Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

АЙСТРАХАНОВ Дмитро Дарамович

УДК 517.968

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННОЮ ПАМ'ЯТТЮ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття ученого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук ЯЦЕНКО Ю. П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук ЧИКРІЙ А. О.,

доктор фізико-математичних наук ПЕРЕВЕРЗЄВ С. В.

Провідна організація: Київський державний університет імені Т. Г. Шевченко.

Захист відбудеться « »————19 р. о———— годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207 Київ 207, просп. Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий « »———— 199 р.

Учений секретар
спеціалізованої ученої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В умовах дефіциту ресурсів могутнім засобом забезпечення життєздатності економічних та технічних систем (ТС) виявляється ліквідація (згортання) застарілих елементів ТС, виробничих потужностей з низькими техніко-економічними показниками. Цей важіль керування досить часто виявляється більш ефективним, ніж керування перерозподілом ресурсів, запасів та іншє. Тому актуальною прикладною задачею теорії керування при моделюванні розвитку ТС є задача розрахунку (оцінки) оптимальних термінів служби елементів систем з урахуванням темпів технічного прогресу (ТП) у відповідній галузі. Моделювання оптимальних по різним критеріям термінів заміни елементів ТС має важливе значення для обгрунтування раціонального розподілу засобів на підтримку працездатності та ефективності таких систем на потрібному рівні.

Перспективним математичним апаратом розв'язку подібних задач є інтегральні моделі з керованою пам'яттю (ІМ), що являють собою подальший розвиток інтегральних динамічних макроекономічних моделей, запропонованих В.М.Глушковим, і інтенсивно досліджуються в Інституті кібернетики ім. В.М.Глушкова АН України. Вони тісно пов'язані з іншими класами економіко-математичних моделей, але враховують фактор ТП, що здійснився, та найбільш ефективно описують процеси оновлення різних систем, що розвиваються в умовах дефіциту ресурсів. Розглянуті у роботі інтегральні моделі керованих систем зі змінною пам'яттю засновані на односекторній динамічній моделі і відображають основні риси та відмінності усього класу ІМ. Науковий та практичний інтерес представляє теоретичне дослідження задач у даних моделях, розвиток чисельних методів їх розв'язку, розробка науково обгрунтованих, але достатньо простих та наочних методик оновлення ТС.

Мета роботи:
- розробка модифікацій ІМ для деяких прикладних ТС;
- постановка нових математичних задач оптимізації термінів оновлення ТС з урахуванням ТП, що здійснився;
- дослідження якісної поведінки оптимальних траєкторій;
- розробка чисельних алгоритмів розрахунку оптимальних темпів і пропорцій оновлення елементів систем.

Методика дослідження. Методологія загального підходу до дослідження базується на підставі робіт В.М.Глушкова, В.В.Іванова, Ю.П.Яценко та інших. У роботі використовуються методи нелінйного функціонального аналізу, теорія функцій дійсної змінної, теорія інтегральних рівнянь, теорія оптимального керування.

Наукова новизна. Дисертаційна робота являє собою комплексне дослідження теоретичних, обчислювальних і прикладних аспектів в ІМ керованих систем зі змінною пам'яттю. Уперше сформульовано та якісно досліджено нові змістовні постановки оптимізаційних задач (ОЗ) в моделях, що розглядаються: мінімізація працевитрат; витрат на оновлення та експлуатаційних витрат; вибір оптимальних вартості і продуктивності елементів систем. На основі проведеного дослідження ОЗ запропоновано та обгрунтовано магістральний підхід до аналізу оптимальних темпів і пропорцій оновлення елементів систем. Уперше сформульовано постановки задач оцінки та наближеного знаходження магістральних траєкторій для різних випадків задання вхідної інформації, розроблено наближені алгоритми розв'язання інтегрофункціональних рівнянь відносно магістралі. Запропоновано методики розрахунку оптимальних термінів оновлення деяких прикладних систем.

Практична цінність. Результати роботи можуть бути використані у науково-дослідних організаціях, що займаються питаннями моделювання розвитку економічних і технічних систем при створенні математичного та програмного забезпечення для задач керування процесами оновлення елементів систем, а також при кількісному дослідженні інтегрофункціональних рівнянь, що виникають у оптимізаційних задачах в ІМ.

Впровадження результатів роботи. Робота виконувалася у рамках госпдоговірних НДР Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова АН України в 1988-1992 рр. Основні науково-методичні результати використані у робочих матеріалах та науково-технічних звітах за бюджетними та госпдоговірними НДР прикладного характеру і передані у ряд організацій (м. Москва).

Апробація роботи. Результати роботи доповідалися на XIII і XIV Республіканських семінарах по моделюванню систем, що розвиваються (Славське, 1989, 1990), I і II семінарах "Прикладні проблеми моделювання та оптимізації" (Славське, 1991, 1992), науково-практичному семінарі "Діалогова оптимізація планово-керівних рішень і проблеми її впровадження в практику" (Київ, 1989), III Республіканській конференції "Інтегральні рівняння у прикладному моделюванні" (Одеса, 1989), Республіканській конференції "Екстремальні задачі теорії наближення і їх застосування" (Київ, 1990), I Всесоюзній конференції "Проблеми енергозберігання" (Київ, 1991), V Всесоюзній конференції по проблемах керування розвитком систем (Київ, 1991).

Публікації. Основні положення дисертації міститься у 12 друкованих роботах.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, висновку та списку літератури. Обсяг роботи - 111 сторінок, із них основного тексту 101 сторінка та 8 рисунків. Список літератури включає 109 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність, новизна та мета дослідження, приведена коротка характеристика роботи.

У першому розділі розглянуто основні результати досліджень IM, описано IM керованих систем зі змінною пам'яттю, розглянуто математичні задачі, що виникають (ідентифікація, прогнозування, оптимізація, дослідження магістральних властивостей).

У дисертації розглядаються системи зі складноформалізованим критерієм ефективності їх функціонування. Для характеристики ефективності таких систем у роботі використовується поняття потенціалу - сукупності матеріальних і духовних можливостей системи, які можуть бути використані для розв'язання задач, що стоять перед нею. Критерієм ефективності функціонування служить підтримка потенціалу на рівні, достатньому для здійснення системою своїх функцій, а оновлення проводиться таким чином, що потенціал був би не нижчим за заданий рівень життєздатності системи.

