КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

СТАДНИК Оксана Іванівна

УДК 517.929.4

РОЗВИТОК МЕТОДУ ОПТИМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

01.01.09 - математична кібернетика

А в т о р е ф е р а т

диссертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

К и ї в - 1993

Работа виконана в Київському университеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: - доктор фізико-математичних наук, професор ХУСАІНОВ Д.Я.

Офіційні опоненти: - доктор фізико-математичних наук, пр.н.сп. КОНОВАЛОВ В.М.

- доктор фізико-математичних наук, ст.н.сп. БОЙЧУК О.А.

Провідна установа - Інститут механіки АН України

Захист відбудеться "18" березня 1993р. о 14.00 на засіданні спеціалізованої ради Д 068.18.16 в Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м.Київ-127, пр.Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім.Тараса Шевченка.

Автореферат надіслано "1" лютого 1993р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради КУЗЬМІН А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Останні досягнення науки і техніки потребують створення більш досконалого математичного апарату, розробки методів моделювання і оцінки процесів. Серед різнобічних проблем, що виникають в технічних, фізичних, екологічних та інших системах, важливими є дослідження динаміки процесів. Одним з головних методів дослідження різних питань динаміки систем є прямий метод О.М.Ляпунова. Виникнення сучасних швидкодіючих обчислювальних засобів, що дозволяють перевіряти теоретичні припущення, стимулювало нові аспекти його розвитку. Більш актуальним став алгоритмічний підхід, що дозволяє чисельно вирішувати проблеми побудови функції Ляпунова для конкретних видів систем.

Прямий метод О.М.Ляпунова при створенні був зорієнтований на дослідження систем, що описуються звичайними диференційними рівняннями. В подальшому він використовувався при дослідженні систем з розподіленими параметрами (Т.К.Сіразетдинов), систем з аргументом, що відхиляється (М.М.Красовський, Б.С.Разуміхін, В.Б.Колмановський, В.Р.Носов, Дж.Хейл), систем регулювання (В.М.Кунцевич, Ю.М.Чаховий, Г.О.Леонов, В.А.Якубович, М.Є.Барабанов, М.А.Айзерман, Ф.Р.Гантмахер та ін.), загальних динамічних систем (В.І.Зубов, В.М.Матросов, О.М.Васильєв, М.Месарович і т.д.). Конструктивні алгоритми побудови конкретних функцій Ляпунова розглядались в работах Є.А.Барбашина, В.І.Зубова, А.А.Мартинюка, К.Г.Валеєва, М.Ф.Кириченка, О.А.Бойчука та ін.

Якісна теорія різницевих рівнянь здебільшого схожа на відповідну теорію систем диференційних рівнянь. Багато аспектів теорії звичайних диференційних рівнянь з незначною зміною використовувалось при дослідженні різницевих систем. Це було проведено в роботах Р.Беллмана, П.В.Бромберга, А.О.Гельфонда, Д.І.Мартинюка, А.Халаная. Основні питання теорії стійкості руху були також перенесені на різницеві системи.

Однією з головних властивостей методу функцій Ляпунова, крім з"ясування стійкості, є можливість отримати окремі узагальнені критерії якості всієї системи в цілому або окремих її розв"язків. Природно, що виникає питання оптимізації отриманих характеристик за рахунок вибору відповідної функції. Виникло поняття "оптимальної функції Ляпунова". Питання наближення і оптимізації різних функцій достатньо докладно вивчались в роботах Б.М.Бублика, Р.Ф.Габасова, В.М.Коновалова, Б.М.Пшеничного, Ю.І.Даниліна, В.М.Тихомирова, Н.З.Шора та ін.

В поданій роботі проведені теоретичні дослідження і опрацьовані ефективні алгоритми обчислення деяких характеристик різницевих систем на основі методу оптимальних функцій Ляпунова.

Метою дисертації є розробка і дослідження методів отримання оцінок характеристик динамічних систем на основі побудови функцій Ляпунова з екстремальними властивостями. Розвиток якісних методів дослідження нелінійних різницевих систем. Побудова характеристик стійкості нелінійних дискретних систем з запізненням аргументу та їх оптимальне оцінювання.

Наукова новизна. Розглянуто задачу отримання оцінок розв"язків нелінійних різницевих систем на основі методу оптимальних функцій Ляпунова. Розроблено загальний підхід обчислення узагальненого градієнту функцій заданого вигляду. Отримані конструктивні умови стійкості дискретних систем з запізнюванням.

Методи дослідження. При обгрунтуванні і розробці алгоритмів побудови і оптимізації оцінок розв"язків систем застосовуються методи, що базуються на синтезі досягнень лінійної алгебри, теорії диференційних рівнянь, методів нелінійного програмування.

