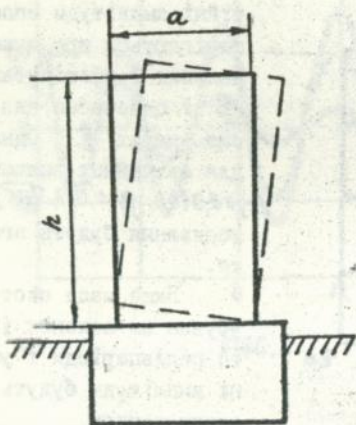


Рис. 8

форми коливань у межах  $\tau_c = 0,1-1,8$  с. Таким чином, споруди такої конструкції мають періоди власних коливань близькі до періоду найбільш небезпечних поперечних хвиль. І навіть на деякій віддалі від резонансу процес нагромадження деформацій при повторних землетрусах, незважаючи на всілякі підсилення, приводить до порівняно швидкого виходу з експлуатації таких споруд.

Представимо собі будівлю (рис.9), верхня частина якої має



форму бруса, що вільно опирається на фундамент, а між ними розташовано елемент сухого тертя. При дії горизонтальних інерційних сил, які звичайно домінують при землетрусах, такий брус може здійснювати коливальні рухи з повторними зіткненнями. При цьому роль пружної сили буде виконувати сила тяжіння. Відомо, що такі коливання в багатьох випадках є швидко згасаючими. Однак, як показали наші дослідження, якщо період змушуючої сили

Рис. 9

$$\tau'_c = 2\pi \sqrt{\frac{2h}{3g} \left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)} \quad (64)$$

то при певних умовах коливання будуть не тільки підтримуватися, але і зростати. Тут  $h$  та  $a$  відповідно висота і менша сторона будівлі. Вказана величина  $\tau'_c$  дуже близька до періоду вільних коливань бруса, як маятника, що підвішений у верхній точці, через яку проходить його вертикальна вісь. Назвемо величину  $\tau_c = \tau'_c$  умовним періодом власних коливань верхньої частини споруди. Величина цього періоду в залежності від  $h$  та  $a$  перебуває звичайно в межах 8-18 с, що в багато разів перевищує період коливань будівель з жорстким закладенням у фундаменті. А відношення  $\tau_c / \tau'_c$  коливається в межах від 4 до 10. Отже, відношення частот вимушених і власних коливань, згідно з графіком рис.2, буде відповідати глибокій зоні інерційного застою. Таким чином, при горизонтальних коливаннях фундаменту верхня частина будівлі не встигає реагувати на змушую-

чу силу такої великої частоти і залишається нерухомою.

Плоский ковзний пояс (рис.10) доцільно скласти із двох сталевих листів 1, між якими розташувати елемент сухого тертя 2. Останній являє собою шар графіту або фторопласту з малим коефіцієнтом тертя ковзання  $f$ . При спорудженні таких конструкцій слід враховувати можливість впливу і вертикальних складових сейсмічних інерційних сил, коли будівля може виявитися в безпосередній близькості від епіцентру.

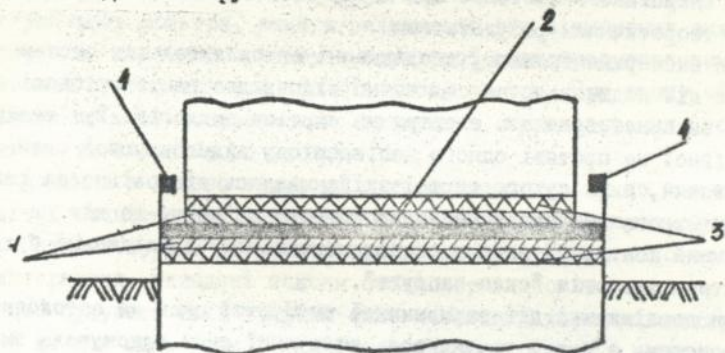


Рис. 10

Тому на гасіння коливань в вертикальній площині встановлюють пружні листи 3 із спеціальної гуми. Крім цього, слід влаштовувати обмежувальні упори 4 в продольному і поперечному напрямках споруди. Будівлі такої конструкції, при дотриманні певних критеріїв, можуть мати в плані найрізноманітнішу форму: прямокутну, коробчасту, дугоподібну тощо.

Експериментальна перевірка одержаних вище результатів теоретичних досліджень проводилась як на механічних, так і на електричних моделях, в залежності від виду досліджуваних коливань. Зокрема вільні та вимушені коливання з сухим тертям проводились на механічних моделях. Такі установки уявляли собою вертикальну трубу, розрізану по хорді, до кришки якої на пружинах підвішувались циліндричні вантажі. Їх діаметр відповідав діаметру труби, щоб створювалась сила сухого тертя. Зміщення вантажів від положен-

ня рівноваги фіксувалось на осцилографах.

