ЧЕРНОВИЦКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Ю. ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукописи

ЗАХАРОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

ВЗахар

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХ И ТРЕХМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черновцы — 1993

ЧЕРНОВИЦКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Ю. ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукописи

ЗАХАРОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХ И ТРЕХМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черновцы - 1993

Работа выполнена на кафедре математического анализа Самарского государственного педагогического института.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.Ф.Волкодавов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Вирченко

кандидат физико-математических наук, доцент И.Д.Пукальский

Ведущая организация: Казанский государственный университет

Защита состоится "26" февраля 1993г. в ____ час. на заседании специализированного совета К 068.10.06 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Черновицком госуниверситете им. Ю.Федьковича (274012, г.Черновцы, ул. Коцюбинского, 2).

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Черновицкого госуниверситета им. Ю.Федьковича (ул. Л.Украинки, 23).

Автореферат разослан "22" января 1993г.

Ученый секретарь специализированного совета, к.ф.-м.н., доцент А.И.Сидовык

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из самых важных разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Это объясняется ее многочисленными приложениями в газовой динамике, теории оболочек, магнитной гидродинамике, а также других областях науки и техники.

Основы этой теории заложены в хорошо известных работах Ф.Трикоми, С.Геллерстедта, Ф.И.Франкля, К.И.Бабенко и других ученых СНГ и зарубежных ученых.

Основную библиографию можно найти в книгах А.В.Бицадзе, А.М.Нахушева, М.М.Смирнова и других.

В последнее время получен ряд интересных результатов в теории краевых задач для уравнений третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве. Отметим работы В.Ф.Волкодавова, В.И.Жегалова, А.М.Ежова. Заметим, что в трехмерном пространстве возможен более широкий спектр краевых задач.

Трудно переоценить роль функции Римана при решении краевых задач. Интересным представляется нахождение функций Римана, а также методов их построения как для уравнений второго порядка, так и для уравнений третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве.

Вопросам решения краевых задач для уравнений смешанного типа, методам построения функции Римана и решению краевых задач для уравнений Ш порядка в трехмерном пространстве и посвящена настоящая работа.

Цель работы.

I. Исследование вопросов существования и единственности одного обобщения задачи Трикоми для уравнения Кароля.

2. Решение краевых задач для одного класса дифференциальных уравнений в ограниченных и неограниченных областях трехмерного евклидового пространства.

3. Доказательство достаточного признака построения функций Римана и его применения.

Методы исследования. Основные результаты диссертационной работы получены на основании классических методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также аппарате специальных функций. При доказательстве существования решения использовались метод Римана, теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода, интегральных уравнений Абеля с бесконечным верхним пределом. Единственность решения задачи Трикоми для уравнения Кароля доказывается с помощью принципа локального экстремума.

Научная новизна. Введено понятие обобщенных решений класса $R^{+\infty}$ для уравнения Кароля, аналогичное понятию класса R_2, введенному И.Л.Каролем. Доказана единственность решения задачи $T^{+\infty}$ для уравнения Кароля. Для одного уравнения третьего порядка решены задачи Гурса, Коши-Гурса и Дарбу в ограниченных и неограниченных областях трехмерного евклидового пространства методами Римана и Р.-А. функции, Р.-А. задач Дарбу и Коши-Гурса построены автором. Доказан достаточный признак построения функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка и даны его применения.

Достоверность полученных результатов обеспечивалась обоснованием и строгим доказательством всех утверждений, сформулированных в диссертации.

Практическая и теоретическая значимость. Полученные в диссертации результаты являются новыми и имеют теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для уравнений второго и третьего порядка в двух- и трехмерных евклидовых пространствах, соответственно.

На защиту выносятся:

1. Обоснование единственности решения обобщения задачи Трикоми для уравнения Кароля.
2. Постановка и обоснование единственности и существования решения задач Гурса, Дарбу и Коши-Гурса для одного уравнения третьего порядка в ограниченных и неограниченных областях трехмерного евклидового пространства.
3. Достаточный признак построения функций Римана в трехмерном евклидовом пространстве и функции Римана для ряда модельных уравнений третьего порядка.