Теоретична і практична цінність роботи. Основні дослідження проводились в рамках науково-дослідної теми: "Розробити методи і алгоритми моделювання і оптимізації процесів обробки гідроакустичних сигналів, натурних випробувань і проектування літальних апаратів, прискорених полів заряджених частинок" № ДР 01860061345 ДАСНІ 50.53 (Постанова Президії АН УРСР №474 від 27.12.85р., Постанова ДКНТ СРСР, АН СРСР №573/137 від 10.11.85г./ Додаток №78).

Отримані в дисертації результати використовувались в роботах з дослідження стійкості процесів у чадпровідних системах, що проводились з Інститутом кібернетики ім. В.М.Глушкова

АН України.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались і обговорювались на Міжнародній конференції з диференційних рівнянь і їх застосування (м.Русе, Болгарія, 1989 р.), Міжнародному колоквіумі з диференційних рівнянь (м.Пловдів, Болгарія, 1991 р.), Четаївській конференції "Аналітична механіка, стійкість і керування рухом" (м.Казань, 1992 р.), Північно-Кавказькій регіональній конференції з функціонально-диференційних рівнянь (м.Махачкала, 1991 р.), школі-семінарі з моделювання і дослідження стійкості фізичних процесів (м.Київ, 1990 , 1991,1992 р.р.), республіканській науковій конференції "Диференційні та інтегральні рівняння і їх застосування" (м.Одеса, 1987 р.), семінарі з теорії стабілізації динамічних систем НДІ обчислювальної математики і процесів керування ЛДР (н.к. проф. Смірнов Є.Я., м.Ленінград, 1987 р.), республіканській науковій конференції "Ефективні обчислювальні методи розв"язування крайових задач механіки твердого деформованого тіла" (м.Харків, 1989 р.), Всесоюзній школі - симпозіумі молодих вчених (м.Мінськ, 1986 р.), Сибірській школі молодих вчених з обчислювальної математики (м.Новосибірськ, 1988 р.), Зимовій школі молодих вчених Інституту математики і механіки (м.Свердловськ, 1989 р.), на республіканському семінарі Наукової ради АН України з проблеми "Кібернетика" "Моделювання і оптимізація систем керування" (н.к. член-кор. АН України Вублик Б.М., проф. Наконечний О.Г.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 16 роботах.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, закінчення, списку літератури з 165 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність розглянутих в дисертації питань, визначено мету дослідження, зроблено огляд результатів, пов"язаних з темою дисертації. Стисло викладено зміст дисертації.

У першому розділі розглядаються системи різницевих рівнянь загального вигляду

$$x(k+1)=F(x(k),k), \quad k=0,1,2,... \qquad (1)$$

Нехай існує функція $v(x,k)$, для якої виконуються двосторонні оцінки

$$w_1(|x|) \leq v(x,k) \leq w_2(|x|), \qquad (2)$$

а перша різниця в силу системи (I) задовольняє нерівність

$$\Delta v(x(k),k) \leq -w_3(|x(k)|). \qquad (3)$$

Тут $w_i(\cdot)$ - неперервні, монотонно зростаючі функції, що задовольняють умовам $w_i(0) = 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} w_i(|x|) = \infty$, $i=1,3$.

Для розв"язку $x(k)$ системи отримано оцінку

$$|x(k)| \leq w_1^{-1}[R(w_2(|x(0)|))], \qquad (4)$$

на підставі якої наведено три критерія якості перехідного процесу. Зроблено постановку задач оптимального оцінювання цих критеріїв на множині функцій Ляпунова вигляду (2), (3).

У більшості випадків функції Ляпунова будуються на основі квадратичних форм. І знаходження найкращих оцінок характеристик систем зводиться до розв"язку оптимізаційних задач вигляду

$$H_0 = \arg \inf_{H \in Z[H]} \{\varphi[\lambda_{min}(G[H]),\lambda_{max}(G[H])]\}, \qquad (5)$$

де $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ - найменше і найбільше власні числа симетричних додатно визначених матриць, $G[H]$ - лінійні матричні оператори, які є лівою частиною матричного рівняння Ляпунова, $\varphi[\cdot,\cdot]$ - функція, неперервно диференційована за обома аргументами, $Z[H]$ - множина додатно визначених матриць H, що задовольняють додатковим обмеженням.

Доведено ряд тверджень, спрямованих на розв"язок задачі (5).

Л е м а І. Функція $f_1(H)=\lambda_{min}(G[H]), H \in Z[H]$ є увігнутою.

Л е м а 2. Функція $f_2(H)=\lambda_{max}(G[H]),\ H \in Z[H]$ є опуклою.

Функції $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ є кусочно неперервно-диференційованими. Тому (5) є задачею недиференційованої оптимізації. В цих задачах важливе місце займає поняття узагальненого градієнта. В першому розділі проведено дослідження стосовно методів побудови узагальнених градієнтів для функцій задач вигляду (5).

