ХАРЬКОВСКИИ ГОСУДАРСТВЕННЫИ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БЫКОВ Николай Алексеевич

ГЛАДКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕИ И ИХ ДЕФОРМАЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

01.01.01. - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ХАРЬКОВ 1993

Работа выполнена в Физико-техническом институте низких температур им. Б.Е. Веркина АН Украины, г. Харьков

Научный руководитель - ТКАЧЕНКО Вадим Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Официальные оппоненты: ЧУЕШОВ Игорь Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, профессор;

ГОМОЗОВ Евгений Павлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Ведущая организация - Ростовский государственный университет;

Защита диссертации состоится "5" марта 1993 года в 15^15 часов на заседании специализированого совета К 053. 06. 02. при Харьковском государственном университете (310077, Харьков, пл. Независимости, 4, ауд. 6-48).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан "1" февраля 1993 года.

Ученый секретарь А.С. Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи классификации и приведения к нормальной форме динамических систем, заданных на многообразии в целом, и в особенности на окружности, восходят к классическим результатам Пуанкаре и Данжуа, в которых дана полная топологическая классификация транзитивных диффеоморфизмов окружности. Интерес к задачам гладкой классификации возник позднее и особенно возрос с появлением теорем Колмогорова и Эрмана об аналитической и гладкой приводимости отображения к повороту.

Рассматривая диффеоморфизмы с невырожденными периодическими точками, В. И. Арнольд*, высказал гипотезу о том, что в отличие от транзитивных диффеоморфизмов, для которых число вращения является инвариантом отображения в целом, локальные инварианты - мультипликаторы особенностей - являются единственными инвариантами гладкой эквивалентности.

Эта гипотеза была неявно опровергнута уже в работе М.И. Брина**. В дальнейшем, функциональные модули гладкой классификации диффеоморфизмов окружности и прямой с n гиперболическими периодическими точками были получены Г.Р. Белиц-

* Арнольд В.И., Малые знаменатели I, Изв. АН СССР, 1961, 25, 3, 21-37.

** Брин М.И., О включении диффеоморфизма в поток, Изв. Вузов, 1972, 123, 8, 19-25.

ким*.

Общая идея приводимости ограничений отображения или векторного поля в инвариантных областях к нормальным формам, имеющим жесткую стационарную группу, и возникновения отображений склейки на пересечении этих областей известна как явление Стокса в нелинейном анализе.

Эта идея была развита в ряде работ, в которых изучалась локальная эквивалентность вырожденных динамических систем. Аналитическая классификация ростков $f(z) = z + a_0 z^2 + \ldots$ конформных отображений окрестности нуля в $\mathbb{C}^1$ привела к открытию С.М. Ворониным функциональных модулей. К этой же задаче сводится и классификация пар инволюций прямой. Обобщение полученных результатов на случай ростков вида $f(z) = z + a_0 z^k + \ldots$ получено Экалем. На этом же пути были обнаружены функциональные инварианты локальных классов гладкой эквивалентности ростков векторных полей, имеющих пару чисто мнимых собственных значений линейного приближения в особой точке.

В отличие от диффеоморфизмов окружности, для которых явное вычисление функциональных инвариантов крайне затруднительно, возникла задача явного нахождения инварианта для векторных полей с произвольным набором особенностей конечной коразмерности, который имеет в этом случае естественную интегральную природу.

После описания полной системы инвариантов гладкой эквивалентности векторных полей естественно возникает задача описания их гладких деформаций в терминах полученных

* Белицкий Г.Р.,Гладкая классификация диффеоморфизмов с гиперболическими неподвижными точками,Сиб. мат. журн.,1986,27,6,21-24.

инвариантов. Локальные нормальные формы семейств векторных полей изучались во многих работах: линейные нормальные формы $A(\varepsilon)x\partial/\partial x$ нерезонансных ростков получены Г.Р. Белицким, локальные нормальные формы и версальные деформации одномерных вырожденных бесконечногладких ростков были получены Ю.С. Ильяшенко и С.Ю. Яковенко, аналогичные результаты в аналитическом случае были доказаны В.П. Костовым*.

