Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ГОШКО Любомир Васильович

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЧИСЛА ПЕРЕТИНІВ ГРАНИЦІ ДАНОЇ ОБЛАСТІ ПОСЛІДОВНІСТЮ СЛАБКО ЗБІЖНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

01.01.05 - теорія ймовірності та
математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики АН України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук,
професор
ПОРТЕНКО М.І.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук,
професор
ШУРЕНКОВ В.М.

кандидат фізико-математичних наук
ЄФІМЕНКО С.В.

Ведуча організація : Інститут прикладної математики та механіки АН України, м.Донецьк

Захист відбудеться "23" лютого 1993р.
о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01
при Інституті математики АН України за адресою :
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "22" січня 1993р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Локальну поведінку траєкторій випадкового процесу характеризує певною мірою такий функціонал від процесу, як число перетинів ним фіксованого рівня в одновимірному випадку або фіксованої поверхні в багатовимірному випадку. Якщо процес, що досліджується, є дифузійним, то згаданий функціонал може приймати лише два значення: або нуль, якщо траєкторія процесу протягом даного часу не потрапляє на даний рівень / чи поверхню /, або нескінченість, якщо вона в якийсь момент часу на даному інтервалі потрапляє на цей рівень / чи поверхню /. Через цю обставину доводиться вводити дискретну апроксимацію процесу, тобто розглядати число перетинів фіксованого рівня / чи поверхні / не траєкторією, а послідовністю її значень в дискретні моменти часу, скажімо, з кроком $1/n$ / n - натуральне число /. Потім, переходячи до границі, коли $n \to \infty$, відшукують нормуючі множники, які б давали нетривіальний граничний розподіл для числа перетинів даного рівня / чи поверхні / дискретною апроксимацією процесу. Саме в такій постановці цю задачу було розглянуто в роботах Й.І.Гіхмана для одновимірного дифузійного процесу з досить гладкими коефіцієнтами, М.І.Портенка для багатовимірних дифузійних процесів також з гладкими коефіцієнтами / а також для одновимірного стійкого процесу /, С.В. Єфіменко, М.І.Портенка для деяких класів узагальнених дифузійних процесів. Цілком природним є факт, що граничні розподіли у вказаних роботах пов"язані з розподілом такого функціоналу, як локальний час, що його проводить процес в даній точці чи на даній поверхні. Інший підхід до вивчення локальної поведінки траєкторій броунівського руху чи дифузійного процесу в околі даної поверхні /"поверхнею" в одновимірному випадку будемо називати точку / полягає в підрахунку числа таких моментів часу / до моменту часу t /, в які траєкторія потрапляє на поверхню після відвідин зовнішньої частини ε-околу поверхні. Тут також робиться граничний перехід при $\varepsilon \downarrow 0$ і виявляється, що при певному нормуванні вказані величини мають граничний розподіл, пов"язаний також з локальним часом, що його процес проводить на даній поверхні.

Дана дисертаційна робота, що реферується, знаходиться в руслі першого з наведених вище підходів. Вона присвячена вивченню граничної поведінки кількості перетинів даної поверхні дискретними апроксимаціями послідовності / узагальнених / дифузійних процесів, про які відомо, що їх дифузійні матриці є сталими /тобто не залежать від n /, а вектори переносу збігаються при $n \to \infty$ до граничних лише в слабкому розумінні. Слід зауважити, що в роботах Й.І.Гіхмана розглядався також не фіксований дифузійний процес, а послідовність ланцюгів Маркова, що в певному розумінні збігалась до дифузійного процесу. так що насправді в цих роботах підраховувалась кількість перетинів даного рівня послідовністю ланцюгів Маркова і вивчалась гранична поведінка цієї кількості при умові, що граничний дифузійний процес має досить гладкі локальні характеристики / тобто коефіцієнти переносу та дифузії /. І хоча згадані вище дискретні апроксимації / узагальненого / дифузійного процесу можна розглядати як частинний випадок схеми Й.І.Гіхмана, всі наведені нижче результати не є прямими наслідками його робіт саме через те, що ті процеси, які тут розглядаються, є дифузійними лише в певному узагальненому сенсі. Це означає, що їх локальні характеристики можуть бути локально необмеженими і навіть узагальненими / в розумінні Л.Шварца / функціями, а не гладкими, як то було у Й.І.Гіхмана.