Змушуюча сила створювалась за допомогою електродвигуна, який приєднаний до вантажу. На вісь цього електродвигуна насаджувался ексцентрично вантажник. Проекція його відцентрової сили на вертикальну вісь уявляла собою змушуючу гармонічну силу.

В таких експериментальних установках чітко спостерігаються згадані вище зони (залипання, проковзування, усталених коливань, а також інерційного застою). При цьому спостерігалась добра збіжність з теоретичними результатами.

При експериментальному дослідженні автоколивальних систем, коли час дії підштовхуючих сил точно відповідає напівперіодові коливань, використовувалась електрична система аналогій. Тут величина постійної на протязі одного напівперіоду підштовхуючої сили (або навпаки, сили сухого тертя) здійснювалась відповідно за рахунок позитивного або негативного зворотного зв'язку, що діє на електричний контур. В даному експериментальному дослідженні була використана аналогія "сила-напруга".

При дослідженні дії гармонічної змушуючої сили на автоколивальну систему з сухим тертям роль змушуючої сили виконувала зміна е.р.с. Вона поступала від генератора стандартних електричних сигналів ГЗ-ЗЗ. Ці коливання теж фіксувались на екранах осцилографів. Слід відмітити, що різниця між теоретичними та експериментальними даними в таких електричних системах не перевищувала 4-6%, що декілька є меншим, ніж в механічних.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

В процесі розв'язку поставленої задачі були одержані і обґрунтовані такі теоретичні і практичні результати:

1. При допомозі запропонованого способу затримки сигнум-функції вперше був одержаний неперервний закон вільних коливань системи при дії сил як сухого, так і при сполученні з ним в'язкого тертя. Він дозволяє визначити положення системи, а також її швидкість і прискорення в будь-який момент часу при довільних початкових умовах. Такі закони коливального руху одержані для системи, що маєяк один, так і багато ступенів вільності.

2. Для згаданих видів тертя з врахуванням початкових умов одержано неперервне рівняння фазової траєкторії, що дозволяє опи-

нити стан даної системи. Це дало можливість замінити досить складну методику зображення такої траєкторії (окремо для кожної напівплощини або розріз їх з наступним зсувом по горизонтальній осі) на найпростіший спосіб такої побудови.

3. При розгляді дії на систему із сухим та в'язким тертям гармонічної змушуючої сили знайдено неперервні закони, що описують перехідний процес. З них одержані рівняння, що описують і стаціонарні коливання системи. При цьому встановлено, що сухе тертя відіграє роль фільтра, який в залежності від відношення сили сухого тертя до величини амплітуди змушуючої сили пропускає вимушені коливання строго визначеного діапазону частот. При цьому чітко встановлено межі чотирьох зон: залипання, проковзування, усталених коливань та інерційного застою.

Додання в'язкого тертя до сухого приводить як до зменшення амплітуд стаціонарних коливань, так і до звуження пропускових ділянок. Останні зручно визначити при допомозі графіка сило-частотних характеристик. Виведені закони стаціонарних коливальних рухів дозволяють будувати такі графіки сило-частотних характеристик, додатні як для одно- так і для багатомасових систем з урахуванням дії згаданих видів тертя.

4. В автоколивальній системі з сухим і в'язким тертям одержаний неперервний закон руху при дії як симетричної так і несиметричної підштовхуючої сили. Він дозволяє описувати не тільки перехідний процес, але і усталений режим. З нього визначається також рівняння фазової траєкторії і величина амплітуди граничного циклу.

Приведене співвідношення між параметрами автоколивальної системи, при дотриманні якого в ній одразу ж настає усталений режим, минаючи перехідний процес.

5. При розгляді параметричних коливань вперше одержано неперервне рівняння руху системи з урахуванням дії як в'язкого, так і сухого тертя для одного із законів зміни маси. Встановлено, що період таких коливань зростає при збільшенні маси і спадає при її зменшенні. А розмахи коливань при зміні згаданого параметра залежить як від коефіцієнта, що характеризує швидкість його зміни, так і від сили сухого або в'язкого тертя, діючої в даній системі. Зокрема, для зростаючої маси розмахи коливань при певних умовах можуть спадати, зростати або залишатися постійними.

У випадку зменшення маси як при наявності розглянутих сил тертя, так і у їх відсутності, розмахи коливань спадають. При цьому такі рухи із зменшуваним періодом відбуваються до повного вичерпання маси.

6. Показано використання виявлених властивостей сухого тертя в ряді галузей техніки. Зокрема, застосування в динамічному гасителі коливань демпферів сухого тертя сприяє як появі зони інерційного застосу, так і додаткової антирезонансної частоти в основній системі. Визначені залежності між параметрами, при призначенні яких не тільки основна система, але і динамічний гаситель коливань залишаються нерухомими. Однак найбільший ефект дає використання властивостей сухого тертя в запропонованих конструкціях сейсмостійких споруд. В них верхня частина будівлі, що вільно лежить на фундаменті, при дії найбільш небезпечних поперечних хвиль не встигає реагувати на змушуючу силу такої великої частоти і залишається нерухою.