Апробация работы. Основные результаты и содержание работы докладывались и обсуждались:

- на областном семинаре по дифференциальным уравнениям при Самарском пединституте, г.Самара, 1990-1992 г.г.
- на семинаре при кафедре "Дифференциальные уравнения" Казанского государственного университета, г.Казань, 1992г.
- на научной конференции "Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений", г.Алма-Ата, 1991г.
- на международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции", г.Самара, 1992г.
- на проблемном семинаре по дифференциальным уравнениям при Черновицком государственном университете, г.Черновцы, 1992г.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы 6 печатных работ.

Объем и структура диссертации. Работа изложена на 128 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав и библиографического списка, содержащего 49 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор литературы по теме диссертации, показана актуальность темы исследований, приводится краткое содержание, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В первой главе рассматривается задача Трикоми для уравнения Кароля

$$\mathcal{L}(u) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, |y|^m u_{yy} = 0\,, \quad 0 \le m < 1 \qquad (1)$$

В первом параграфе этой главы поставлена задача Дарбу в неограниченной области D^-, ограниченной прямой $y=0$ ($x \in [0;+\infty)$) и характеристикой Γ, заданной уравнением

$$x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0 \quad (y \in (-\infty;0]),$$

а именно задача $D^{+\infty}$:

Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами

1. $u(x,y) \in C(\bar{D}^-)$,
2. $u(x,y)$ – решение уравнения

$$u_{xx} - (-y)^m u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

в области D^-,

3. $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad x \in [0;+\infty),$$

$$\lim_{\ell \to +\infty} \ell^{-q} u\Big(\ell - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}, y\Big) = \omega(y)\,, \quad y \in (-\infty;0],$$

где

$$\ell = x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\,, \quad q = \frac{m}{2(2-m)}$$

В характеристических координатах уравнение (2) переходит в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{\xi\eta} + \frac{q}{\xi-\eta}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad 0<2q<1 \tag{3}$$

Область D^- преобразуется в область

$H^{+\infty} = \{(\xi,\eta) : 0<\xi<\eta<+\infty\}$.

Краевые условия принимают вид:

$$u(\xi,\xi) = f_1(\xi), \quad \xi\in[0;+\infty) \tag{4}$$

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-q} u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{m-2}{4}(\eta-\xi)^{\frac{2}{2-m}}\right) = \omega_1(\xi), \ \xi\in[0;+\infty) \tag{5}$$

Единственность и существование решения этой задачи обосновывается по следующей схеме. Используя известное решение задачи Коши находим решение задачи Коши-Гурса в ограниченной области $H^{\ell} = \{(\xi,\eta) : 0<\xi<\eta<\ell\}$ для уравнения (3) с данными

$$u(\xi,\ell) = \psi(\xi), \quad \xi\in[0;\ell]$$

$$2(1+2q)^{2q} \lim_{\eta-\xi\to+0} (\eta-\xi)^{-2q}(u_\xi - u_\eta) = \nu(\xi), \ \xi\in(0;\ell) \tag{6}$$

Затем путем предельного перехода определяется решение задачи Коши-Гурса в неограниченной области $H^{+\infty}$ с данными (6) при $\xi\in(0;+\infty)$ и

$$\lim_{\ell\to+\infty} \ell^{-q} u(\xi,\ell) = \omega_1(\xi) \quad \text{равномерно при } \xi\in[0;+\infty) \tag{7}$$

Используя полученное решение находим решение поставленной задачи $D^{+\infty}$. Итогом первого параграфа первой главы является следующая теорема:

Если $f_1(x), \omega_1(x) \in C[0;+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \omega_1(x) = 0$, При достаточно больших x $f_1'(x)=O(x^{-\delta_1})$, $f_1''(x)=O(x^{-\delta_1-1})$, $\omega_1'(x)=O(x^{-\delta_2})$, $\omega_1''(x)=O(x^{-\delta_2-1})$, $\delta_1>1$, $\delta_2>1+q$,