Л е м а 3. Узагальненим градієнтом функції $f_1(H)= \lambda_{min}(G[H])$ у внутрішній точці $H_0 \in Z[H]$ буде матриця

$$F_{min} = (f_{ij}^{min}). \; f_{ij}^{min} = y_{min}^{T} G[\Delta_{ij}] y_{min} \; . \; 1 \leq i \leq j \leq n. \qquad (6)$$

Тут Δ_{ij} - симетрична матриця, у якої на перетині i-го рядка і j-го стовпчика, а також j-го рядка і i-го стовпчика стоять одиниці, інші елементи нулі, y_{min} - вектор одиничної кулі, на якому квадратична форма $y^T G[H] y$ досягає мінімального значення.

Л е м а 4. Узагальненим градієнтом функції $f_2(H) = \lambda_{max}(G[H])$, у внутрішній точці $H_0 \in Z[H]$ буде матриця

$$F_{max} = (f_{ij}^{max}). \; f_{ij}^{max} = y_{max}^{T} G[\Delta_{ij}] y_{max} \; . \; 1 \leq i \leq j \leq n \; . \qquad (7)$$

Тут y_{max} - вектор одиничної кулі, на якому квадратична форма $y^T G[H] y$ досягає максимального значення.

Визначаються похідні функцій $f_1(H)$, $f_2(H)$ за напрямком. Доводиться, що вектор, складений з похідних за напрямком ортів Δ_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ міститься у градієнтній множині.

Нехай $\partial\varphi/\partial f_1|_{H_0}$ і $\partial\varphi/\partial f_2|_{H_0}$ - частинна похідна функції $\varphi(f_1, f_2)$ за першим і другим аргументом в точках

$$f_1 = \lambda_{min}(G[H_0]), \; f_2 = \lambda_{max}(G[H_0])$$

а F_{min}, F_{max} - узагальнені градієнти функцій $\lambda_{min}(G[H])$, $\lambda_{max}(G[H])$ в точці $H = H_0$. Тоді

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial f_1}\Big|_{H_0} F_{min} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\Big|_{H_0} F_{max} \qquad (8)$$

буде матрицею з градієнтної множини $G_\varphi[F]$ функції φ.

Т е о р е м а I. Якщо функція $\varphi\, [\lambda_{min}(G[H]), \lambda_{max}(G[H])]$ у внутрішній точці $H_0 \in Z[H]$ досягає экстремального значення, то $G_\varphi[F]$ містить нульову матрицю.

Т е о р е м а 2. Нехай функції $\varphi_i\, [\lambda_{min}(G[H]), \lambda_{max}(G[H])]$, $i = \overline{0,m}$, опуклі за $H_0 \in Z[H]$, розглядається задача опуклого програмування

$$\varphi_0\, [\lambda_{min}(G[H]), \lambda_{max}(G[H])] \to \inf_{H \in Z[H]} \; , \qquad (9)$$

$$\varphi_i\, [\lambda_{min}(G[H]), \lambda_{max}(G[H])] \leq 0, \quad i = \overline{1,m} \; ,$$

$Z[H]$ - замкнена опукла множина і виконується умова Слейтера, тобто існує $H \in Z[H]$, при якому $\varphi\, [\cdot,\cdot] < 0$, $i = \overline{0,m}$. Щоб точка $H_0 \in Z[H]$ була розв"язком задачі (9) необхідно і достатньо існування вектора $u_0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)$, при якому пара (H_o,u_o) є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L[H,u] = \varphi_o[\cdot,\cdot] + \sum_{i=1}^{m} u_i\varphi_i[\cdot,\cdot] \quad (10)$$

на множині $Z[H] \times \{u\colon u_i \geq 0,\ i = 1,m\}$.

Подається формулювання цієї теореми в термінах узагальнених градієнтів.

Другий розділ присвячений вивченню стійкості і оптимізації характеристик перехідних процесів систем спеціального вигляду. Розглядаються лінійні системи з постійними коефіцієнтами

$$x(k+1)=Ax(k),\ k=0,1,2,\ldots \quad (11)$$

Функція Ляпунова береться у вигляді $v(x)=x^T Hx$. Тоді нерівності (2) набудуть вигляду

$$\lambda_{min}(H)\ |x|^2 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_{min}(H)\ |x|^2 , \quad (12)$$

а нерівність (3), відповідно,

$$\Delta v(x(k)) \leqslant - \lambda_{min}(C)\ |x|^2,$$

де $C = H - A^T HA$. Оцінка (4) розв"язку $x(k)$ має вигляд

$$|x(k)| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{min}(H)}}\ |x(0)| \left[1 - \frac{\lambda_{min}(C)}{\lambda_{min}(H)} \right]^{k/2} \quad (13)$$

Вводиться наступне поняття оптимальності.