Представимо систему у вигляді $N=3$ (можливо більше) підсистем:

1) основної (реалізує функції системи, наприклад випуск продукту);

2) керівної (здійснює збір, збереження, обробку та передачу інформації про систему та зовнішні умови);

3) обслуговуючої (допоміжне виробництво, транспортування, зберігання запасів, засоби підтримки та відновлення обладнання, що експлуатується, підготовка персоналу тощо).

Кожну підсистему можна описати співвідношеннями виду

$$C_i(t)=\int_{a_i(t)}^{t} \beta_i(\tau,t)m_i(\tau)d\tau, \tag{1}$$

$$P_i(t)=\int_{a_i(t)}^{t} m_i(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$\varphi_i(t)=\gamma_i(t)\,m_i(t)\,,\ i=\overline{1,N}\,,\ N=3,\tag{3}$$

де $c_i(t)$ - потенціал підсистеми у рік t ; $\beta_i(\tau,t)$ - питома (одинична) ефективність у рік t функціонуючої в підсистемі однієї одиниці обладнання (OO), що створена в році τ ; $\gamma_i(t)$ - ціна однієї нової OO у рік t ; $m_i(t)$ - кількість OO, що вводяться у лави у рік t ; $a_i(t)$ - часова границя згортання застарілого устаткування,

$$a_i(t)<t\,,\ a_i'(t)>0\tag{4}$$

з початковими умовами

$$a_i(t_0)=a_{i_0}\geq 0\,,\ m_i(\tau)\equiv m_{i_0}(\tau),\ \tau\in[0,t_0].\tag{5}$$

Потенціал системи дорівнює сумі потенціалів підсистем із ваговими коефіцієнтами, що враховують важливість підсистеми для функціювання системи та існуючі (бажані) пропорції між ними у конкретних умовах. Оскільки підсистеми взаємопов'язані, вважається, що головним видом обладнання є обладнання основної підсистеми ($i=1$), а мета інших - забезпечення його найбільшої ефективності. Тоді можна покласти $m_i(t)=\alpha_i(t)\,m_1(t)$, де $\alpha_i(t)$ - невідомий або заданий коефіцієнт пропорційності між кількостями використовуваних у підсистемах OO ($\alpha_1=1$).

Задачі оптимального керування зі зв'язками (1) або (2) виникають, якщо число невідомих функцій ($m(t)$, $a(t)$ та інші) в IM більше за число рівнянь і для замикнення задачі додається деякий екстремальний критерій якості

$$I(m,a)\rightarrow\max_{m,a}(\min)\tag{6}$$

Методика якісного дослідження поведінки розв'язків задач (1)-(6) базується на звуженні області допустимих керувань $m(t)$

$$0\leq m(t)\leq M\,,\tag{7}$$

при якому неголономні обмеження на фазову змінну $a(t)$ (4) апріорі виконуються, виводі градієнту функціоналу (6) за допомогою множників Лагранжу, вивченні одержаної при цьому системи інтегрофункціональних рівнянь та її зв'язку з розв'язком OЗ.

Похибка магістрального підходу (переходу від OЗ до рівнянь для магістралей) пов'язана з виключенням з аналізу початкових умов (тобто початкового стану системи). Отримані з розв'язання інтегрофункціональних рівнянь режими указують тенденції, основні закономірності оновлення системи. Відсутність або невірогідність вхідної інформації виправдовує застосування приведених методик розрахунку оптимальних термінів і кількості обладнання.

<u>Другий розділ</u> присвячений дослідженню OЗ у даних моделях. Будемо вважати, що: 1) задані функції задовольняють умові

Ліпшиця з константою L . Усі перелічені функції додатні та задовольняють обмеженню-рівності моделі при $t=t_0$; 2) $\beta(\tau,t)$ не спадає по τ ; 3) $m(t)\in L_{\infty}[t_0,T]$ - задовольняє умові Ліпшиця по t , обмежена при довільних фіксованих t , а також м.в. на $[t_0,T]$ задовольняє (7).

1. В ІМ (1)-(3) розглянуто "класичну" для математичної економіки задачу максимізації ефективності ТС з урахуванням витрат на оновлення систем, що міститься у визначенні $m_i(t)$, $a_i(t)$, $t\in[t_0,T]$, таких, що

$$I=\int_{t_0}^{T}\lambda_i(t)\Big[\int_{a_i(t)}^{t}\beta_i(\tau,t)m_i(\tau)d\tau-\gamma_i(t)m_i(t)\Big]dt\to\max_{m_i,a_i} \tag{8}$$

((2), β_i , P_i , λ_i)*

Лема 2.1. При $P_i(t)\in C^{L}_{[t_0,T]}$ існують єдині функції

$$\underline{m}_i(t)=\max\{0,P_i'(t)\},\ i=\overline{1,N}, \tag{9}$$

такі, що відповідні $\underline{a}_i'(t)\geq 0$.

Теорема 2.1. Для довільних керувань $m_i(t): 0\leq m_i(t)\leq M$, що задовольняють на $[t_0,T]$ обмеженню

$$\underline{m}_i(t)\leq m_i(t)\leq M,\ i=\overline{1,N}, \tag{10}$$

де $\underline{m}_i(t)$ визначається (9), існують єдині неперервні на $[t_0,T]$ функції $a_i(t)$, що задовольняють (2),(4).

Таким чином, обмеження (10) є більш сильними, ніж (7); усі розв'язки задачі оптимального керування (2),(8),(10),(5) належать до області допустимих керувань задачі (2),(8),(4),(5).

Лема 2.2 дозволяє визначити градієнт функціоналу

$$I'_{m_i}(t)=-\lambda_i(t)\gamma_i(t)+\int_{t}^{\underline{a}_i^{-1}(t)}\lambda_i(\tau)[\beta_i(t,\tau)-\beta_i(a_i(\tau),\tau)]d\tau,\ i=\overline{1,N}, \tag{11}$$

де

$$\underline{a}_i^{-1}(t)=\begin{cases}a_i^{-1}(t), & t_0\leq t\leq a_i(T),\\ T, & a_i(T)\leq t\leq T.\end{cases} \tag{12}$$

На всьому інтервалі розв'язок задачі внутрішнім бути не може.