то функция

$$u(\xi,\eta)=-(\eta-\xi)^{q}\int_{\xi}^{\eta}\omega_1'(t)\,F\!\left(-q,1+q;1;\frac{t-\xi}{\eta-\xi}\right)dt+$$

$$+K_1(\eta-\xi)^{1+2q}\int_{\eta}^{+\infty}\omega_1'(t)(t-\xi)^{-1-q}F\!\left(1+q,1+q;2+2q;\frac{\eta-\xi}{t-\xi}\right)dt-$$

$$-K_2\int_{\eta}^{+\infty}f_1'(t)(t-\xi)^{q}(t-\eta)^{-q}F\!\left(-2q,-q;1-q;\frac{t-\eta}{t-\xi}\right)dt$$

где $K_1=\dfrac{1}{2(1+2q)B(2q,1-q)}$, $K_2=\dfrac{1}{2qB(2q,1-q)}$

являются решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (4) и (5).

Во втором параграфе первой главы дано определение обобщенного решения $R^{+\infty}$, доказан принцип локального экстремума в следующей формулировке:

Если $u(\xi,\eta)$ - обобщенное решение класса $R^{+\infty}$ таково, что $u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$ принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение на отрезке (0; I) в точке ξ_0, при этом $g(\xi)\equiv 0$ и $\lim\limits_{\ell\to+\infty}\ell^{-q}u(\xi,\ell)\equiv 0$, то $\nu_-(\xi_0)<0$ $(\nu_-(\xi_0)>0)$.

В этом же параграфе дается постановка задачи $T^{+\infty}$.

Уравнение (I) рассмотрим на множестве $D=D^+\cup D^-$, где D^+ - область, ограниченная кривой Γ^+, лежащей в полуплоскости $y>0$ с концами в точках $A(1;0)$ и $B(0;0)$, и отрезком $y=0$ $(x\in[0;1])$.

Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1. $u(x,y)\in C(\bar{D})$,
2. $u(x,y)\in C^2(D^+)$, $\mathcal{L}(u)\equiv 0$ в области D^+,
3. $u(x,y)$ - обобщенное решение класса $R^{+\infty}$ в области D^-,
4. $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (4) и (5) при $x\in[1;+\infty)$,

   $u|_{\Gamma^+}=\varphi(s)$, s - дуговой параметр, отсчитываемый от точки A, $s\in[0;L]$, L - длина кривой Γ^+,
5. $u(x,y)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=-\lim_{y\to-0} u_y(x,y) \tag{8}$$

На основании принципа локального экстремума доказана теорема единственности решения этой задачи.

В третьем параграфе вычислены двадцать интегралов следующих видов

$$\int_a^b t^{\alpha}(1-t)^{\beta} f(x,s,t)\frac{dt}{t-x},$$

$$\int_a^b t^{\alpha}(1-t)^{\beta} f(x,s,t)\frac{dt}{t+x-2xt},\quad \alpha,\beta>-1,\ 0\le a<b\le 1,$$

где $f(x,s,t)$ - функция либо гипергеометрического типа одной или двух переменных, либо алгебраическая, либо их произведение.

В § 4 первой главы, используя уже известное решение задачи N в эллиптической области и решение задачи $D^{+\infty}$, полученное в первом параграфе настоящей работы, с учетом условия сопряжения (8), приходим к полному сингулярному уравнению второго рода с ядром Коши. Регуляризируя его, получаем уравнение Фредгольма. Однозначность разрешимости этого уравнения следует из единственности решения задачи $T^{+\infty}$. Откуда следует существование решения этой задачи. Запись этого решения ввиду его громоздкости (I66 слагаемых) автором не выписывается.