Визначення I. Функцію Ляпунова $v_o(x)= x^T H_o x$, у якої

$$H_o=\arg\inf_{H \in Z[H]} (\varphi_1(H)) , \quad (14)$$

де $\varphi_1(H) = \lambda_{max}(H)/\lambda_{min}(H)$, $Z[H]$ - множина додатно визначених матриць H, для яких $H - A^T HA$ також додатно визначені, назвемо оптимальною для оцінки початкових збурень.

Найкращою (в залежності від матриці A) з усіх $v_o(x)$ буде та, для котрої $\varphi_1(H_o) = 1$, т.е. $H_o= \lambda E$, $\lambda > 0$. Така функція існує тоді і тільки тоді, коли $E-A^T A$ додатно визначена матриця. Якщо це не виконується, то оптимальна функція Ляпунова існує, але H_o лежить на границі $Z[H]$, тобто

$$H_o \in \partial Z[H] = \{ H\colon \lambda_{min}(H - A^T HA) = 0\} .$$

Лема 5. Множина $Z[H]$ є опуклим конусом.

Цільова функція задачі (14) є, загалом кажучи, неопуклою. Тому здійснюється перехід до задачі з опуклою функцією

(робиться "опуклювання")

$$H^{*}=\arg\inf_{H \in \bar{Z}^{1}(H)} \{\tilde{\varphi}_1(H)\}, \quad \tilde{\varphi}_1'(H) = -\lambda_{min}(H), \tag{15}$$

$$\bar{Z}^{1}[H] = \{ H: \lambda_{min}(H - A^{T}HA) \geqslant 0, \lambda_{max}(H) \leqslant 1\} .$$

Доводиться, що розв"язок цих задач співпадає з точністю до множника, тобто. $H_0 = \alpha H^{*}$, $0 < \alpha < 1$. Для розв"язку (I5) використовується теорема 2 з функцією Лагранжа вигляду

$$L_1(H,u)= \tilde{\varphi}_1(H) + u_1\varphi_1^{1}(H) + u_2\varphi_1^{2}(H), \tag{16}$$

де

$$\varphi_1^{1}(H) = -\lambda_{min}(H - A^{T}HA), \quad \varphi_1^{2}(H) = \lambda_{max}(H)-1, \; u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0.$$

При числовій реалізації задачі (I5) використовується метод градієнтного спуску. Узагальнений градієнт функції $L_1(H,u)$ за змінною H обчислюється на основі лем 2,3 і залежності (8)

$$\tilde{grad}\, L_1(H,u)=\tilde{grad}\, \tilde{\varphi}_1(H) + u_1\tilde{grad}\, \varphi_1^{1}(H) + u_2\tilde{grad}\, \varphi_1^{2}(H),$$

де

$$\tilde{grad}\, \tilde{\varphi}_1(H)=\begin{bmatrix} -x^{T}_{min}\Delta_{11}x_{min} & -x^{T}_{min}\Delta_{12}x_{min} & \dots & -x^{T}_{min}\Delta_{1n}x_{min} \\ -x^{T}_{min}\Delta_{12}x_{min} & -x^{T}_{min}\Delta_{22}x_{min} & \dots & -x^{T}_{min}\Delta_{2n}x_{min} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^{T}_{min}\Delta_{1n}x_{min} & -x^{T}_{min}\Delta_{2n}x_{min} & \dots & -x^{T}_{min}\Delta_{nn}x_{min} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\tilde{grad}\, \varphi_1^{2}(H)=\begin{bmatrix} x^{T}_{max}\Delta_{11}x_{max} & x^{T}_{max}\Delta_{12}x_{max} & \dots & x^{T}_{max}\Delta_{1n}x_{max} \\ x^{T}_{max}\Delta_{12}x_{max} & x^{T}_{max}\Delta_{22}x_{max} & \dots & x^{T}_{max}\Delta_{2n}x_{max} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{T}_{max}\Delta_{1n}x_{max} & x^{T}_{max}\Delta_{2n}x_{max} & \dots & x^{T}_{max}\Delta_{nn}x_{max} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\tilde{grad}\, \varphi_1^{1}(H)=\begin{bmatrix} -y^{T}_{min}G[\Delta_{11}]y_{min} & -y^{T}_{min}G[\Delta_{12}]y_{min} & \dots & -y^{T}_{min}G[\Delta_{1n}]y_{min} \\ -y^{T}_{min}G[\Delta_{12}]y_{min} & -y^{T}_{min}G[\Delta_{12}]y_{min} & \dots & -y^{T}_{min}G[\Delta_{1n}]y_{min} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y^{T}_{min}G[\Delta_{1n}]y_{min} & -y^{T}_{min}G[\Delta_{1n}]y_{min} & \dots & -y^{T}_{min}G[\Delta_{1n}]y_{min} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$G[\Delta_{ij}] = \Delta_{ij} - A^{T}\Delta_{ij}A$, x_{min}, x_{max} - вектори одиничної кулі, на яких квадратична форма $x^T Hx$ досягає мінімального і максимального значень.