Теорема 2.2. $\forall i,\ i=\overline{1,N}$ існує момент $a_i<T$, такий, що розв'язок задачі (8),(2) $m_i^*(t)=\underline{m}_i(t),\ t\in(a_i,T]$. Якщо $\dfrac{\partial\beta_i(\tau,t)}{\partial\tau}>0$ і для деяких $t>t_0$ виконується

$$\int_{t_0}^{T}\lambda_i(\tau)[\beta_i(t,\tau)-\beta_i(t_0,\tau)]d\tau\geq\lambda_i(t)\gamma_i(t),\ i=\overline{1,N},$$

то на деякій початковій частині $[t_0,a_i]$ $m_i^*(t)$ не збігається з $\underline{m}_i(t)$,

---

* Тут та далі у дужках указані номер обмеження моделі та задані функції. Для всіх ОЗ виконується (4),(5),(7).

причому $m_i^*(t) > \underline{m}_i(t),\ t \in \Delta_i \subset [t_0, Q_i],\ mes\,\Delta_i > 0$.

Магістраллю будемо називати функцію $\tilde{a}(t),\ t \in [t_0, \infty)$, таку, що $I'(\tilde{a}, t) \equiv 0\ ,\ t \in [t_0, \infty)$ (якщо вона існує). В даній задачі магістральні траєкторії визначаються інтегрофункціональним рівнянням

$$\int_t^{a_i^*(t)} \lambda_i(\tau)[\beta_i(t,\tau) - \beta_i(a_i(\tau),\tau)]d\tau - \lambda_i(t)\gamma_i(t) = 0,$$

де $a_i(t) < t$ - терміни ліквідації застарілих елементів, що треба знайти ($t - a_i(t)$ - термін служби елементів), а задані β_i і γ_i визначаються темпами ТП і вартістю елементів ТС, що підтверджує результати дослідження даної задачі в односекторній ІМ ($N=1$), для якої доведені теореми про магістраль, в силу яких при $T \to \infty$ оптимальна траєкторія $a^*(t) \to \tilde{a}(t)$ на асимптотично більшій частині $[t_0, T]$ (при $T = \infty$: $a^*(t) \underset{T-t_0 \to \infty}{\equiv} \tilde{a}(t),\ t \in [\mu, \infty)\ ,\ \mu \geq t_0$, а значення $\mu - t_0$ залежить тільки від величини непогодження $|\tilde{a}(t_0) - a_0|$) (Ю.П.Яценко, 1988-1992).

У дисертації досліджено наступні нові ОЗ в односекторній ІМ ($N=1$).

2. <u>Задача мінімізації працевитрат та витрат на оновлення при заданому рівні ефективності ТС</u> міститься у визначенні функцій $m(t)$, $a(t)\ ,\ t \in [t_0, T]$, таких, що

$$I = \int_{t_0}^{T} [\int_{a(t)}^{t} m(\tau)d\tau + \gamma(t)m(t)]dt \to \min_{m,a} \tag{13}$$

((1), β , C , γ).

Тут $\gamma(t)$ - разові витрати на впровадження ОЗ в момент t .

<u>Лема 2.3.</u> Існує функція $m_{min}(t) = \max\{0, \underline{m}(t)\}$, де $\underline{m}(t)$ - розв'язок рівняння

$$\underline{m}(t) = \frac{c'(t)}{\beta(t,t)} - \int_{a_0}^{t_0} \min\{\beta'_t(\tau,t), 0\} \frac{\underline{m}(\tau)}{\beta(t,t)} d\tau - \int_{t_0}^{t} \min\{\beta'_t(\tau,t), 0\} \frac{m_0(\tau)}{\beta(t,t)} d\tau,$$

така, що відповідна $a'_{min}(t) > 0$.

У лемі 2.4. отримано оцінку розв'язку $\underline{m}(t)$.

<u>Теорема 2.3.</u> Для довільних керувань $m(t) \in L_{\infty[t_0,T]}$, таких, що $m_{min}(t) \leq m(t) \leq M$, де m_{min} визначається лемою 2.3, існує єдина м.в. неперервна на $[t_0, T]$, що знаходиться з рівняння (1) функція $a(t)$, причому $a(t) < t$, $a'(t) \geq 0$, $a'(t) \in L_{\infty[t_0,T]}$.

<u>Зауваження 1.</u> Зокрема, якщо виконуються умови $C'(t) \leq M\beta(t,t)$ і $\beta'_t(\tau,t) > 0$, то виконується $m_{min}(t) \leq M$.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $C'(t) \leq 0$ або $0 \leq C'(t) \leq \int_{z(t)}^{t_0} \beta'_t(\tau,t)m_0(\tau)d\tau$,

де $z(t) < t_0$ визначається з задачі Коші

$$\beta(z(t),t)m_0(z(t))z'(t) - \int_{z(t)}^{t_0} \beta'_t(\tau,t)m_0(\tau)d\tau = -c'(t),\ z(t_0) = a_0,$$ то $m_{min}(t) = 0$.

Теорема 2.4. Градієнт функціоналу у задачі (13),(1) має вигляд

$$I_m'(t) = \int_t^{a^{-1}(t)} [1 - \frac{\beta(t,\tau)}{\beta(a(\tau),\tau)}] d\tau + \gamma(t),$$

де $a^{-1}(t)$ визначається (12).

Лема 2.5. При заданих $c(t)$, $\beta(\tau,t)$, $t\in[t_0,T]$, $\tau\in[0,T]$, м.в. неперервній $a'(t)>0$ рівняння (1) відносно невідомої m має єдиний розв'язок $m(t)\in L_\infty[t_0,T]$.

Розглянемо питання можливості існування внутрішніх розв'язків задачі (на всьому інтервалі розв'язок внутрішнім бути не може).

Теорема 2.5. Нехай $m^*(t)$, $a^*(t)$, $t\in[t_0,T]$ - розв'язок ОЗ (13),(1). Тоді існує момент Q, $t_0\le Q\le T$, такий, що при $t\in(Q,T]$ градієнт $I_m'>0$ та $m^*(t)\equiv m_{min}(t)$, $a^*(t)\equiv a_{min}(t)$, $t\in[t_0,T]$.

Теорема 2.6. Якщо на $[t_0,T)$ $\beta(\tau,t)$ не спадає по τ і для деяких $t>t_0$ виконується

$$\gamma(t) < \int_t^T [\frac{\beta(t,\tau)}{\beta(t_0,\tau)} - 1] d\tau,$$

то існує підмножина $\Delta\subset[t_0,T]$, $mes\,\Delta>0$, така, що оптимальне керування $m^*(t)>m_{min}(t)$, $t\in\Delta$.