Мета роботи. Довести граничні теореми для числа перетинів фіксованої поверхні дискретними апроксимаціями послідовностей узагальнених дифузійних процесів, про які відомо, що їх вектори переносу збігаються до граничних лише в слабкому сенсі / матриці дифузії залишаються незмінними /.

Методика досліджень. Вказані граничні теореми доведені з допомогою асимптотичного аналізу деяких співвідношень, що їх задовольняють характеристичні функції числа перетинів даної поверхні дифузійним процесом / розд.III /. Одним з найважливіших моментів доведення є локальні граничні теореми, що дають умови, при яких густини ймовірностей переходу послідовності дифузійних процесів збігаються до граничного / розд.II /. В свою чергу ці теореми доводяться з допомогою так званих рівнянь Колмогорова для збуреної дифузії. Теорія таких рівнянь наведена в розд.I.

Наукова новизна та практична цінність. В роботі встановлено такі твердження:

1. Сформульовані та доведені теореми про існування та вигляд граничних розподілів для числа перетинів фіксованих поверхонь дискретними апроксимаціями послідовностей /узагальнених/ дифузійних процесів при умові, що їх коефіцієнти переносу збігаються до граничних в слабкому сенсі.

2. Сформульовані та доведені теореми про збіжність до граничних густин ймовірностей переходу послідовності / узагальнених /

дифузійних процесів, якщо відомо, що до граничних збігаються в слабкому сенсі їх коефіцієнти переносу.

3. Для побудови математичних моделей явища дифузії в нерегулярних середовищах запропоновано розглядати пару рівнянь, що їх природно називати прямим і оберненим рівняннями Колмогорова для збуреної дифузії. Ці рівняння є досить зручним інструментом при доведенні як локальних граничних теорем, так і теорем для числа перетинів даної поверхні послідовністю дифузійних процесів.

Апробація роботи і публікації. По результатах дисертації було зроблено доповіді на семінарі відділу теорії випадкових процесів і на засіданні секції з теорії ймовірності та математичної статистики при Інституті математики АН України.

Основні результати опубліковано в / I-3 /.

Структура та об"єм роботи. Дисертація об"ємом 97 сторінок машинописного тексту складається зі вступу, трьох розділів / 10 параграфів / і списку використаної літератури з 33 назв.

В роботі розглянуто три ситуації. В першій з них заданою є послідовність дифузійних процесів $x_n(t)$, $n=1,2,\dots$ в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ з обмеженою невиродженою матрицею дифузії $b(x)$ та послідовністю векторів переносу $a_n(x)$, що задовольняє умови

1/ $\sup\limits_n \|a_n\|_p < \infty$ при деякому $p > d$;

2/ існує така $\mathbb{R}^d$-значна функція $a(x)$ на $\mathbb{R}^d$, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, a_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, a(x)\, dx ,$$

якою б не була дійсна неперервна фінітна функція $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^d$. Через S позначимо гіперплощину $S=\{x\in\mathbb{R}^d: (x,\nu)=\ell\}$ / тут ν - фіксований орт в $\mathbb{R}^d$, ℓ - фіксоване дійсне число, $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ /, яка розділяє простір $\mathbb{R}^d$ на дві частини

$$D_+=\{x\in\mathbb{R}^d: (x,\nu)>\ell\}, \quad D_-=\{x\in\mathbb{R}^d: (x,\nu)<\ell\}.$$

Покладемо для $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$v(x,y)=\mathbb{1}_{D_+}(x)\,\mathbb{1}_{D_-}(y)+\mathbb{1}_{D_-}(x)\,\mathbb{1}_{D_+}(y) ,$$

де через $\mathbb{1}_\Gamma(x)$ позначається індикатор множини $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$. Випадкова величина

$$\nu_k^{(n)}=\sum_{i=1}^{k} v\left(x_n\left(\tfrac{i-1}{n}\right), x_n\left(\tfrac{i}{n}\right)\right) \qquad /1/$$

визначає число перетинів гіперплощини S послідовністю випадкових векторів $x_n(0), x_n(\frac{1}{n}),\dots, x_n(\frac{k}{n})$ / тут $k=1,2,\dots$ /. Основним результатом §1 розділу III є наступне твердження, в якому через

$G(t,x,y)$, $t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^d$ позначено густину ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу з матрицею дифузії $b(x)$ та вектором переносу $a(x)$.

