Академія наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора
Інститут математики

На правах рукопису

Бондарєв Борис Володимирович

НЕАСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ СТАТИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Спеціальність 01.01.05. — теорія ймовірностей та математична статистика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ-1993

Робота виконана у Донецьк

Офіційні опоненти :

доктор фізико-математичних наук, професор Турбін А.Ф.,

доктор фізико-математичних наук, професор Кнопов П.С.,

доктор фізико-математичних наук, професор Ліньков Ю.Н.

Провідна організація: Інститут проблем передачі інформації Російської Академії наук

Захист дисертації відбудеться "9" лютого 1993 г.
о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01
при Інституті математики АН України
за адресою: 252601 м. Київ вул. Терещенківська , 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці інституту.

Авторефераі розіслано "6" січня 1993 г.

Вчений секретар
спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук Гусак Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність роботи. Після того, як у 1937 році на конференції з теорії ймовірностей у Женеві Є.Найтан зачитав доклад, присвячений розробленій їм теорії надійних інтервалів, питання побудови надійної області стало невід'ємним пунктом будь-якого статистичного дослідження. Це пояснюється тим, що у більшості випадків важливо знати не тільки оцінку невідомого параметра, але й вказати область, в якій приблизно повинно знаходитися справжнє значення параметра. Побудована за результатами спостережень, така область може змінюватися від вибірки до вибірки, вона є випадковою , отже можна говорити про ймовірність того, що область покриває справжнє значення параметра. Вибираючи $\gamma > 0$, ми маємо можливість поставити за мету, побудувати правило, яке дозволяє поставити у відповідність результатам спостережень таку область у "параметричній" множині, що з ймовірністю $1 - \gamma$ справжнє значення параметра буде знаходитися у цій області. Величина $1 - \gamma$ має назву коефіцієнт надійності.

Нехай X — спостереження над випадковим елементом ξ, розподіл якого містить невідомий параметр $\theta_0 \in \Theta$ — параметричній множині. Нехай $\theta(x)$ — яка-небудь оцінка параметра θ_0. Знаючи розподіл $\theta(x)$, за даним $\gamma > 0$ неважко побудувати надійний інтервал для θ_0 з коефіцієнтом надійності $1 - \gamma$. На жаль (за рідкісним винятком — дріб Стьюдента і т.д.), точний розподіл оцінки $\theta(x)$ невідомий досліднику, тому доводиться обгрунтовувати вибір меж на відповідних граничних розподілах, що, природно, не дає правильної уяви про ймовірність покриття, яка відрізняється від справжньої на доданок, який характеризується швидкістю збіжності до граничного розподілу. Встановити оцінку швидкості збіжності — виписати коефіцієнти навіть у випадку незалежних спостережень скінченномірності параметра — задача, пов'язана з певними труднощами, не кажучи вже про випадки залежних спостережень і функціональних варіантів оцінюваного параметра, для яких ці методи знаходяться у стані розробок та ми маємо лише деякі розрізнені результати. У ролі параметра може фігурувати елемент функціонального простору. Окрім того, у найбільш цікавих випадках невідомий параметр θ_0 входить до оцінки швидкості збіжності таким чином, що взагалі неможливо користуватися граничними теоремами для побудови надійних областей. Досить розглянути з цієї точки зору побудову надійних областей для невідомої ймовірності $0 < p < 1$ у схемі Бернуллі. Нерівність Беррі-Ессена у даному випадку має вигляд

$$\left| P\left\{ \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \le \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

очевидно, якщо нема ніяких опріорних оцінок для p ($p \ge p_0 > 0$, p_0 — відоме), то надійний інтервал для невідомого p побудувати за допомогою поданої нерівності взагалі неможливо. Разом з цим надійний інтервал (область) виявляється досить легко можна побудувати на основі експоненціальних нерівностей для ймовірності відхилення нормованої різниці між оцінкою й оцінюваною величиною за зростаючий рівень. Так, наприклад, у випадку схеми Бернуллі ця нерівність має вигляд

$$P\left\{\sqrt{n}\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| > R\right\} \le 2\exp\{-R\},$$

тут p — невідома ймовірність наступу події A, ν_n — кількість настань події A у серії з n незалежних випробувань.
Нехай $\gamma > 0$ — мале, $R_\gamma \ge \sqrt{-\ln\frac{\gamma}{2}}$, тоді з ймовірністю не менш ніж $1 - \gamma$ маємо

$$\frac{\nu_n}{n} - \frac{R_\gamma}{\sqrt{n}} < P < \frac{\nu_n}{n} + \frac{R_\gamma}{\sqrt{n}}$$

Так при $\gamma = 0{,}02$, $R_\gamma < 2{,}15$ слід відзначити, що подана методика побудови надійних областей дає можливість отримувати позитивний результат навіть у тих випадках, коли відповідних граничних теорем немає. Останній фактор має особливе значення під час статистичного дослідження динамічних систем. Під час вивчання поводження стохастичних динамічних систем не менш важлива наступна задача, у деякому вигляді зворотна до задачі побудови надійної області в класичній статистиці. Тобто, нехай у метриці відповідного простору $\xi_\varepsilon(t)$ збігається, якщо $\varepsilon \to 0$, до $\xi_O(t)$ — випадкового процесу, "влаштованого" простіше, ніж $\xi_\varepsilon(t)$. (Наприклад, у випадку стохастичного принципу усереднення, процес $\xi_O(t)$ — розв'язання відповідної детермінованої системи).
Поставимо наступну задачу:
маючи задану ймовірність покриття, треба розрахувати по $\xi_O(t)$ межі області, в якій буде знаходитися $\xi_\varepsilon(t)$ — траєкторія руху вихідної стохастичної системи. Побудувавши відповідні експоненціальні нерівності, ми маємо можливість позитивно відповісти на поставлене запитання навіть у тих випадках, коли відповідні граничні інтеграли для нормованої різниці між $\xi_\varepsilon(t)$ та $\xi_O(t)$ не мають місця.