Таким чином, якщо розв'язок $m^*(t)$, $t\in[t_0,T]$ є внутрішнім в області $m_{min}(t)\le m(t)\le M$ на деякому інтервалі $(t_1,t_2)\subset[t_0,T]$, то градієнт $I_m'(t)$ повинен дорівнювати нулю при $t\in(t_1,t_2)$:

$$\int_t^{a^{-1}(t)} [1 - \frac{\beta(t,\tau)}{\beta(a(\tau),\tau)}] d\tau + \gamma(t) = 0. \qquad (14)$$

Викликає інтерес дослідження властивостей рівняння (14).

Властивість 1. При $\beta(\tau,t)=e^{c\tau}$, $\gamma(t)=\gamma=const$ рівняння (14) має розв'язок $\tilde{a}(t)=t-d$, $t\in[t_0,\infty)$, де константа $d>0$ визначається з нелінійного рівняння: $d+(1-e^{cd})/c+\gamma=0$, при $c\ll 1$ константа $d\approx\sqrt{\frac{2\gamma}{c}}$.

Властивість 2. Якщо $\beta(\tau,t)=\beta(\tau)$, $\gamma(t)=const$, рівняння (14) має розв'язок $\tilde{a}(t)$, $t\in[t_0,\infty)$ і: 1) $\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)}=const$, то функція $t-\tilde{a}(t)=const$; 2) $\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)}$ зростає (спадає), то функція $t-\tilde{a}(t)$ спадає (зростає) по t .

Властивість 3. Якщо $\beta(\tau,t)=\frac{1}{c_2-c_1\tau}>0$, $\gamma(t)=k\beta(t)$, то рівняння (14) має розв'язок $\tilde{a}(t)=t-d$, $t\in[t_0,\infty)$, де константа $d=\sqrt{\frac{2k}{c_1}}>0$.

3. Задача мінімізації працевитрат, витрат на оновлення і експлуатаційних витрат при заданому рівні ефективності ТС полягає в визначенні функцій $m(t)$, $a(t)$, $t\in[t_0,T]$, таких, що

$$I=\int_{t_0}^T [\int_{a(t)}^t m(\tau)d\tau + \int_{a(t)}^t \delta(\tau,t)m(\tau)d\tau + \gamma(t)m(t)]dt \to \min_{m,a} \qquad (15)$$

((1), c , γ , β , δ).

Тут $\delta(\tau,t)$ - питомі експлуатаційні витрати в році t для однієї ОО, що створена у році τ .

Множину допустимих керувань , враховуючи вигляд рівняння (1), будемо вважати визначеною як і в задачі 2: $m_{min}(t) \le m(t) \le M$.

Теорема 2.7. Градієнт функціоналу в задачі (15),(2) має вигляд

$$I'_m(t) = \int_t^{a^{-1}(t)} [(1+\delta(t,\tau)) - (1+\delta(a(\tau),\tau)) \frac{\beta(t,\tau)}{\beta(a(\tau),\tau)}] d\tau + \gamma(t),$$

де $a^{-1}(t)$ визначається (12).

Теорема 2.8. Нехай $m^*(t), a^*(t)$, $t \in [t_0,T]$ - розв'язок ОЗ (15),(2). Тоді при $\gamma > 0$ існує момент Q , $t_0 \le Q < T$, такий, що при $t \in (Q,T]$ градієнт $I'_m > 0$ і $m^*(t) \equiv m_{min}(t), a^*(t) \equiv a_{min}(t), t \in (Q,T]$.

Теорема 2.9. Якщо на $[t_0,T]$ β не спадає по τ, $\frac{\partial}{\partial \tau}[\frac{\beta(\tau,t)}{\delta(\tau,t)}] \ge 0$ і для деяких $t > t_0$ виконується

$$\gamma(t) < \int_t^T [(1+\delta(t_0,\tau)) \frac{\beta(t,\tau)}{\beta(t_0,\tau)} - (1+\delta(t,\tau))] d\tau,$$

то існує підмножина $\Delta \subset [t_0,T], mes\,\Delta > 0$, така, що оптимальне керування $m^*(t) > m_{min}(t), t \in \Delta$.

Позначимо I'_{1m} градієнт функціоналу в задачі 2, I'_{2m} - градієнт функціоналу в задачі 3. Тоді має місце

Лема 2.6. Градієнти функціоналів I'_{1m} і I'_{2m} пов'язані між собою співвідношенням

$$I'_{2m} = I'_{1m} + \int_t^{a^{-1}(t)} [\delta(t,\tau) - \delta(a(\tau),\tau) \frac{\beta(t,\tau)}{\beta(a(\tau),\tau)}] d\tau .$$

Отже, задачі притаманні усі властивості попередньої задачі, більше того, магістралі задач 2 и 3 співпадають при $\frac{\partial}{\partial \tau}[\frac{\beta(\tau,t)}{\delta(\tau,t)}] = 0$ (якщо темпи зростання продуктивності та експлуатаційних витрат нових ОО співпадають).

Властивість 1. При $\beta(\tau,t) = e^{c\tau}, \delta(\tau,t) = const, \gamma(t) = \gamma = const$ рівняння $I'_m(t) = 0$ має розв'язок $\tilde{a}(t) = t - d$, $t \in [t_0,\infty)$, де константа $d > 0$ визначається з нелінійного рівняння: $(1+\delta)d + \frac{(1+\delta)}{c}[1 - e^{cd}] + \gamma = 0$, при $c \ll 1$ константа $d \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{c(1+\delta)}}$.

Властивість 2. Якщо $\beta(\tau,t) = \beta(\tau), \gamma(t) = const$, $\delta(\tau,t) = const$ або $\delta(\tau,t) = K\beta(\tau,t)$, рівняння $I'_m(t) = 0$ має розв'язок $\tilde{a}(t)$, $t \in [t_0,\infty)$ і: 1) $\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} = const$, то функція $t - \tilde{a}(t) = const$, 2) $\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)}$ зростає (спадає), то функція $t - \tilde{a}(t)$ спадає (зростає) по t .

Властивість 3. Якщо $\beta(\tau,t) = \frac{1}{c_1 t - c_1 \tau} > 0$, $\delta(\tau,t) = \delta$, $\gamma(t) = K\beta(\tau,t)$ то рівняння $I'_m(t) = 0$ має розв'язок $\tilde{a}(t) = t - d$, $t \in [t_0,\infty)$, де константа $d = \sqrt{\frac{2K}{c(1+\delta)}} > 0$.