Теорема 1. Якщо виконані умови /1/-/2/, то при довільних $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$ / через $[\alpha]$ позначається ціла частина дійсного числа α /

$$\lim_{n\to\infty} M_x \exp\{i\lambda n^{-\frac{1}{2}} \eta^{(n)}_{[nt]}\} = u(t,x,\lambda),$$

де $u(t,x,\lambda)$ - єдиний розв"язок рівняння

$$u(t,x,\lambda) = 1 + i\lambda\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_S u(t-s,y,\lambda)\, G(s,x,y)\,(b(y)\nu,\nu)^{\frac{1}{2}}\, d\sigma_y \qquad /2/$$

/ тут внутрішній інтеграл є поверхневим інтегралом по змінній y /.

В другій з вище згаданих ситуацій мова йде про послідовність узагальнених дифузійних процесів $x_n(t)$ в $\mathbb{R}^d$, які визначаються напівгрупою операторів $T_t^{(n)}$ / $t>0$ /, що діє на обмежену вимірну функцію $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^d$ за формулою

$$T_t^{(n)}\varphi(x) = T_t^0\varphi(x) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y)\,\frac{\partial T_\tau^0\varphi(y)}{\partial\nu}\, q_n(y)\, d\sigma_y. \qquad /3/$$

Тут покладено $S=\{x\in\mathbb{R}^d: (x,\nu)=0\}$ - гіперплощина в $\mathbb{R}^d$, ортогональна фіксованому орту $\nu\in\mathbb{R}^d$; $g(t,x,y)=(2\pi t)^{-d/2}\exp\{-(x-y)^2/2t\}$ - густина ймовірності переходу стандартного вінерівського процесу в $\mathbb{R}^d$; $T_t^0\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)g(t,x,y)dy$ - напівгрупа операторів, що відповідає d-вимірному вінерівському процесові; $\frac{\partial}{\partial\nu}$ означає похідну по просторовій змінній в напрямку ν; $q_n(y)$ - задана послідовність неперервних функцій на S, для яких $|q_n(y)|<1$ при всіх $y\in S$ та $n=1,2,\dots$; внутрішній інтеграл в формулі для $T_t^{(n)}$ є поверхневим інтегралом по змінній y. Формула /3/ визначає неперервний процес Маркова $x_n(t)$ в $\mathbb{R}^d$, для якого матриця дифузії є одиничною матрицею, а вектор переносу задається формулою $a_n(x)=\nu q_n(x)\delta_S(x)$, де $\delta_S(x)$ - узагальнена функція в $\mathbb{R}^d$, дія якої на неперервну фінітну функцію зводиться до інтегрування останньої по гіперплощині S. Визначимо формулою /1/ величини $\eta_k^{(n)}$ для цього процесу / в означені D_+ та D_- - слід вважати, що $l=0$ /, і, припустивши, що $q_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ в слабкому розумінні, поставимо запитання про граничну при $n\to\infty$ поведінку величин $n^{-1}\eta^{(n)}_{[nt]}$ для фіксованого $t>0$.

Виявляється, що самого припущення про слабку збіжність послідовності $q_n(x)$ до нуля замало для того, щоб можна було гарантувати існування граничного при $n\to\infty$ розподілу величини $\zeta^{(n)}_{[nt]}$ з певним нормуючим множником. Потрібна ще умова, яка б пов"язувала швидкість збіжності послідовності $q_n(x)$ до нуля з величиною кроку дискретизації, тобто з n. Позначимо для $t>0$, $x\in S$ та натуральних n

$$H_n(t,x)=\int_S (2\pi t)^{-\frac{d-1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} q_n(y)\,d\sigma_y$$

Ясно, що при фіксованих $t>0$ та $x\in S$ $\lim_{n\to\infty} H_n(t,x)=0$, якщо функції $q_n(x)$ задовольняють умову:

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \varphi(x)q_n(x)\,d\sigma_x=0\ , \qquad /4/$$