Розглядається інтегральний критерій якості системи (I).

В и з н а ч е н н я 2. Функцію Ляпунова $v_o(x)= x^T H_o x$, у якої $H_o = \underset{H \in Z(H)}{\arg\inf} \{\varphi_2(H)\}$,

де

$$\varphi_2(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_{min}(C)}{\lambda_{max}(H)}} \right]^{-1} \tag{20}$$

назвемо оптимальною для оцінки інтегрального критерію.

Якщо A нормальна матриця, то функцією Ляпунова, оптимальною для оцінки інтегрального критерію буде $v_o(x)=x^T H_o x$, $H_o= \lambda E$, $\lambda > 0$. Якщо це не виконується, то оптимальна функція існує, але її знаходження є складною задачею нелінійного програмування. Робиться перехід до задачі

$$H^*=\underset{H \in \bar{Z}^1(H)}{\arg\inf} \{\tilde{\varphi}_2(H)\}, \tag{21}$$

$$\tilde{\varphi}_2(H) = -\frac{1}{2} \ln [\lambda_{min}(H)] - \ln [1- \sqrt{1 - \lambda_{min}(H-A^T HA)}] .$$

Доводиться, що $\tilde{\varphi}_2(H)$ опукла, обчислюється її узагальнений градієнт

$$\widetilde{grad}\, \tilde{\varphi}_2(H) = \frac{\widetilde{grad}\, \varphi_2(H)}{2\lambda_{min}(H)} + \frac{\widetilde{grad}\, \varphi_1^1(H)}{2[1- \sqrt{1 - \lambda_{min}(H-A^T HA)}] \sqrt{1 - \lambda_{min}(H-A^T HA)}} .$$

Значення $\widetilde{grad}\, \varphi_1(H)$, $\widetilde{grad}\, \varphi_1^1(H)$ обчислюються згідно з (I7), (I9).

Розглядається оптимізація часу перехідного процесу.

В и з н а ч е н н я 3. Функцію Ляпунова $v_o(x)= x^T H_o x$, у якої $H_o = \underset{H \in Z(H)}{\arg\inf} \{\varphi_3(H)\}$,

де

$$\varphi_3(H)=\ln\left[\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{max}(H)}\right] \Big/ \ln\left[1 - \frac{\lambda_{min}(H-A^T HA)}{\lambda_{max}(H)}\right], \tag{22}$$

назвемо оптимальною для оцінки часу перехідного процесу.

Робиться перехід до функції

$$\tilde{\varphi}_3(H) = \ln[\lambda_{min}(H)] / \ln[1-\lambda_{min}(H-A^THA)],$$

доводиться, що вона опукла, обчислюється узагальнений градієнт.

В §2.3 досліджуються системи з квадратичною правою частиною

$$x(k+1) = Ax(k) + X(k)Bx(k), \quad k=0,1,2,... \qquad (23)$$

$X = [X_1, X_2, ... X_n]$ і $B^T = [B_1, B_2, ... B_n]$ прямокутні матриці розміром $n \times n^2$, X_i - матриця, у якої на i-му рядку стоїть вектор-рядок $x^T=(x_1, x_2, ... x_n)$, а інші елементи нулі, B_i - симетричні матриці, що визначають квадратичні члени. Припускається, що лінійна частина асимптотично стійка. За допомогою функції Ляпунова квадратичного вигляду визначається гарантована область асимптотичної стійкості, тобто куля, що лежить всередині поверхні рівня функції, на якій задовольняються умови теорем Ляпунова.

Т е о р е м а 3. Нехай A асимптотично стійка матриця. Тоді куля U_R радіусу

$$R = \frac{\lambda_{min}(H-A^THA)}{[\sqrt{|HA|^2 + \lambda_{min}(H-A^THA)|H|} + |HA|]|B|} \sqrt{\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{max}(H)}} \qquad (24)$$

міститься в області асимптотичної стійкості нульового розв"язку системи (23).

За допомогою методів оптимізації, розроблених у першому розділі, розв"язується задача максимального розтягу гарантованої кулі стійкості квадратичної системи. Розглядається заміна початкової цільової функції на наступну

$$H^* = \arg \inf_{H \in \bar{\mathfrak{X}}^1(H)} (\tilde{\varphi}_0(H)),$$

$$\tilde{\varphi}_0(H) = -\ln[\sqrt{|A|^2 - \lambda_{min}(H-A^THA)} - |A|] - \frac{1}{2}\ln[\lambda_{min}(H)].$$

Обчислюється узагальнений градієнт функції $\tilde{\varphi}_0(H)$. Для його запису використовують вирази (17), (19).