Вказані конструкції вже знайшли своє застосування при будівництві сейсмостійких споруд в м.Ялті і м.Спітаку.

Основний зміст дисертації опублікований в наступних роботах:

1. Кислий А.А. Вынужденные колебания груза в системе с сухим и вязким трением под действием линейно-возрастающей нагрузки //Сопrotивление материалов и теория сооружений.- 1987.-№51.- С.28-31.
2. Кислий А.А., Мишевский С.В. Свободные крутильные колебания системы с одной степенью свободы при наличии вязкого и несимметричного сухого трения //Изв. ВУЗов. Машиностроение. - 1987.-№9.- С.18-20.
3. Кислий А.А. Колебания маятника в среде с вязким трением при наличии подталкивающей силы постоянной величины.- Киев: Укр НИИ-ТИ, 1985.- Юс.
4. Кислий А.А. Свободные колебания груза переменной массы в присутствии сил вязкого трения //Сопrotивление материалов и теория сооружений.- 1988. -№52. - С.95-98.
5. Кислий А.А. Колебания груза под действием импульсивной нагрузки в присутствии сил сухого и вязкого трения. - Киев.- УкрНИИ-ТИ, 1986. - 8с.
6. Кислий А.А. Отличительные особенности демпфирования в виде кулонова трения от вязкого при вынужденных колебаниях механичес-

- ких систем // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: Тез. докладов XV Республиканской конференции. - Киев. 1989. - С.56-57.
7. Кислый А.А. Вынужденные колебания груза в системе с сухим трением под действием гармонической возмущающей силы // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1989. - №54. - С.83-85.
8. Кислый А.А. Определения величины тока в ветви контура лампового генератора с  $\square$ -характеристикой способом задаржки сигнум-функции. Киев: Укр НИИТИ 1986. - 12с.
9. Кислый А.А., Радчук В.А. Защита сооружений в сейсмических зонах // Транспортное строительство. - 1990. - №6. - С.48-50.
10. Кислый А.А. Вынужденные колебания в системе с сухим и вязким трением под действием гармонической возмущающей силы // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1989. - №55. - С.28-30.
11. Кислый А.А., Зинько Я.А. Свойство сухого трения при вынужденных крутильных колебаниях // Динамика, прочность и проектирование машин и приборов. - 1990. - №240. - С.50-52.
12. Кислый А.А. Здания с многослойным сейсмоизолирующим поясом сплошного типа // Строительная механика и расчет сооружений. - 1990. - №4. - С.79-83.
13. Кислый А.А. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы в присутствии сил сухого трения // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1990. - №57. - С.64-67.
14. Кислый О.О., Зинько Я.А. Крутильные колебания системы из сухим и вязким трением под действием несимметричных подштовхующих моментов // Динамика, прочность та проектування машин та приладів. - 1991. - №259. - С.41-43.
15. Кислый А.А. Свойство сухого трения при вынужденных колебаниях механических систем и его применение в сейсмостойких сооружениях // Строительная механика и расчет сооружений. - 1991. - №5. - С.35-39.
16. Кислый А.А. Свободные колебания груза переменной массы при действии сил кулонова трения // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1991. - №58. - С.60-63.
17. Кислый А.А. Сейсмостойкие конструкции зданий, основанные на свойствах сухого трения // Надежность и эффективность нетрадиционных систем сейсмозащиты зданий и сооружений. Материалы

- научно-технической конференции. Севастополь 1991. - С.44-45.
18. Кислый А.А. Воздействие гармонической возмущающей силы на автоколебательную систему с сухим и вязким трением //Сопrotивление материалов и теория сооружений. - 1991. - №59. - С.98-101.
19. Кислый А.А. Особенности проектирования сооружений со сплошным сейсмоизолирующим поясом //Известия ВУЗов. Строительство. 1992. - №11. - С.13-16.
20. Кислый А.А. Колебания в системах с демпфирующими элементами сухого трения //Проблемы прочности.- 1992. - №4. - С.33-36.
21. Кислый А.А., Нестер Н.А. Учет особенностей демпфирования в виде кулонова трения в ряде автоколебательных процессов // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наукова думка. 1992.- С.142-145.
22. Кислый А.А. Ограничение основных параметров зданий со сплошным сейсмоизолирующим поясом //Сейсмостойкое строительство.- 1992.- №9-10. -С.29-31.
23. Кислый А.А. Определение коэффициента динамичности системы с демпферами сухого и вязкого трения //Механика гироскопических систем. - 1992. -№11. С.26-29.
24. Kisly A.A. Use of dry friction properties in building constructions with seismoinsulating multilayer belt // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. - Moscow: 1990. - V. 10A. - p.140-145.
25. Kisly A.A. Oscillations in the Systems with Damping Elements of Dry Friction // Strength of materials: New York. December, 1992. p. 381-384.

К





469730

Ab 26.40  
**Ab 26.489**