якою б не була неперервна фінітна функція φ на S. Більше того, за цієї умови збіжність послідовності $H_n(t,x)$ до нуля навіть рівномірна відносно змінних (t,x), коли вони змінюються на компактах, що містяться в множині $(0,\infty)\times S$. З іншого боку, якщо фіксувати n, то $\lim_{t\downarrow 0} H_n(t,x)=q_n(x)$ і оскільки, взагалі кажучи, послідовність q_n не збігається рівномірно, подвійний граничний перехід при $t\downarrow 0$ і $n\to\infty$ може приводити до різних наслідків. Наступна умова якраз і пов"язує швидкість слабкої збіжності послідовності $q_n(x)$ до нуля та величину кроку дискретизації. Ми припускаємо, що існує така вимірна функція $\beta(t)$ на $[0,\infty)$, що виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\int_S H_n\left(\tfrac{t}{n},z\right)\psi(z)q_n(z)\,d\sigma_z=\beta(t)\int_S \psi(z)\,d\sigma_z\ , \qquad /5/,$$

якою б не була неперервна фінітна функція ψ на S. Очевидно, має бути $|\beta(t)|\leq 1$ при всіх $t\geq 0$.

Основним результатом §2 розділу III є наступне твердження.

Теорема 2. Припустимо, що послідовність $q_n(x)$ задовольняє умови /4/,/5/. Тоді при $t\geq 0$, $x\in R^d$, $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty} P_x\left\{n^{-1}\zeta^{(n)}_{[nt]}<\alpha\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^{\frac{\alpha+\gamma r(x)}{\gamma}} \exp\left\{-\frac{\ell^2}{2t}\right\}d\ell\ , \qquad /6/$$

де $r(x)$- віддаль від точки $x\in R^d$ до гіперплощини S, а стала γ визначається співвідношенням $\gamma=\sqrt{\frac{2}{\pi}}-2\varkappa$

$$\varkappa=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_0^1\sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}}\ \frac{\beta(\tau+\theta)}{\tau+\theta}\,d\theta \qquad /7/$$

В третій ситуації розглядається послідовність одновимірних дифузійних процесів $x_n(t)$ з одиничним коефіцієнтом дифузії та коефіцієнтом переносу $a_n(x)=na(nx)$, де $a(x)$ - задана на R^1 дійсна обмежена функція, для якої $\|a\|_{L_1}<1$. Покладаючи $D_+=\{x\in R^1: x>0\}$, $D_-=\{x\in R^1: x<0\}$, утворимо для натуральних m, n, k величини

$$\zeta_k^{(n,m)}=\sum_{j=1}^{k} v\left(x_m\left(\frac{j-1}{n}\right), x_m\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$

і поставимо питання про граничні розподіли величин $\zeta_{[nt]}^{(n,m)}$ для $t>0$, коли m та n узгоджено зростають до нескінченості. Відповідь на це питання міститься в наступній теоремі, що є основним результатом §3 розділу III. Попередньо введемо деякі позначення. Через $G_n(t,x,y)$ позначимо густину ймовірності переходу процесу $x_n(t)$, так що $G_1(t,x,y)$ - це густина ймовірності переходу одновимірного дифузійного процесу з одиничним коефіцієнтом дифузії та коефіцієнтом переносу $a(x)$. Через $A(x)$ позначимо первісну функцію для $a(x)$, а саме

$$A(x)=\int_{-\infty}^{x} a(y)dy\ ,\ x\in R^1.$$

Позначимо тепер $q=A(+\infty)$, $c=th\,q=(e^{q}-e^{-q})/(e^{q}+e^{-q})$.

<u>Теорема 3.</u> При $n\to\infty$ величини $n^{-\frac{1}{2}}\zeta_{[nt]}^{(m,n)}$ мають граничний розподіл

$$F_{t,x}(\theta)=\lim_{n\to\infty} P_x\{n^{-\frac{1}{2}}\zeta_{[nt]}^{(n,m)}<\theta\}$$

для довільних $t\geq 0$, $x\in R^1$, $\theta\neq 0$, який визначається формулою

$$F_{t,x}(\theta)=\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^{\frac{\theta+\ell|x|}{\ell}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2t}\right\}dz\ , \qquad /8/$$

де: а/ $\ell=(1-c^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ у випадку, коли $m=(\mu n)^{\frac{1}{2}\gamma}$ для деяких констант $\mu\in(0,\infty)$ та $\gamma\in(0,1)$;

$$б/\ \ell=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{e^{-q}}{ch\,q}\left[\int_0^{\infty}e^{2A(y)}dy\int_{-\infty}^{0}G_1(\mu,y,z)dz+\int_{-\infty}^{0}e^{2A(y)}dy\int_0^{\infty}G_1(\mu,y,z)dz\right]$$

у випадку, коли $m=(\mu n)^{\frac{1}{2}}$ для деякої сталої $\mu\in(0,\infty)$;

в/ $\ell=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-q}}{ch\,q}\exp\{2A(0)\}$ у випадку, коли $m=(\mu n)^{\frac{1}{2\gamma}}$ для деяких сталих $\mu\in(0,\infty)$ та $\gamma\in(1,\infty)$.