Розглядаються нелінійні системи регулювання вигляду

$$x(n+1) = Ax(n) + bf(\sigma(n)), \quad \sigma(n) = c^Tx(n), \qquad (25)$$

Функція Ляпунова будується у вигляді "квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності"

$$v(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi)d\xi, \quad \sigma(x)=c^T x. \tag{26}$$

Двостороння оцінка для функції (26) має вигляд

$$\lambda_{min}(\tilde{H})|x|^2 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_{max}(\tilde{H})|x|^2,$$

де

$$\lambda_{min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{min}(H), & \beta>0 \\ \lambda_{min}(H+\beta kcc^T/2), & \beta\leqslant 0 \end{cases},$$

$$\lambda_{max}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{max}(H+\beta kcc^T/2), & \beta>0 \\ \lambda_{max}(H), & \beta\leqslant 0 \end{cases}.$$

Для першої різниці функції $v(x)$ в силу системи (25) справедлива нерівність

$$\Delta v(x(n)) \leqslant -(x^T(n), f(\sigma(n))^T \tilde{C}(x(n), f(\sigma(n))),$$

де

$$\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} -A^T HA-H+1/2\ \beta L \times & -[A^T HB+1/2\ (1+Lc^T b) \times \\ \times (A-E)^T cc^T (A-E) & \times\ b(A-E)^T c+1/2\ c] \\ \hline -[A^T HB+1/2\ (1+Lc^T b) \times & -[b^T Hb+\beta(1+1/2\ \times \\ \times\ b(A-E)^T c+1/2\ c]^T & \times\ Lc^T b)c^T b]+1/k \end{array}\right].$$

Множину пар (H,β) симетричних додатно визначених матриць H і параметрів β, для яких $\lambda_{min}(\tilde{H})>0$ і матриця $\tilde{C}$ додатно визначена, позначимо через $Z_1[v]$.

Т е о р е м а 4. Для абсолютної стійкості системи (25) достатньо, щоб множина $Z_1[v]$ була непустою.

Для перевірки умов теореми пропонується оригінальний метод. Він грунтується на розв"язку задачі

$$\varphi_0(H,\beta) \longrightarrow \sup_{(H,\beta)\in \bar{Z}[v]},$$

де $\varphi_0(H,\beta) = \lambda_{min}(\tilde{C})$, $Z_0[v] = \{(H,\beta): \lambda_{min}(\tilde{H})\geqslant 0,\ \lambda_{max}(\tilde{H})\leqslant 1\}$.

Доводиться, що множина $Z_0[v]$ є перетином опуклого конуса і кулі одиничного радіусу, функція $\varphi_0(H,\beta)$ опукла. Для числової реалізації оптимізаційної задачі пропонуються алгоритми, що грунтуються на обчисленні узагальненого градієнта.

У випадку позитивного розв"язку задачі про абсолютну стійкість системи (25) постає задача оптимального оцінювання якісних характеристик системи.

Будуються три критерія якості, що оцінюють величину перерегулювання, інтеграл від норми розв"язку, час перехідного процесу.

Розглядаються системи регулювання вигляду

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + bf(\sigma(n)) \\ \sigma(n+1) &= c^T x(n) - \rho f(\sigma(g)), \end{aligned} \tag{27}$$

функція Ляпунова будується у вигляді

$$v(x,\sigma) = x^T Hx + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi)d\xi . \tag{28}$$

Оцінка для функції $v(x,\sigma)$ має вигляд

$$\lambda_{min}(\bar{H})|x_\sigma|^2 \leqslant v(x,\sigma) \leqslant \lambda_{max}(\bar{H})|x_\sigma|^2 ,$$

де
$$\begin{cases} \lambda_{min}(\bar{H}) = min \{ \lambda_{min}(H), k_1/2 \} \\ \lambda_{max}(\bar{H}) = max \{ \lambda_{max}(H), k_2/2 \} . \end{cases}$$

Для першої різниці справедливо

$$\Delta v(x(n,\sigma(n)) \leqslant -(x^T(n), f(\sigma(n))^T \bar{C}(x(n), f(\sigma(n)),$$

де

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{c|c} -[A^T HA - H + Lcc^T] & -[A^T Hb + (1+L\rho)\, c/2] \\ \hline -[A^T Hb + (1+L\rho)\, c/2]^T & \begin{array}{c} \rho - L\rho^2/2 - b^T Hb - \\ - L/k_1^2 - |L\rho - 1|/k_1 \end{array} \end{array} \right] .$$

Отримані умови абсолютної стійкості системи (27), аналогічні наведеним у теоремі 3. Перевірка їх зводиться до розв"язку оптимізаційної задачі. У випадку абсолютної стійкості системи (27) ставиться задача оптимального оцінювання

<u>Третій розділ</u> присвячений дослідженню стійкості різницевих систем з запізнюванням вигляду

$$x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j x(t_{k-j}), \; k=0,1,2,... \tag{29}$$

Отримані такі умови стійкості.