Во второй главе рассмотрено уравнение

$$u_{xyz} - A(x)B(y)C(z)u = 0 \tag{9}$$

где функции $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ могут иметь особенности различных порядков на плоскостях координат. Для этого уравнения методом Римана найдено решение задачи Гурса в области $V_0 = \{(x,y,z): 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c\}$ с данными

$$u(a,y,z) = f(y,z), \quad y\in[0;b], \; z\in[0;c], \tag{I0}$$

$$u(x,b,z) = g(x,z), \quad x\in[0;a], \; z\in[0;c], \tag{II}$$

$$u(x,y,c) = h(x,y), \quad x\in[0;a], \; y\in[0;b] \tag{I2}$$

Во втором параграфе этой главы путем предельного перехода построено решение задачи Гурса для уравнения (9) при $A(x) = x^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ в неограниченной области $V_1 = \{(x,y,z): 0<x<+\infty, 0<y<b, 0<z<c\}$ с данными (II), (I2) при $x\in[0;+\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,y,z) = f_1(y,z) \quad \text{равномерно при } y\in[0;b], \; z\in[0;c]$$

В этом же параграфе рассмотрены еще шесть задач с аналогичными краевыми условиями. Результаты обоснования единственности и существования этих задач сформулированы в виде теорем.

В третьем и четвертом параграфах этой главы методом Римана-Адамара обоснованы единственность и существование решения задач Коши-Гурса и Дарбу для уравнения (9) в области

$$V_2 = \{(x,y,z):\ 0<x<z<a,\ 0<y<b\}.$$

Функции Римана-Адамара этих задач построены автором.

<u>В третьей главе</u> доказан достаточный признак построения функций Римана для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в следующей формулировке:

Если $Q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ - функция Римана для уравнения

$$u_{xyz} + a_1 u_{xy} + b_1 u_{xz} + c_1 u_{yz} + d_1 u_x + e_1 u_y + f_1 u_z + g_1 u = 0$$

то функция

$$R(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \exp[\lambda(x,y,z;x_0,y_0,z_0)]\, Q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$$

где
$$\lambda(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{3}\Big\{ \int_z^{z_0} [a_2(x_0,y_0,t) + a_2(x_0,y,t) + a_2(x,y,t)]\,dt +$$
$$+ \int_y^{y_0} [b_2(x_0,t,z_0) + b_2(x,t,z_0) + b_2(x,t,z)]\,dt + \int_x^{x_0} [c_2(t,y_0,z_0) + c_2(t,y_0,z) + c_2(t,y,z)]\,dt$$

является функцией Римана для уравнения

$$u_{xyz} + (a_1+a_2)u_{xy} + (b_1+b_2)u_{xz} + (c_1+c_2)u_{yz} +$$
$$+ (d_1+d_2)u_x + (e_1+e_2)u_y + (f_1+f_2)u_z + (g_1+g_2)u = 0$$

при выполнении условий

$$a_{2x} = c_{2z},\quad a_{2y} = b_{2z},\quad b_{2x} = c_{2y},$$

и
$$d_2 = a_2 b_2 + a_{2y} + a_1 b_2 + a_2 b_1,$$
$$e_2 = a_2 c_2 + c_{2x} + a_1 c_2 + a_2 c_1,$$
$$f_2 = b_2 c_2 + b_{2x} + b_1 c_2 + b_2 c_1,$$
$$g_2 = c_2(d_1+d_2) + b_2(e_1+e_2) + a_2(f_1+f_2) - 2a_2 b_2 c_2 + b_{2xz} -$$
$$- a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 + a_1 c_{2y} + b_1 a_{2x} + c_1 b_{2z}.$$

$$a_i = a_i(x,y,z),\quad b_i = b_i(x,y,z),\quad c_i = c_i(x,y,z),\quad d_i = d_i(x,y,z),$$
$$e_i = e_i(x,y,z),\quad f_i = f_i(x,y,z),\quad g_i = g_i(x,y,z),\quad i = 1,2.$$