4. Задача вибору оптимальної вартості елементів ІС полягає у визначенні функцій $\gamma(t)$, $m(t)$, $a(t)$, $t \in [t_0,T]$, таких, що

$$I = \int_{t_0}^{T} [\int_{a(t)}^{t} \beta_1(\gamma(\tau)) \beta_2(\tau,t) m(\tau) d\tau - \gamma(t) m(t)] dt \to \max_{\gamma, m, a} \qquad (16)$$

((2), β_1, β_2, P).

Тут $\gamma(t)$ - ціна нової ОО у році t ; $\beta_1(\gamma(t))$ - фактор, що враховує зростання продуктивності (ефективності) від ціни, і відповідно витрат на розробку та впровадження нової ОО в році τ, $\beta_2(\tau,t)$ - ефективність у році t ОО, введеної в році τ.

Як і для задачі 1, обмеження на керування замінюються більш жорсткими (10), при яких обмеження (4) апріорі виконуються.

Теорема 2.10. Градієнт функціоналу в задачі (16),(2) має вигляд

$$I'_m(t) = -\gamma(t) + \int_t^{a^{-1}(t)} [\beta_2(\tau,t)\beta_1(\gamma(t)) - \beta_2(a(\tau),\tau)\beta_1(\gamma(a(\tau)))]\,d\tau,$$

$$I'_\gamma(t) = m(t)[\int_t^{a^{-1}(t)} \beta_2(t,\tau)(\beta_1(\gamma(t)))'_\gamma\,d\tau - 1],$$

де $a^{-1}(t)$ визначається (12).

Теорема 2.11. Існує момент Q, $t_0 \le Q \le T$ такий, що при $t \in [Q,T]$ розв'язок ОЗ (16),(2) $m^*(t)$, $\gamma^*(t)$ задовольняє співвідношенням $m^*(t) = m_{min}(t)$, $\gamma^*(t) = \underline{\gamma}$, $t \in [t_0,T]$, де $m_{min}(t)$ і $\underline{\gamma}$ - мінімально допустимі $m(t)$ і $\gamma(t)$ в силу обмежень (10) і $0 < \underline{\gamma} \le \gamma(t) \le \overline{\gamma}$.

Теорема 2.12. Якщо $\gamma(t)$ не спадає по t, $\beta_2(\tau,t)$ не спадає по τ і виконується

1) $(\beta_1(\gamma))'_\gamma > d > 0$; 2) $\int_t^T \beta_2(\tau,u)\,du > \frac{1}{d}$;

3) $\int_t^T [\beta_2(t,\tau) - \beta_2(t_0,\tau)]\,d\tau > \frac{\overline{\gamma}}{\beta_1(\underline{\gamma})}$ для деяких $t > t_0$, то існує підмножина $\Delta \subset [t_0,T]$, $mes\,\Delta > 0$, така, що оптимальне керування $m^*(t)$, $\gamma^*(t)$ більше за мінімально допустимі, $t \in \Delta$.

Зауваження. Умови теореми завжди виконуються на достатньо великому інтервалі $[t_0,T]$, якщо $\beta_2(\tau,t)$ не прямує до нуля при $\tau - t_0 \to \infty$.

Властивість 1. Система рівнянь $I'_m = 0$, $I'_\gamma = 0$ при $\beta_1(\gamma) = B\gamma^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$, $\beta_2(\tau,t) = e^{c\tau}$, $c>0$ має розв'язок $\tilde{\gamma}(t) = [Bd(1-\alpha)]^{1/\alpha} e^{ct/\alpha}$, $\tilde{a}(t) = t - d$, $t \in [t_0,\infty)$, де константа $d > 0$ визначається із нелінійного рівняння

$$cd - 1 + e^{-cd/\alpha} = 0.$$

5. Задача вибору оптимальної продуктивності елементів ТС полягає у визначенні функцій $m(t)$, $a(t)$, $\eta(t)$, $t \in [t_0,T]$, таких, що

$$I = \int_{t_0}^{T} [\int_{a(t)}^{t} [\beta_1(\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \eta(u)\,du]\beta_2(t)m(\tau)\,d\tau - \gamma(t)\eta(t) - \lambda(t)m(t)]\,dt \to \max_{\eta,m,a} \qquad (17)$$

((2), β_1, β_2, P, λ, γ), $0 \le \underline{\eta} \le \eta(t) \le \overline{\eta}$.

Тут $\eta(t)$ - підвищення продуктивності ОО моменту створення t ; $\gamma(t)$ - витрати на підвищення продуктивності нової ОО на одиницю; $\lambda(t)$ - ціна нової ОО, $\beta_1(\tau)$ - екзогенна компонента продуктивності нових ОО, що залежить від зовнішніх по відношенню до системи факторів (якщо такі фактори відсутні, то $\beta_1(\tau)=\beta_0=const$); $\beta_2(t)$ - "автономний прогрес", що враховує фактори, які залежать від теперішнього часу.

Задача (17) з фазовими обмеженнями (4) зводиться до задачі з більш жорсткими обмеженнями тільки на керування $m(t)$ виду (10).

Теорема 2.13. Градієнт функціоналу в задачі (17),(2) має вигляд

$$I'_m(t)=\int\limits_t^{a^{-1}(t)}[\beta_2(t)(\beta_1(t)+\int\limits_{a(\tau)}^{\tau}\eta(u)du-\beta_1(a(\tau))]d\tau-\lambda(t),$$

$$I'_\eta(t)=\int\limits_t^{T}m(\tau)\int\limits_t^{a^{-1}(t)}\beta_2(u)du\,d\tau-\gamma(t),$$

де $a^{-1}(t)$ визначається (12).

Зауваження. Градієнт I'_η має вигляд

$$I'_\eta(t)=\begin{cases}\int\limits_t^{T}\beta_2(u)P(u)du-\gamma(t), & t\geq a^{-1}(t_0),\\ \int\limits_t^{a^{-1}(t)}\beta_2(u)\int\limits_{t_0}^{u}m(\tau)d\tau du+\int\limits_{a^{-1}(t_0)}^{T}\beta_2(u)P(u)du-\gamma(t), & t_0\leq t\leq a^{-1}(t_0).\end{cases}$$

Для того, аби задача мала магістральні властивості, необхідно, щоб система рівнянь $I'_m(t)=0$ і $I'_\eta(t)=0$ мала розв'язок на деякому інтервалі $(Q_1,Q_2)\subset[t_0,T]$. Показано, що при природній поведінці модельних елементів внутрішніх режимів оптимальне керування η^* не може мати: $\eta^*(t)=0$ або $\eta^*(t)=\bar{\eta}$.