Зауважимо, що при $n\to\infty$ процес $x_n(t)$ збігається в слабкому розумінні до процесу косого броунівського руху, що відповідає значенню параметра $c = th\,q$. Це такий процес $x(t)$, що має своїм коефіцієнтом дифузії тотожну одиницю, а коефіцієнтом переносу – функцію $c\delta(x)$, де $\delta(x)$ – δ-функція Дірака. Густина ймовірності переходу цього процесу задається формулою $/ t>0,\ x\in R^1,\ y\in R^1 /$

$$G(t,x,y)=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}+\frac{c\,\mathrm{sign}\,y}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{(|x|+|y|)^2}{2t}}. \qquad /9/$$

Доведення теорем I-3 грунтується на аналізі деяких співвідношень, що їх задовольняють характеристичні функції величин $\xi^{(n)}_{[nt]}$. В деяких випадках / наприклад, в теоремі 1 / успішно провести цей аналіз допомагають локальні граничні теореми для густини ймовірності переходу тих процесів, що тут розглядаються. І хоча в інших випадках / наприклад, в теоремах 2,3 / одних лише локальних граничних теорем замало для того, щоб можна було здійснити бажаний граничний перехід, все ж локальні граничні теореми самі по собі заслуговують на певну увагу, і тому їм присвячено розділ II дисертації. Вона складається з трьох параграфів, в кожному з яких йдеться про одну з трьох вище згаданих ситуацій. В §I розглянуто ситуацію теореми 1.

<u>Теорема 4.</u> Нехай $G_n(t,x,y)$ - густина ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу в R^d з невиродженою обмеженою гельдеровою матрицею дифузії $b(x)$ та вектором переносу $a_n(x)$, що задовольняє умову $\sup_n \|a_n\|_{L_p}<\infty$ при деякому $p>d$. Припустимо, що для деякої R^d-значної функції $a(x)$ виконано співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^d}\varphi(x)a_n(x)dx=\int_{R^d}\varphi(x)a(x)dx,$$

якою б не була фінітна неперервна функція φ на R^d. Тоді при всіх $t>0,\ x\in R^d,\ y\in R^d$

$$\lim_{n\to\infty}G_n(t,x,y)=G(t,x,y),$$

де $G(t,x,y)$ - густина ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу з тією ж матрицею дифузії $b(x)$ та вектором переносу $a(x)$. Крім того в кожній області вигляду $(0,T]\times R^d\times R^d$ при скінчених T має місце нерівність

$$|D_x^m G_n(t,x,y)|\le K_T\, t^{-\frac{d+m}{2}}\exp\left\{-\mu\frac{|x-y|^2}{t}\right\} \qquad /10/$$

з деякими додатними сталими K_T і μ. Тут $m=0,1$, а D_x^m - символ довільної частинної похідної по змінних $x^1,\dots,x^d$ порядку m.

Наступний результат відноситься до ситуації, описаної в теоремі 2. Позначимо через $G_n(t,x,y)$ густину ймовірності переходу процесу, що описується напівгрупою /3/. Ця густина існує і при $y\notin S$ може бути заданою за допомогою формули

$$G_n(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,z)\frac{\partial g(\tau,z,y)}{\partial \nu_z}q_n(z)d\sigma_z \quad /11/$$

Неважко зрозуміти, що при переході змінної y через гіперплощину S густина $G_n(t,x,y)$ має стрибок. Позначимо для $y\in S$

$$G_n(t,x,y\pm)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}G_n(t,x,y\pm\varepsilon\nu)$$

Тоді з теореми про стрибок нормальної похідної потенціалу простого шару та з рівняння /11/ дістаємо

$$G_n(t,x,y\pm)=g(t,x,y)(1\mp q_n(y)),$$

так що при $q_n(y)$ функція $G_n(t,x,y)$ не є неперервною в точці $y\in S$. Що стосується значень функції $G(t,x,y)$ при $y\in S$, то їх можна вважати рівними правій частині /11/, де під інтегралом розуміємо пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару. Неважко зрозуміти, що воно дорівнює нулеві, оскільки при $z\in S$ та $y\in S$ маємо

$$\frac{\partial g(\tau,z,y)}{\partial \nu_z}=0.$$

Наступна теорема є основним результатом §2 розділу II.