Т е о р е м а 5. Нехай існують сталі $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $j = \overline{1,m}$, і додатно визначена матриця H, при яких матриця $\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j$

асимптотично стійка і виконується нерівність

$$\lambda_{min}(H-\tilde{A}^T H\tilde{A}) - L(H) > 0,$$

$$L(H) = \sum_{j=1}^{m}\Big[2|\tilde{A}^T HB_j| + \sum_{j=1}^{m}|B_i^T HB_j|(\lambda_j+\sqrt{\varphi(H)})\Big](\lambda_j+\sqrt{\varphi(H)}),$$

$$\varphi(H) = \lambda_{max}(H)/\lambda_{min}(H) . \qquad (30)$$

Тоді система (29) асимптотично стійка при будь-яких запізненнях. Причому, для довільного розв"язку $x(t_k), k=1,2,...$ буде виконуватися $|x(t_k)| < \varepsilon$, як тільки $\|x(t_o)\| < \delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{\varphi(H)}$, $\|x(t_o)\|=max\{|x(t_{-m})|,|x(t_{-m+1})|,...|x(t_o)|\}$. Доведено, що при умовах теореми 5 розв"язки системи (29) збігаються за експоненційним законом.

Т е о р е м а 6. Нехай виконані умови теореми 5. Тоді для розв"язків $x(t_k)$, $k = 1,2,...$ системи (29) справедлива експоненційна збіжність

$$|x(t_k)| < \sqrt{\varphi(H)}\|x(t_o)\|\gamma^{-(t_k-t_o)}. \qquad (31)$$

Тут

$$\gamma = \left\{ \frac{[\lambda_{min}(C)-L(H)]\gamma_1^{\tau}-|\tilde{A}^T H\tilde{A}|(1-\gamma_1^{\tau})}{\lambda_{min}(C)-L(H)-|\tilde{A}^T H\tilde{A}|(1-\gamma_1^{\tau})} \right\}, \qquad (32)$$

γ_1 - лінійний додатний корінь рівняння

$$\gamma^{\tau}(\lambda +\gamma^{\tau}\sqrt{\varphi(H)}) = a,\ \tau = \max_{i=\overline{-m+1,0}}(t_i- t_{i-1}),\ \lambda = \max_{j=\overline{1,m}}\{\lambda_j\}$$

$$a = [(\sum_{j=1}^{m}|\tilde{A}^T HB_j|)^2+ \lambda_{min}(C)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|B_i^T HB_j| + \sum|\tilde{A}^T HB_j|]^{-1}\lambda_{min}(C).$$

Отримані також більш слабкі умови стійкості. Проте при цьому оцінки початкових збурень трохи гірші.

Т е о р е м а 7. Нехай існує додатно визначена матриця H і сталі $0 \leq \lambda_j \leq 1$, $j = \overline{1,m}$, при яких $\tilde{A}$ асимптотично стійка і виконується нерівність

$$\lambda_{min}(H-\tilde{A}^T H\tilde{A}) - M(H) > 0,$$

$$M(H) = \sum_{j=1}^{m}\Big[2|\tilde{A}^T HB_j| + \sum_{j=1}^{m}|B_i^T HB_j|\ R(H)\sqrt{\varphi(H)}\ \Big]R(H)\sqrt{\varphi(H)}\ ,$$

$$R(H) = |E-\lambda_1 A|+\lambda_1\sum_{s=1}^{m}|B_s| + \sum_{j=2}^{m}[\lambda_j|A|+|E-\lambda_j B_{j-1}|+\lambda_j\sum_{s=1}^{m}|B_s|].$$

Тоді система (29) асимптотично стійка при довільних запізненнях. Причому для будь-якого розв"язку $x(t_k), k=1,2,\ldots$ буде виконуватись $|x(t_k)| < \varepsilon$, як тільки $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$, де

$$\delta(\varepsilon) = (|A|+\sum^{m}|B_j|)^{-1}\varepsilon/\sqrt{\varphi(H)}, \quad \varphi(H) = \lambda_{max}(H)/\lambda_{min}(H) \quad .$$

Т е о р е м а 8. Нехай виконуються умови теореми 7. Тоді для розв"язку $x(t_k)$, $k = 1,2,\ldots$ системи (29) справедли... експоненційна оцінка

$$|x(t_k)| < [|A|+\sum_{j=1}^{m}|B|]\sqrt{\varphi(H)}\|x(t_0)\|\gamma^{-(t_k-t_0)/2} ,$$

де

$$\gamma = \left\{ \frac{[\lambda_{min}(C)-M(H)]\gamma_1^{\tau}-|\tilde{A}^{T}H\tilde{A}|(1-\gamma_1^{\tau})}{\lambda_{min}(C)-M(H)-|\tilde{A}^{T}H\tilde{A}|(1-\gamma_1^{\tau})} \right\},$$

$$\gamma_1 = \{[\sqrt{(\sum_{j=1}^{m}|\tilde{A}^{T}HB_j|)^2 + \lambda_{min}(C)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|B_i^{T}HB_j|} - \sum_{j=1}^{m}|A^{T}HB_j|]/R(H)\sqrt{\varphi(H)}\}^{1/\tau(m+1)} .$$

Умови стійкості системи з запізнюванням мають вигляд нерівностей, ліва частина яких залежить від матриці H, що змінюється на деякій множині додатно визначених матриць. Розглядаються оптимізаційні задачі знаходження матриці H_0 при якій ліва частина нерівності приймає максимальне значення.