Цель работы состоит в получении полной классификации аналитических и бесконечногладких векторных полей на окружности, не имеющих особенностей коразмерности бесконечность, относительно действия группы преобразований окружности класса C^r, $0 \leq r \leq \infty, A$, а также в построении гладких нормальных форм таких полей и их семейств.

Общая методика работы. В диссертации используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, нормальных форм и инвариантов.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

а) явно описана полная система инвариантов гладкой сопряженности векторных полей на окружности;

б) построены полиномиальные нормальные формы для векторных полей на S^1;

в) дана полная классификация гладких деформаций грубых векторных полей на S^1, явно указаны их версальные деформации, и доказана теорема версальности;

* Костов В.П., Версальные деформации дифференциальных форм степени α на прямой, Функц. анализ и его прил., 1984, 18, 4, 81-82.

г) доказано существование конечнопараметрической гладко версальной деформации для векторных полей на S^1;

д) построены аналитические нормальные формы семейств для некоторых классов векторных полей.

Теоретическая и практическая ценность результатов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в качественной теории дифференциальных уравнений и теории возмущений.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Всесоюзной школе по нелинейной динамике (Одесса 1990г.), Конференции молодых ученых МГУ (1991г.), Конференциях молодых ученых ФТИНТ АН Украины (1988,1989г.), были приняты в качестве тезисов Международного Конгресса "Особенности" (Лилль 1990г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-5].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав. Общий объем диссертации 126 страниц машинописного текста и два рисунка. Список литературы содержит 44 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В §1 определяются локально конечно-определенные векторные поля с особыми точками $\{ z_i \}_{i=1}^{m}$, являющиеся предметом изучения в данной работе, а также приводятся их локальные аналитические (C^∞) нормальные формы в окрестности особых точек.

В §2 рассматриваются векторные поля $H(y) = h(y)\partial/\partial y$ на конечном или бесконечном инвариантном интервале $I = (A, B) \subset \mathbb{R}^1$, имеющие на I единственную особую точку y_0 конечного порядка k. Таковыми являются сужения на интервалы (z_{i-1}, z_{i+1}), $i = 1,\dots,m$ рассматриваемых нами локально конечно-определенных полей на окружности.

Далее вводятся гладкие нормальные формы поля $H(y)$ на I: топологическая, C^0-нормальная форма $N_T(x)\partial/\partial x$, C^r-гладкая нормальная форма $N_S(x)\partial/\partial x$ при $1 \le r \le k-1$ и C^r-гладкие нормальные формы $N_K(x)\partial/\partial x$ при $k \le r \le \infty, A$, служащие обобщением локальных нормальных форм $(\pm y^k + \alpha y^{2k-1})\partial/\partial y$, даваемых леммой Таккенса из §1.

Далее, в основной лемме доказывается, что поле $H(y)$ на интервале I в любом классе гладкости приводится к соответствующей нормальной форме $N(x)\partial/\partial x$ на $\mathbb{R}^1$, причем всякий приводящий диффеоморфизм $F(y)$ однозначно задается неявным соотношением

$$\hat{N}(F(y)) = \begin{cases} \hat{L}(y) + \int_c^y R(\xi)d\xi + b_+, & y \in (y_0, B) \\ \hat{L}(y) + \int_c^y R(\xi)d\xi + b_-, & y \in (A, y_0) \end{cases}, \quad (ii)$$

где - $\hat{N}(x)$ некоторая фиксированная первообразная функции $1/N(x)$, $\hat{L}(y)$ - некоторая фиксированная первообразная главной части лорановского разложения функции $1/h(y)$ в точке y_0. $R(y) = 1/h(y) - L(y)$, c - фиксированная постоянная из интервала (A, y_0), $b_+, b_- \in \mathbb{R}^1$.