Задачу (17) можна формально поділити на оптимізацію по η і оптимізацію по m (зв'язані через невідомий параметр μ). Якщо $\mu>t_0$, то якщо підставить η^* у $I'_m=0$, отримаємо рівняння для магістральних режимів.

Теорема 2.14. Нехай $m^*(t)$ і $\eta^*(t)$, $t\in[t_0,T]$ розв'язок ОЗ (17),(2). Тоді існує момент Q, $t_0\leq Q<T$, такий, що при $t\in(Q,T]$ градієнт $I'_{m^*}<0$, $I'_{\eta^*}<0$ і $m^*(t)=m_{min}(t)$, $\eta^*(t)=0$, $t\in(Q,T]$.

Теорема 2.15. Якщо $\beta_1(\tau)$ не спадає по τ, $\beta_2(t)\geq d>0$, $P(t)\geq\rho>0$, інтервал $[t_0,T]$ достатньо великий ($T-t_0\gg1$) і виконується $\underline{\eta}>0$ або $P'(t)>0$, то існує підмножина $\Delta\subset[t_0,T]$, $mes\Delta>0$, така що оптимальне керування $m^*(t)>m_{min}(t)$, $\eta^*(t)>\underline{\eta}$, $t\in\Delta$.

Теорема 2.16. Якщо $P(t)<0$, $\underline{\eta}(t)<0$, $t\in[t_0,T]$, $\eta_0(\tau)=0$, $\tau\in[0,t_0]$, $\beta_1'(\tau)\leq0$, то на достатньо великому інтервалі $[t_0,T]$ ОЗ (17),(2) має два розв'язки (локальні максимуми): нульовий (тривіальний) розв'язок $m_1^*(t)=0$, $a_1^*(t)=a_0$, $\eta^*(t)=0$, $t\in[t_0,T]$, та нетривіальний розв'язок $m_2^*(t)$, $a_2^*(t)$, $\eta_2^*(t)$, такий, що на деякому $\Delta\in[t_0,T]$ виконується $m_2^*(t)>0$, $\eta_2^*(t)>0$.

Має місце наступний результат про структуру оптимального керування η^*, що уточнює теореми 2.14, 2.15 (у теоремі 2.16 він належить до нетривіального розв'язку m_2^*, η_2^*).

Теорема 2.17. Якщо $\gamma'(t)>0$, то структура оптимального керування має вигляд

$$\eta^*(t)=\begin{cases}\bar\eta(t), & t\in[t_0,\mu]\\ 0, & t\in(\mu,T],\ t_0\le\mu\le T.\end{cases}$$

Зауваження 1. При $P'(t)>0$ для μ має місце оцінка

$$\mu>T-\Big(M\max_{t_0\le u\le T}\gamma(u)\Big)\Big/\Big(P(t)P'(t)\min_{t_0\le u\le T}\beta_2(u)\Big).$$

Зауваження 2. При $P'(t)<0$, $t\ge a^{-1}(t_0)$ для μ має місце оцінка

$$\mu>T-\max_{t_0\le u\le T}\gamma(u)\Big/\min_{t_0\le u\le T}\beta_2(u)P(u)$$

В силу теореми 2.16 можна обчислити функцію

$$\beta_0^*(t)=\beta_1(t)+\int_{t_0}^{t}\eta^*(u)du=\begin{cases}\beta_1(t)+\int_{t_0}^{t_0}\eta_0(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\bar\eta(\tau)d\tau, & t\in[t_0,\mu),\\ \beta_1(t)+\int_{t_0}^{t_0}\eta_0(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{\mu}\bar\eta(\tau)d\tau, & t\in(\mu,T],\end{cases}$$

що на $[t_0,\mu)$ задана, а на $(\mu,T]$ залежить тільки від невідомого параметра μ, тобто на $[t_0,\mu)$ задача 5 має властивості, близькі до властивостей задачі 4.

На інтервалі $[t_0,\mu)$ розглянемо рівняння для магістралі $\tilde a$:

$$I'_m(t)=\int_t^{a^{-1}(t)}[\beta_2(\tau)[\beta_0^*(t)-\beta_0^*(a(\tau))]d\tau-\lambda(t)=0.$$

Отриманий вираз для градієнта збігається з $I'_m=0$ із задачі 1. Отже, задача 5 має магістральні властивості по $m^*(t)$, $a^*(t)$, що описані у розділі 2.2, а власне, якщо рівняння має єдиний розв'язок $\tilde a$, то на асимптотично більшій частині інтервалу $[t_0,T]$ оптимальна траєкторія a^* прямує до $\tilde a$ при $T-t_0\to\infty$. Поведінку оптимальних траєкторій проілюстровано на прикладі.

Змінимо критерій оптимізації (17) таким чином:

$$I=\int_{t_0}^{T}\Big[\int_{a(t)}^{t}\Big[\Big(\beta_1(\tau)+\int_{t_0}^{\tau}\eta(u)du\Big]\beta_2(t)m(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}\gamma(t)\eta(\tau)d\tau-\lambda(t)m(t)\Big]dt\to\max_{\eta,m,a}. \quad (18)$$

Теорема 2.18. Градієнт функціоналу в задачі (18),(2) має вигляд

$$I'_m(t)=\int_t^{a^{-1}(t)}[\beta_2(\tau)(\beta_1(t)-\beta_1(a(\tau))+\int_{a(\tau)}^{t}\eta(u)du]d\tau-\lambda(t),$$

$$I'_\eta(t)=\int_t^{T}[m(\tau)\int_t^{a^{-1}(t)}\beta_2(u)du-\gamma(\tau)]d\tau,$$

де $a^{-1}(t)$ визначається (2.12).

Виправлена задача з видозміненим критерієм (18) при достатньо природних припущеннях про поведінку модельних функцій, подібних тим, що використовувалися в інших розглянутих задачах, має магістральні властивості. При цьому властивості магістралі подібні властивостям задачі 2, а саме постійному темпу ТП і постійній вартості відповідає постійний термін служби ОО.

Проведено змістовний аналіз отриманих результатів. Так, у задачі 2 зміст властивостей такий: при постійній вартості нових ОО і при відсутності впливу факторів теперішнього моменту часу на ефективність ОО постійні терміни служби відповідають експоненційному зростанню ефективності ОО і постійним темпам ТП, причому при зростанні темпу ТП термін служби зменшується і навпаки. Якщо ефективність ОО не залежить від моменту створення і вартість прямо пропорційна її ефективності, то термін служби постійний.