У висновку подані головні результати дисертаційної роботи. Окреслюється коло нерозв"язаних задач, які можуть бути деяким внеском у розвитку методів дослідження стійкості і аналізу якісних характеристик нелінійних динамічних систем.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

- Розглянуто задачі оптимізації нелінійних різницевих систем загального вигляду, розв"язок яких дозволяє найточніше оцінювати основні якісні показники систем.
- Доведено твердження, що дають теоретичне обгрунтування побудові градієнтних множин функцій визначених через екстремальні власні числа симетричних матриць.
- Розроблено градієнтний метод побудови оптимальних оцінок розв"язків лінійних різницевих систем.
- Отримано ефективні достатні умови перевірки абсолютної

стійкості різницевих систем.

- Побудовано оцінки основних показників систем регулювання і розроблено градієнтний метод їх оптимальної оцінки в класі параметрично заданих функцій Ляпунова.
- Досліджені лінійні різницеві системи з багатьма запізнюваннями. Одержані достатні умови асимптотичної стійкості і обчислені коефіцієнти експоненційного згасання розв"язків.

За темою дисертації опубліковано такі роботи:

I. Кожаметов А.Т., Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценивания времени переходного процесса в разностных системах. К. -1989. -15с. / Деп. в УкрНИИНТИ 07.06.89. №1531 Ук-89.

2. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Оценки функционирования нелинейных разностных систем. / Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.89. №2396 Ук-89.

3. Хусаинов Д.Я., Стадник О.И., Шатырко А.В., Заяц И.Г. Оптимизация оценок характеристик решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // IY Международная конференция по диф. уравнениям и их приложениям. Тез. докл. БНР,г.Русе.-1989 -С.306,394.

4. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Об одном алгоритме идентификации параметров систем дифференциальных уравнений // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем.-1990 -Вып.9.-С.58-61.

5. Стадник О.И. Характеристики решений нелинейных разностных систем и их оптимизация // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов. Тез. докл. научной школы - семинара, К.-1990.-С.68.

6. Стадник О.И. Оценка области устойчивости квадратичных разностных систем // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов. Тез. докл. научной школы - семинара, К.-1991.-С.77.

7. Khusainov D.Ya., Stadnik O.I. Investigation of Nonlinear Difference Systems by Optimal Lyapunov's Functions Method // Abstrakt of invited lectures and short communications delived at the Second International Colloquium on differential equations.-Plovdiv.Bulgaria.-1991.-P.268,

8. Стадник О.И. Вычисление области устойчивости квадратичных разностных систем // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тез. докл. III Северо-Кавказской региональной конф.-Махачкала.-I99I.-С.147.

9. Стадник О.I. Оптимізаційні методи в дослідженнях абсолютної стійкості дискретних систем регулювання // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки.-I99I.-Вип.2.-С.35-39.

I0. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Исследование устойчивости рассинхронизированных систем прямым методом А.М.Ляпунова // Автоматика.-I99I.-№6.-С.I5-I9.

II. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Применение алгоритмов градиентного поиска для исследования устойчивости нелинейных разностных систем // Выч. и прикл.мат.-I99I.-Вып.75.-С.35-38.

I2. Стадник О.И. Об устойчивости разностных систем с запаздыванием // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением. Тез. докл. YI Четаевской конф. -Казань. -I992.-С.97.

I3. Стадник О.И. Исследование устойчивости функционально-разностных систем с произвольным запаздыванием // Моделирование и исследование устойчивости процессов. Тез. докл. научной конф. -К.-I992.-С.45.

I4. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Задачи оптимизации оценок решений нелинейных систем // Исследование операций и АСУ.-К.--I992.-Вып.38.-С.33-37.

I5. Стадник О.I. Оптимізаційні оцінки області стійкості квадратичних різницевих систем // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. -I992. -Вип.5. -С.67-74.

I6. Стадник О.И., Хусаинов Д.Я. Оценки устойчивости рассинхронизированных систем // УМЖ.-К.-I993.-№I.-С.148-153.

Підп. до друку 23.01.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 0,93. Умов. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,8.
Тираж 50 прим. Зам. 31. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3