Класс гладкости сопряжения зависит не только от выбора нормальной формы $N(x)\partial/\partial x$, но и от "свободных констант" b_+, b_-. Всякий $C^k(I)$-диффеоморфизм $F(y)$, сопрягающий $H(y)$ на I и $N(x)\partial/\partial x = N_k(x)\partial/\partial x$ на $\mathbb{R}^1$, задается формулой

$$\hat{N}(\, F(y)\,) = \hat{L}(y) + \int_c^y R(\xi)d\xi + b \ , \ y \in (\, A \, , \, B \,) \ , \qquad \text{(iii)}$$

где b - некоторая вещественная константа. Обратно, при любом $b \in \mathbb{R}^1$ формула (iii) однозначно задает C^∞, аналитический диффеоморфизм, сопрягающий $H(y)$ на I и $N(x)\partial/\partial x = N_k(x)\partial/\partial x$ на $\mathbb{R}^1$.

В §3 особенности конечно-определенного векторного поля на окружности вместе с множеством их локальных инвариантов используются для определения <u>типа поля</u>

$$\Lambda_M^r = \Big\{ (\, \pm k_i \,) \, , \, (\, a_i \,) \Big\}_{i=1}^m \ ,$$

где k_i - кратности особенностей, a_i - отвечающие им локальные инварианты, $M = \max_{1 \le i \le m} k_i$, а параметр r определяет гладкость поля - $r = \infty$ либо $r = A$.

Далее, вводится понятие эквивалентности типов в классе C^r, соответствующее локальной эквивалентности полей в окрестности каждой особой точки.

Так как не всякий набор Λ_M^r задает тип некоторого векторного поля на окружности, то определяются топологически совместные наборы Λ_M^r, и доказывается возможность реализации произвольного совместного типа, как типа некоторого полиномиального векторного поля (лемма о реализации совместного типа).

В §4 реализуется общая схема построения коциклов и приводящих наборов для произвольного поля $V(z)$ типа Λ^r_M.

Обозначим через $V_i(z)$ ограничения $V(z)$ на дуги $U_i = (z_{i-1}, z_{i+1})$, $i = 1,\dots,m$.

Для полей $V_i(z)$ по основной лемме в любом классе гладкости определены нормальные формы $N^i(x)\partial/\partial x$ на $\mathbb{R}^1$ и приводящие гомеоморфизмы $\psi_i(z)$, $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^1$, составляющие приводящий набор $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^m$ класса C^r.

Набор отображений $\{G_i(x)\}_{i=1}^m$

$$G_i(x) = \psi^{-1}_{i+1} \circ \psi_i \ (x), \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1,\dots,m,$$

называется коциклом класса C^r, отвечающим приводящему набору $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^m$. Отображения $G_i(x)$ склеивают поле $V(z)$ из его нормальных форм на дугах U_i.

Набор C^r-гомеоморфизмов $\mathbb{R}^1$ - $\{S_i(x)\}_{i=1}^m$, принадлежащих стационарным группам полей $N^i(x)\partial/\partial x$ называется симметрией S класса C^r, отвечающей типу Λ^r_M.

Теорема 1 устанавливает, что сопряженность в классе C^r векторных полей эквивалентных типов приводит к двусторонней эквивалентности произвольных коциклов, отвечающих данным полям, которая осуществляется с помощью некоторой C^r-симметрии S. И обратно, существование C^r-эквивалентных коциклов гарантирует сопряженность самих векторных полей.

Тип Λ^r_M вместе с коциклом G^r_ψ можно рассматривать как альтернативный способ задания локально конечно-определенного векторного поля на окружности. В заключение §4 дается независимое от приводящего набора, и тем самым от самого векторного поля $V(z)$, определение коцикла G^r и доказывается возможность реализации произвольного коцикла.

Таким образом, поскольку эквивалентность полей сводится к равенству коциклов, то, выписывая для последних явные представления, можно получить числовой инвариант эквивалентности.

В §5 показано, что для полей произвольного типа Λ^r_M правильно регуляризованный интеграл $J_v = \oint \frac{dz}{v(z)}$ является классифицирующим инвариантом.