<u>В третьому розділі</u> на основі дослідження якісних властивостей інтегрофункціональних рівнянь для магістральних траєкторій висунуто можливі постановки задач визначення оптимальних термінів оновлення елементів систем, розроблено наближені алгоритми їх розв'язання та алгоритми ідентифікації ІМ, розглянуто моделювання деяких прикладних систем.

Розглянемо рівняння відносно невідомої $x(t)$:

$$\Phi(t) \stackrel{def}{=} \int_{t}^{x^{-1}(t)} [F(t) - F(x(\tau))] d\tau - f(t) = 0, \qquad (19)$$

де x^{-1} - обернена до x функція; $t - x(t)$ - термін служби елементів.

Рівняння (19) належить до раніше не досліджуваного типу. Якісне дослідження рівняння (19) (Ю.П. Яценко, 1989) показало, що воно має дуже нетривіальні властивості, що ускладнюють його чисельний розв'язок.

Припустимо, що $F(t)$ і $f(t)$ - неперервно диференційовані, $F(t) > 0$, $F'(t)$, $f(t) > 0$, і обмежимося випадком неперервних розв'язків $x(t) < t$. В залежності від обсягу відомої інформації виникають три різні задачі розв'язання рівняння (19):

<u>Задача</u> <u>А.</u> При заданих $F(u), f(u), u \in [t_0, t_1]$ і $x(\tau) \equiv \varphi(\tau), \tau \in [t, \varphi^{-1}(t)] \subset [t_0, t_1]$, що задовольняють рівнянню (19), визначити розв'язок $x(\tau)$ при $\tau \in [t_0, t_1]$ і/або $\tau \in [\varphi^{-1}(t), t_1]$.

<u>Задача</u> <u>Б.</u> При заданих $f(t)$ і $F(\tau), \tau \in [x(t), t]$ (момент $x(t)$ наперед невідомий) оцінити розв'язок $x(\tau), \tau \in [t, x^{-1}(t)]$.

<u>Задача</u> <u>С.</u> При заданих $f(t)$ і $F(t), t \in [t_0, t_1], t_1 - t_0 \gg 1$ оцінити поведінку розв'язку $x(t), t \in [t_0, t_1]$.

Розв'язок задачі А. Після перевірки виконання (19) при $x(t) \equiv \varphi(t)$

$\tau\in[t,\varphi^{-1}(t)]$ для її розв'язку використовується рівняння $\Phi'(t)=0$.

Для $\tau<t$ використане явне рекурентне співвідношення

$$x(\tau)=F^{-1}\{F(\tau)+f'(\tau)-F'(\tau)[x^{-1}(\tau)-\tau]\},$$

а для $\tau>\varphi^{-1}(t)$

$$x^{-1}(\tau)=\tau+\frac{1}{F'(\tau)}[F(\tau)-F(x(\tau))+f'(\tau)].$$

Неперевність $x(\tau)$ при $\tau=t$ і $\tau=x^{-1}(t)$ витікає із рівняння (19). Розв'язки $x(t)$ єдиним чином визначаються доти, доки не буде порушена монотонність $x(t)$. Запропоновано та програмно реалізовано ефективні конструкції обчислення обернених функцій, що засновані на інтерполяції оберненої функції.

Розв'язок задачі Б. Нехай $F(\tau)$ задана або може бути наближено визначена (апроксимована) на деякому відрізку $[x(t),t]$, де t - фіксований момент; $x(t)$ наперед невідома, а також задані значення $f(t)$ і $f'(t)$. При даній мінімальній вхідній інформації рівняння (19) має неєдиний розв'язок. Будемо шукати такий розв'язок

$$x(\tau)=c\tau-d,\ \tau\in[t,x^{-1}(t)], \tag{20}$$

де c,d - параметри, що визначаються із системи рівнянь (19) і $\Phi'(t)=0$, що зводиться до рівняння відносно $z=ct-d$

$$[F(t)-F(z)+f'(t)][F(t)-\frac{1}{t-z}\int_z^t F(u)du]=f(t)F'(t) \tag{21}$$

що має єдиний розв'язок . Для розв'язку (21) розвинуто алгоритми типу запропонованих (Ю. П. Яценко, 1988) для обернення першообразної функції. Також запропоновано алгоритми знаходження згладженого розв'язку рівняння (19) у вигляді параболи.

Розв'язок задачі С. Алгоритм базується на об'єднанні алгоритмів для задач А і Б, а його обгрунтування - на результатах теоретичного дослідження асимптотики розв'язків (19) (Ю. П. Яценко, 1989).

Дані алгоритми програмно реалізовані у складі діалогового комплексу на ПЕОМ для розв'язання прикладних задач оцінки термінів та темпів оновлення складних економічних та технічних систем.

Алгоритми ідентифікації моделей засновані на введенні деяких допоміжних гіпотез (допущень) про функціювання об'єкту, що моделюється на передісторії. Це дозволяє зробити задачу ідентифікації такою, щоб вона мала розв'язки, значно знизити ступінь невизначеності, та використовувати потоки регламентованої інформації.

А саме, для ТС ефективність можна визначати у вигляді

$$\beta(\tau,t)=\beta_1(\tau)\beta_2(t)\beta_3(t-\tau), \tag{22}$$

що враховує три такі основні фактори:

1) "здійснений прогрес" (зростання ефективності нових ОО із-за наявності ТП) враховується множником $\beta_1(\tau)$;

2) "автономний прогрес" (зміна ефективності через фактори, що залежать від теперішнього часу) враховується множником β_2 ;

3) падіння ефективності ОО внаслідок фізичного зносу з зростанням їх віку враховується множником $\beta_3(t-\tau)=e^{-\delta(t-\tau)}, \delta>0$.

Теорема 3.19. При виконанні умови (22) задання п'яти додатніх функцій $C(t)$, $P(t)$, $\varphi(t)$, $\gamma(t)$, $\beta_1(t)$ на достатньо великому інтервалі $[\tau_0,T]$, значення δ дозволяє повністю ідентифікувати ІМ (1)-(3), тобто єдиним чином визначити інші три модельні функції $\beta(\tau,t)$, $a(t)$, $m(\tau)$, $\tau\in[\tau_0,T]$, $t\in[t_0,T]$, $\tau_0=a(t_0)$.