<u>Теорема 5.</u> Якщо послідовність функцій $q_n(y)$ на S така, що $|q_n(y)|\le 1$ при всіх $y\in S$ і, крім того,

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \varphi(y)q_n(y)d\sigma_y=0,$$

якою б не була неперервна фінітна функція φ на S, то при всіх $t>0$, $x\in R^d$, $y\in R^d$

$$\lim_{n\to\infty}G_n(t,x,y)=g(t,x,y)$$

Крім того, має місце оцінка

$$G_n(t,x,y)\le 2(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\}$$

при всіх $t>0$, $x\in R^d$, $y\in R^d$.

Сформулюємо тепер локальну граничну теорему, що доведена в §3 розділу II.

<u>Теорема 6.</u> Нехай $G_n(t,x,y)$ - густина ймовірності переходу одновимірного дифузійного процесу з одиничним коефіцієнтом дифузії та коефіцієнтом переносу $a_n(x)=na(nx)$, де $a(x)$ - обмежена функція на R^1, для якої $\|a\|_{L_1}\le 1$. Тоді при всіх $t>0$, $y,x\in R^1/y\ne 0/$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t,x,y) = G(t,x,y),$$

де функція $G(t,x,y)$ визначається формулою /9/ з костантою $c = th\, q$, $q = \int_{R^1} a(x)dx$. При цьому мають місце нерівності

$$G_n(t,x,y) \le \frac{1}{1-\|a\|_{L_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}},$$

$$\left|\frac{\partial G_n}{\partial x}(t,x,y)\right| \le \frac{1}{1-\|a\|_{L_1}} \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

при всіх $t>0$, $x\in R^1$, $y\in R^1$.

Результати розділу II / теореми 4-6 / хоч і мають допоміжний характер / вони використовуються при доведенні теорем I-3 /, все ж вони представляють і певний самостійний інтерес. Їх доведення грунтується на аналізі рівнянь, що їх задовольняють функції $G_n(t,x,y)$, та подальшому граничному переході / при $n\to\infty$ / в цих рівняннях. Теорії цих рівнянь присвячено перший розділ дисертації.

Рівняння, про які йдеться в розділі I, ми називаємо рівняннями Колмогорова для збуреної дифузії. При розгляді руху частинки, що дифундує в певному нерегулярному середовищі, корисною буває точка зору на цей рух як на суперпозицію досить регулярної дифузії і певного нерегулярного збурення. Ця точка зору дозволяє в деяких ситуаціях написати рівняння, дещо простіші, ніж ті, які б довелося писати, коли б цю точку зору не брати до уваги.

Розглянемо / неоднорідний / дифузійний процес в R^d з локальними характеристиками / $a(s,x)$, $b(s,x)$ / / вектор переносу та матриця дифузії /. Припустимо, що ці функції достатньо регулярні, так що існує фундаментальний розв"язок $g(s,x,t,y)$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^{d} a^j(s,x)\frac{\partial u}{\partial x^j} = 0 \qquad /12/$$

Тут $b_{ij}(s,x)$ - елементи матриці $b(s,x)$, а $a^j(s,x)$ - координати вектора $a(s,x)$.

Функція $g(s,x,t,y)$ є густиною ймовірності переходу неоднорідного дифузійного процесу в R^d з локальними характеристиками / $a(s,x)$, $b(s,x)$ /. При певних умовах $g(s,x,t,y)$ як функція аргументів (t,y) при фіксованих (s,x) задовольняє в області $(t,y)\in(s,\infty)\times R^d$ рівняння

$$-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(b_{ij}(t,y)u\right)-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(a^j(t,y)u\right)=0 \qquad /13/$$