Мы полагаем

$$J(V) = J_v = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{c_{i+1}}^{c_i} R_i(\xi)d\xi + \hat{L}_{i+1}(c_{i+1}) - \hat{L}_i(c_{i+1}) \right\}, \quad \text{(iv)}$$

где функции $R_i(z)$, $\hat{L}_i(z)$, отвечающие полю $V_i(z)$, те же, что были определены в основной лемме для поля $H(y)$, $c_i \in U_{i-1} \cap U_i$, $i = 1,\dots,m$ - некоторые фиксированные точки на окружности.

Другой формой представления инварианта $J(V)$ является

$$J(V) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \oint_{S^1_\varepsilon} \frac{dz}{v(z)} + \sum_{i=1}^{m} (\hat{L}_i(z_i - \varepsilon) - \hat{L}_i(z_i + \varepsilon)) \right\},$$

где $S^1_\varepsilon = [0,2\pi] / \{ \bigcup_{i=1}^{m} (z_i - \varepsilon , z_i + \varepsilon) \}$.

При доказательстве теоремы 2 показано, что, если класс гладкости сопряжения невысок по сравнению с $M = \max_{1 \le i \le m} k_i - 1 \le r \le M - 1$, то запаса "свободных констант" b_+, b_- хватает, для того, чтобы уравнять коциклы полей, и в этом случае никаких инвариантов сопряженности кроме локальных не возникает.

Если же, $r \geq M$, то $b_+ = b_-$, и существуют неравные коциклы полей $V(z)$ и $W(z)$, причем условием их равенства является соотношение $J(V) = J(W)$.

В §6 с помощью доказанной в §5 классификационной теоремы строятся гладкие нормальные формы векторных полей на $\mathbb{S}^1$.

В качестве нормальных форм произвольного типа Λ^r_M рассмотрено семейство векторных полей

$$P(z,s) = Q(z)\ (\ 1 - sQ(z)\ )\partial/\partial z\ ,\ s \in \Omega \subset \mathbb{R}^1\ ,$$

где $Q(z)$ - произвольный тригонометрический полином, такой что векторное поле $Q(z)\partial/\partial z$ является полем типа Λ^A_M, Ω - некоторый интервал в $\mathbb{R}^1$, зависящий от свойств типа Λ^r_M.

Любое поле $V(z)$ типа Λ^r_M $C^M(\mathbb{S}^1)$-приводится к полю $P(z,s)$ при некоторм s, функция $J(s) = J(\ P(z,s)\ )$ монотонно пробегает всю прямую, когда s пробегает Ω, и тем самым отображение $J\colon \Lambda^r_M \to \mathbb{R}^1$, $J = J(V(z))$ сюръективно.

В §7 рассмотрены некоторые частные случаи и примеры, такие как классификация грубых векторных полей, полей с единственной особой точкой и др. Здесь показано, что, в отличие от случая окружности, некомпактность $\mathbb{R}^1$ приводит к тому, что константы, определяющие коциклы, всегда могут быть уравнены (отсутствие соотношения цикличности).

Основные результаты главы 1, содержащиеся в теоремах 2,3 диссертации, можно сформулировать в следующем виде

Теорема 1. <u>Для эквивалентности двух локально</u>

конечно-определенных векторных полей на окружности V, W типов $\Lambda^{r_1}_{M_1}$, $\Theta^{r_2}_{M_2}$ в классе $C^r(S^1)$ необходимо и достаточно, чтобы

i) при $r = 0$ типы $\Lambda^{r_1}_{M_1}$, $\Theta^{r_2}_{M_2}$ были топологически эквивалентны;

ii) при $1 \le r \le M - 1$ типы $\Lambda^{r_1}_{M_1}$, $\Theta^{r_2}_{M_2}$ были эквивалентны в классе C^r;

iii) при $r \ge M$ типы $\Lambda^{r_1}_{M_1}$, $\Theta^{r_2}_{M_2}$ были эквивалентны в классе C^M, и $J(V) = J(W)$.

Отображение $J\colon \Lambda^r_M \to \mathbb{R}^1$, $J = J(V(z))$, сюръективно.