У задачі 4 ціна нової ОО є невідомим керуванням. Тому задача ідентифікації ІМ (1)-(3) невизначена, і для її розв'язання треба ввести додаткове балансове рівняння

$$\Phi(t)=\int_{a(t)}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

де $\Phi(t)$ - обсяг основних фондів. Нехай також виконується умова

$$m(a(\tau))a'(\tau)=m_0,\ \tau\in[\tau_0,a^{-1}(\tau_0)],\ t\in[t_0,T], \qquad (23)$$

що означає рівномірний вивід з експлуатації на інтервалі $[\tau_0,a^{-1}(\tau_0)]$ ОО, створених за період $[a(\tau_0),\tau_0]$, причому константи $a^{-1}(\tau_0)$, m_0 наперед невідомі.

Теорема 3.20. При виконанні умов (22),(23) задання п'яти додатніх функцій $C(t)$, $\Phi(t)$, $P(t)$, $\varphi(t)$, $\beta_1(t)$ на достатньо великому інтервалі $[\tau_0,T]$, значення δ дозволяє однозначно визначити інші чотири модельні функції $m(t)$, $a(t)$, $\gamma(t)$, $\beta(\tau,t)$, $\tau\in[\tau_0,T]$, $t\in[t_0,T]$.

До речі, при доведенні теорем побудовано конструктивні алгоритми ідентифікації ІМ (1)-(3).

Алгоритми ідентифікації ІМ (1)-(3) складають основу інформаційного забезпечення задач моделювання термінів оновлення на базі ІМ.

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

Основні результати роботи:

1. Запропоновано ІМ керованих динамічних систем з складноформалізованою оцінкою ефективності їх функціювання для задач моделювання процесів оновлення елементів економічних та технічних систем в умовах ТП. Сформульовано ряд нових ОЗ.

2. Виконано якісне дослідження запропонованих ОЗ: отримано вирази градієнтів функціоналів, доведено теореми про поведінку трає-

кторій на малому та великому плановому інтервалі, вивчено асимптотичну поведінку оптимальних траєкторій, проаналізовано магістральні властивості задач. Проведено змістовний аналіз отриманих результатів.

3. На основі проведеного дослідження ОЗ запропоновано і обгрунтовано магістральний підхід до аналізу оптимальних темпів і пропорцій оновлення елементів систем. Виведено і вивчено інтегрофункціональні рівняння для магістральних траєкторій розглянутих ОЗ. Вивчено якісну поведінку магістральних траєкторій в залежності від темпів ТП.

4. Сформульовано постановки задач оцінки та наближеного знаходження магістральних траєкторій для різних випадків задання вхідної інформації, розроблено наближені алгоритми розв'язання інтегрофункціональних рівнянь відносно магістралей, в тому числі розраховані на мінімальну вхідну інформацію про систему.

5. Розроблено основи інформаційного забезпечення задач моделювання та методики розрахунку оптимальних термінів оновлення деяких прикладних систем на базі інтегральних моделей.

Основні положення дисертації надруковані у роботах:

1. Айстраханов Д.Д. Об идентификации интегральных моделей систем с управляемой памятью // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. 3-й Респ. науч.-техн. конф., Одесса, 15-17 нояб. 1989г. - Киев, 1989. - С.9.

2. Айстраханов Д.Д., Ляшко О.В. О применении многовариантного прогноза для обоснования планово-управленческих решений // Диалоговая оптимизация планово-управленческих решений и проблемы внедрения ее в практику: Тез. докл. науч.-практ. семинара. - Киев, 1989. - С.2-3.

3. Айстраханов Д.Д. Методы идентификации ядер интегральных динамических моделей // Распознавание и оптимальное управление развитием систем: Материалы семинара, Славское, 28 февр.-7 марта 1989г. - Киев, 1990. - С.4-3. - Деп. в ВИНИТИ 22.10.90, N5442 В-90.

4. Айстраханов Д.Д., Галиев У.Е., Яценко Ю.П. Оптимизация алгоритмов приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра с переменной памятью // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения: Тез. докл. респ. науч. конф. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С.6.

5. Оптимизация траекторий развития и обновления макросистем в условиях технического прогресса / Д.Д.Айстраханов, У.Е.Галиев, В.А.Ишук, Ю.П.Яценко // 6-я Всесоюз. конф. по пробл. управления

развитием систем: Тез. докл. - Киев, 1991. - Ч. 2. - С. 5-6.

6. Задачи минимизации трудо- и энергозатрат на базе интегральных моделей / Д. Д. Айстраханов, В. А. Ищук, А. В. Кондрахин, Ю. П. Яценко // Проблемы энергосбережения: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. - Киев, 1991. - Ч. 2. - С. 108-109.

7. Айстраханов Д. Д., Ищук В. А., Яценко Ю. П. О моделировании оптимальных сроков обновления многокомпонентных технических систем // Прикладные проблемы моделирования и оптимизации: Материалы семинара. Славское. 3-8 марта 1991г. - М., 1991. -С. 3-4.

8. Айстраханов Д. Д., Яценко Ю. П., Ищук В. А. Магистральный подход в интегральных моделях многофункциональных систем с переменной памятью // Прикладные проблемы моделирования и оптимизации: Материалы 2-го Междунар. семинара. Славское. 1-6 марта 1992г. - Киев, 1992. - С. 4-8. - Деп. 12.08.92, N 2628 В-92.

9. Айстраханов Д. Д., Тохтасунов В. И., Яценко Ю. П. Проблемы моделирования обновления производственных систем в современных экономических условиях // Информатизация производственных систем в современных экономических условиях. - Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины, 1992. - С. 23-26.

10. Айстраханов Д. Д., Яценко Ю. П. Исследование задачи минимизации затрат в односекторной интегральной модели с управляемой памятью // Модели и методы исследования операций, теории риска и надежности. - Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины, 1992. - С. 52-58.

11. Айстраханов Д. Д., Яценко Ю. П. Приближенные алгоритмы моделирования оптимальных сроков обновления экономических систем // Кибернетика и системный анализ. - 1992. - N 6. - С. 168-173.

12. Айстраханов Д. Д., Ищук В. А., Яценко Ю. П. Магистральный подход к моделированию рациональных темпов обновления крупномасштабных систем в условиях технического прогресса // Электрон. моделирование. - 1992. - N 6. - С. 3-9.

Підп. до друку 18.01.93. Формат 60×84/16. Папір кн.-журн. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,05. Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 100. Зам. 85.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40