Припустимо, що тепер на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ задана нерегулярна функція $\tilde{a}(s,x)$, що приймає значення в $\mathbb{R}^d$, і хочемо розглянути дифузійний процес з локальними характеристиками $/a(s,x)+\tilde{a}(s,x),\ b(s,x)/$. Тоді для густини $G(s,x,t,y)$ ймовірності переходу такого процесу можна було б написати рівняння типу /12/, /13/ з заміною функцій a^i на $a^i+\tilde{a}^i$. Однак, якщо вважати відомою функцію $g(s,x,t,y)$, то можна функцію $G(s,x,t,y)$ розшукати як розв"язок наступної пари рівнянь, одне з яких інтегро-диференціальне, а друге - інтегральне:

$$G(s,x,t,y)=g(s,x,t,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,\tau,z)\left(\nabla_z G(\tau,z,t,y),\tilde{a}(\tau,z)\right)dz \qquad /14/$$

$$G(s,x,t,y)=g(s,x,t,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} G(s,x,\tau,z)\left(\nabla_z g(\tau,z,t,y),\tilde{a}(\tau,z)\right)dz \qquad /15/$$

Тут $0\le s<t<\infty$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, ∇_z - символ градієнта по змінній z. Рівняння /14/ є рівнянням відносно першої пари змінних функції G, так що його слід розглядати як аналог рівняння /12/ і називати оберненим рівнянням Колмогорова для збуреної дифузії. Що стосується рівняння /15/, то воно є аналогом рівняння /13/ і його варто називати прямим рівнянням Колмогорова для збуреної дифузії.

В розділі I дисертації доводиться, що при певних умовах на функції $a(s,x)$ та $b(s,x)$ розв"язки рівнянь /14/ і /15/ співпадають, якщо функція $\tilde{a}(s,x)$ задовольняє таку умову

$$\|\tilde{a}\|_{p,T}=\left(\int_0^T d\tau\int_{\mathbb{R}^d}|\tilde{a}(\tau,z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

при всіх $T\in(0,\infty)$ та деякому $p>d+2$. При цьому розв"язок $G(s,x,t,y)$ рівнянь /14/, /15/ є густиною ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу з локальними характеристиками $/a(s,x)+\tilde{a}(s,x),\ b(s,x)/$.

В однорідному випадку, / §4, розділ I /, тобто у випадку, коли функції a, b, $\tilde{a}$ не залежать від часу, функції g та G залежать від s та t лише через їх різницю. Якщо позначити $g(t,x,y)=g(s,x,s+t,y)$, $G(t,x,y)=G(s,x,s+t,y)$, то рівняння /12/ - / 15/ можна записати у вигляді :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{j=1}^{d} a^j(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}, \qquad /12^0/$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\left(b_{ij}(y)u\right)-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(a^j(y)u\right), \qquad /13^0/$$

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)\left(\nabla_z G(\tau,y,z),\tilde{a}(z)\right)dz, \qquad /14^0/$$

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} G(t-\tau,x,z)\left(\nabla_z g(\tau,z,y),\tilde{a}(z)\right)dz. \qquad /15^0/$$

Функція $g(t,x,y)$, як функція аргументів (t,x), при фіксованому $y\in\mathbb{R}^d$ задовольняє в області $\{(t,x): t>0, x\in\mathbb{R}^d\}$ рівняння /12^0/; як функція аргументів (t,y) при фіксованому $x\in\mathbb{R}^d$ вона задовольняє рівняння /13^0/ в області $\{(t,y): t>0, y\in\mathbb{R}^d\}$. Розв"язки рівнянь /14^0/ та /15^0/ співпадають при умові , що $a(x)$ обмежена та гельдерова функція, функція $b(x)$ обмежена гельдерова та рівномірно невироджена, а функція $\tilde{a}(x)$ така, що при деякому $p>d$ маємо $\|\tilde{a}\|_{L_p}<\infty$. Ці розв"язки визначають густину $G(t,x,y)$ ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу з локальними характеристиками / $a(x)+\tilde{a}(x)$, $b(x)$ /. Саме рівняння /14 / та /15 / використовувались при доведенні теорем 1 - 6 .

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах :

1. Гошко Л.В. О сходимости плотностей вероятностей перехода последовательности диффузионных процессов // Стохастические уравнения и граничные теоремы .- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.- С.39-45.

2. Гошко Л.В. Про збіжність узагальнених дифузійних процесів при слабкій збіжності коефіцієнтів переносу // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. -Киев: Ин-т математи-

ки АН Украины, I992.- С.26-34.

3. Гошко Л.В., Портенко М.І. Про число перетинів фіксованої поверхні послідовностями узагальнених дифузійних процесів.- Київ, I992.- 35 с. - (Препр./ АН України. Ін-т математики; 92.32).

Підп. до друку 05.01.93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 0,93. Умов. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,7.
Тираж 100 прим. Зам. 3 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

Ав 26.548