Для любого поля $V(z)$ типа Λ^r_M существует такое вещественное s, что $V(z)$ эквивалентно $P(z,s)$ в классе $C^M(S^1)$ (в классе $C^\infty(S^1)$ при $r = \infty$ и аналитически при $r = A$).

Вторая глава диссертации посвящена нахождению гладких версальных деформаций векторных полей на S^1.

В §1 главы 2 мы приводим локальные нормальные формы локально конечно-определенных полей, локальные версальные и инфинитезимально версальные деформации, и обсуждаем их свойства.

В §2 полностью решается задача описания гладко версальных деформаций грубых векторных полей на окружности.

Пусть $V_0(z) = v_0(z)\partial/\partial z$ - грубое векторное поле класса $C^h(S^1)$, $2 \le h \le \infty, A$, на окружности с мультипликаторами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Поскольку при малых ε поля $V(\varepsilon)$ остаются грубыми, то для произвольной C^H-деформации $V(\varepsilon)$ поля $v_0(z)$ определено $C^{H-1}(U(0))$ отображение $I_V\colon U(0) \to \mathbb{R}^{m+1}$, $I_V(\varepsilon) = (\alpha_1(\varepsilon), \ldots, \alpha_m(\varepsilon), J(\varepsilon))$.

Отображение $I(\varepsilon)$ - является полным инвариантом C^1-сопряженности, а следовательно, при каждом $\varepsilon \in U(0)$ деформации $V(\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ C^1-эквивалентны, если только существует локальное решение $F(\varepsilon)$ уравнения

$$I_V(F(\varepsilon)) = I_W(\varepsilon). \qquad (v)$$

Пользуясь явными формулами для сопрягающего диффеоморфизма, полученными в §7 гл.1, и локальной версальностью деформаций $\alpha_i(\varepsilon)z\,\partial/\partial z$ оказывается возможным выбрать семейство приводящих диффеоморфизмов $\Phi(z,\varepsilon)$ гладко зависящим от параметра ε, если решение $F(\varepsilon)$ имеет достаточную гладкость.

Таким образом, в грубом случае эквивалентность деформаций сводится к гладкой разрешимости уравнения (v). Как следствие этого получаем, что любая деформация грубого векторного поля на S^1 эквивалентна семейству тригонометрических полиномов, а для гладкой версальности деформации $V(\varepsilon)$ поля $V_o(z)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\operatorname{rg} I'_V(0) = m + 1 .$$

Иными словами, минимальное число параметров гладко версальной деформации в типе Λ_1^r равно $m + 1$.

Вычислив производную $I'_V(0)$, получаем, что соотношение

$$\operatorname{rg} (\, b_{ij})_{i=1,m+1}^{j=1,n} =$$

$$= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} f_j'(z_i) - \dfrac{v_o''(z_i)\, f_j(z_i)}{\alpha_i} \\ \text{v.p.} \oint \{\, h_j'(z)v_o(z) - h_j(z)v_o'(z) - f_j(z) \,\} \dfrac{dz}{v_o(z)^2} \end{bmatrix} =$$

$$= m + 1 ,$$

где $f_j(z)$ - начальные скорости деформации, а $h_j(z)$ - некоторые гладкие функции на S^1, зависящие лишь от шевелений особых точек, является критерием гладкой версальности.

Если теперь $T_j(z)$, $j = 1,\dots,m$ - полиномы на S^1 такие, что $T_j(z_i) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\dots,m$, то для любого грубого поля $v(z)$ на окружности $m + 1$-параметрическая деформация

$$D(z,\varepsilon) = v_o(z) \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j T_j(z) + \varepsilon_{m+1} v_o(z) \right) \partial/\partial z$$

является миниверсальной.

При доказательстве теоремы версальности мы получаем критерий разрешимости инфинитезимального уравнения

$$v_o(z)\phi'(z) - v_o'(z)\phi(z) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j(z) + \tau(z) \qquad (vi)$$

относительно неизвестной функции $\phi(z) \in C^2(S^1)$ и констант ε_j при любой гладкой функции на окружности $\tau(z)$.