С помощью этого признака в явном виде построены функции Римана для следующих уравнений

$$u_{xyz}+\frac{\gamma}{z}u_{xy}+\frac{\beta}{y}u_{xz}+\frac{\alpha}{x}u_{yz}+\frac{\alpha_1}{yz}u_x+\frac{\beta_1}{xz}u_y+\frac{\gamma_1}{xy}u_z+\frac{\lambda}{xyz}u=0,$$

где

$$\alpha_1=\beta\gamma,\ \beta_1=\alpha\gamma,\ \gamma_1=\alpha\beta,\ \lambda=\alpha\beta\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in R,$$

$$u_{xyz}+\frac{1}{y-x}(\alpha u_{xy}+\beta u_{xz}+\gamma u_{yz})+\frac{1}{(y-x)^2}[\alpha\beta u_x-\alpha\beta u_y+\beta(1-\beta)u_z]+\frac{\alpha\beta(1-\beta)}{(y-x)^3}u=0,$$

$$u_{xyz}+\frac{\alpha}{z-y}u_{xy}+\frac{\beta}{y-x}u_{xz}-\frac{\beta}{y-x}u_{yz}+\frac{\alpha\beta}{(z-y)(y-x)}u_x-$$

$$-\frac{\alpha\beta}{(z-y)(y-x)}u_y+\frac{\beta(1-\beta)}{(y-x)^2}u_z+\frac{\alpha\beta(1-\beta)}{(z-y)(y-x)^2}u=0,$$

$$u_{xyz}+f(x)u_{yz}-f_1(x)f_2(y)f_3(z)u=0,$$

$$u_{xyz}+f(x)g'(y)u_{xz}+f'(x)g(y)u_{yz}+$$

$$+f'(x)g'(y)[1+f(x)g(y)]u_z-f_1(x)f_2(y)f_3(z)u=0,$$

$$u_{xyz}+f(x)g(y)h'(z)u_{xy}+f(x)g'(y)h(z)u_{xz}+f'(x)g(y)h(z)u_{yz}+$$

$$+f(x)g'(y)h'(z)[1+f(x)g(y)h(z)]u_x+f'(x)g(y)h'(z)[1+f(x)g(y)h(z)]u_y+$$

$$+f'(x)g'(y)h(z)[1+f(x)g(y)h(z)]u_z+f'(x)g'(y)h'(z)\{1+f(x)g(y)h(z)\cdot$$

$$\cdot[3+f(x)g(y)h(z)]\}u-f_1(x)f_2(y)f_3(z)u=0$$

В заключение автор выражает благодарность профессору В.Ф.Волкодавову и доценту Н.Я.Николаеву за помощь и поддержку, проявленные при написании настоящей работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. Об одном обобщении задачи Трикоми для уравнения Кароля // Тезисы докладов научной конференции. Алма-Ата. 22-25 мая I99Iг. Алма-Ата.I99I.с.26.

2. Захаров В.Н. Вычисление некоторых определенных интегралов со специальными функциями гипергеометрического типа // Тезисы докладов международной конференции. Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Самара. 24-3I мая I992г. Самара.I992. с. I04-I05.

3. Захаров В.Н. Задача Дарбу для одного уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве с характеристическими вырождениями различных порядков// Тезисы докладов международной конференции. Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Самара. 24-3I мая I992г. Самара. I992. с. I02-I03.

4. Захаров В.Н., Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Некоторые специальные функции и решения дифференциальных уравнений // Тезисы докладов международной конференции.Дифференциальные и интегральные уравнения, Математическая физика и специальные функции. Самара7 24-3I мая I992г. Самара. с. 56.

5. Захаров В.Н., Волкодавов В.Ф. Вычисление некоторых сингулярных интегралов со специальными функциями гипергеометрического типа // Сб. научных трудов / Дифференциальные уравнения/ Орский пед. ин-т. Орск. I992. с. II-I6.

6. Захаров В.Н., Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я., Быстрова О.К. Функция Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применение / Самара. Сам. госуниверситет. 1992. с. 80.