Объединяя формальные и интегральные инварианты уравнения (vi) , получаем, что для разрешимости инфинитезимального уравнения в целом необходимо и достаточно выполнение условия

$$\operatorname{rg} (b_{ij})_{i=1,m}^{j=1,n} =$$

$$= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} f_j'(z_i) - \dfrac{v_o''(z_i) f_j(z_i)}{\alpha_i} \\ \text{v.p.} \oint \{ \delta_j'(z)v_o(z) - \delta_j(z)v_o'(z) - f_j(z) \} \dfrac{dz}{v_o(z)^2} \end{bmatrix} =$$

$= m + 1,$

причем можно положить $\delta_i(z) = h_i(z)$, $j = 1,\dots,n$.

Отсюда следует утверждение теоремы версальности.

Таким образом, в случае одномерных грубых векторных полей версальность как локально, так и в целом определяется на линейном уровне.

В §3 доказывается факт существования конечно параметрической C^∞-версальной деформации для произвольного локально конечно-определенного поля.

Согласно теореме Ю.С. Ильяшенко и С.Ю. Яковенко о C^∞-приводимости, в некоторой малой окрестности каждой особой точки поля $v_o(z)$ - z_i существует локальная версальная C^∞-деформация $n_i(z,\alpha_i)$, $z \in U_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, где k_i - кратность особой точки z_i , $i = 1,\dots,m$.

Мы продолжаем локальные семейства $n_i(z,\alpha_i)$ до C^∞-семейства векторных полей $N_o(z,\alpha)$ на $\mathbb{S}^1$ и полагаем

$$N(z,\alpha,\mu) = N_o(z,\alpha) \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \tau_i(z) \right) ,$$

$z \in \mathbb{S}^1$, $\mu_i \in O_i$, где O_i - некоторые окрестности точек μ_i^o в $\mathbb{R}^1$, $\tau(z)$ - некоторые фиксированные C^∞-функции на $\mathbb{S}^1$.

Показано, что для любой 1-параметрической C^∞-деформации $V(\varepsilon)$ поля $v_o(z)$ найдутся C^∞-замены параметров (α,μ) и координаты z , приводящие семейство $V(\varepsilon)$ к семейству $N(\alpha,\mu)$.

В §4 решается задача построения полиномиальных нормальных форм с минимальным числом параметров для типичных деформаций полей типа Λ_k^A , имеющих единственную особенность.

Основные результаты главы 2 диссертации, содержащиеся в теоремах 6,8,11 , теореме версальности ... могут быть сформулированы в следующем виде.

Теорема 2. Деформации $V(\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ грубого векторного поля на S^1 C^1-эквивалентны, если и только если существует локальное гладкое решение $F(\varepsilon)$ уравнения (v).

Инфинитезимально версальная деформация грубого векторного поля на окружности гладко версальна.

Для любого локально-конечно определенного векторного поля на S^1 существует C^∞-версальная конечнопараметрическая деформация.

Для любого локально-конечно определенного векторного поля на S^1 с единственной особой точкой существует полиномиальная миниверсальная деформация.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Быков Н.А., Гладкая классификация грубых векторных полей на окружности, Теор. функ., функц. ан. и их прил., Выща шк., 1989, 110-113.
2. Быков Н.А., Гладкая эквивалентность векторных полей на окружности, ДАН УССР, Сер. "А", Физ.-мат. и техн. науки, 1991, 3, 5-7.
3. Быков Н.А., Гладко версальные деформации грубых векторных полей на окружности, Мат. заметки, 1991, 49, 5, 26-31.
4. Быков Н.А., Гладкая классификация векторных полей на окружности. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992.
5. Bykov N., On the smooth classification of singular vector fields on the circle, proceed. "Intern. Congr. Singularities", Lille, 1991.

Ответственный за выпуск М.В. Гончаренко

Подписано к печати 15.01.1993 Физ. п.л. 1

Уч.-изд. л. 1. Заказ N 20 Тираж 100 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины. 310164, Харьков, пр. Ленина, 47.