За всіма цими причинами задача побудови експоненціальних нерівностей при дослідженні динамічних систем є актуальною та важливою на практиці. Розробці такого напряму і присвячена дисертація.
Мета роботи. Метою роботи є розробка методів побудови експоненціальних нерівностей у стохастичних динамічних системах : при оцінюванні невідомих параметрів у С.Д.Р., при дослідженні принципу усереднення у стохастичних системах, при перевірці стохастичних гіпотез, а також при непараметричнім оцінюванні невідомих діянь у детермінованому середовищі.
Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь, параболічних, еліптичних та гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку, методи підсумування слабко залежних випадкових елементів у функціональних просторах, а також способи теорії стохастичної апроксимації.
Наукова новизна. У дисертації вперше встановлено експоненціальні нерівності при оцінюванні невідомих параметрів у С.Д.Р., при оцінці розв'язання задачі Дирихле. Запропоновано спосіб побудови експоненціальних нерівностей у стохастичних системах, який грунтується на абсолютній неперервності мір, породжених розв'язанням та збурним процесом. Досліджено оцінки невідомого параметра, мультиплікативно вхідного до "шуму".

При дослідженні принципу усереднення у стохастичних системах побудовано надійні області, в яких із заданою ймовірністю буде знаходитися розв'язок початкової системи. Межі області розраховано по розв'язку усередненої системи, яка є детермінованою. Розглянуто як випадки збурення процессами з незалежними приростами, так і випадки збурення процесами, які задовольняють умову сильного, або рівномірно сильного перемішування. З'ясовані умови, з яких усереднення початкової стохастичної системи з залежністю від усього минулого дає детерміновану систему марківського типу.

Досліджено питання усереднення у стохастичних системах, які описуються рівняннями з частинними похідними параболічного та гіперболічного типу.

Побудовано експоненціальні нерівності для статистики А.Н. Колмогорова у випадку кусково-неперервної гіпотетичної функції розподілу для статистик $\omega_n^2\,(\theta_o)$ та ω_n^2, де θ_o — невідомий параметр у сім'ї функцій розподілу, коли спостереження зв'язані у стаціонарну послідовність, яка задовольняє яку-небудь з умов слабкої залежності.

Встановлено оцінки "розрахункових" швидкостей та "розрахункових" діянь у стохастичних системах.

Теоретична та практична цінність роботи. Методи, розроблені у дисертації, вживаються при статистичному дослідженні стохастичних систем, які можна описати диференціальними рівняннями, як звичайними, так і рівняннями з частинними похідними при випадкових діяннях дуже загального виду.

Запропоновані методи дослідження у стохастичних системах дозволяють використовувати у розрахунках процеси, простіше побудовані, ніж похідні, частковим випадком є відповідь на традиційне питання інженерів : наскільки малим повинен бути параметр $\varepsilon > 0$, щоб розв'язання початкової стохастичної системи можна було підмінити розв'язанням усередненої детермінованої системи. Експоненціальні нерівності, побудовані для статистики А.Н.Колмогорова, для статистики ω_n^2 у випадку слабко залежних спостережень дають можливість ефективно перевіряти статистичні гіпотези про функцію розподілу.

У випадку гіпотетичної сім'ї, залежної від невідомого параметра, побудована позитивна виправка до $\omega_n^2(\theta_n)$, яка дозволяє вірніше розрахувати критичний рівень при перевірці параметричних гіпотез непараметричними засобами. Таким чином, запропонована методика перевірки гіпотез про належність функції розподілу спостереженої випадкової величини параметричній сім'ї функцій розподілу. Запропоновані засоби непараметричного оцінювання "розрахункових" діянь дозволяють учинити "якісний" аналіз поведінки системи у детермінованому середовищі. Розроблені у дисертації методи аналізу стохастичних систем ефективні та легко реалізуються при застосуваннях , а запропоновані засоби дослідження можуть бути використані не тільки при дослідженні споріднених ситуацій, а також стати основою для дослідження ситуацій, не зрушених у цій роботі.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися на III та V міжнародних Вільнюських конференціях з теорії ймовірностей та математичної статистики (1982 та 1985), на Республіканській конференції з стохастичних диференціальних рівнянь (1982), на IV та VI радянсько-японських симпозіумах з теорії ймовірностей та математичної статистики (1982, 1992), на I Всесвітньому конгресі товариства ім. Бернуллі (1986), на Всесоюзній науково-технічній конференції з міжнародною участю членів РЕВ "Застосування статистичних методів у виробництві та управлінні" (1990), на I та II Донецьких конференціях "Ймовірнісні моделі процесів у керуванні та надійності" (1978, 1990), на семінарі "Асимптотичні методи статистики" Московського державного університету ім. М.В.Ломоносова (1984), на Республіканському семінарі з теорії ймовірностей та математичної статистики Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченко (1984), на семінарах відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту прикладної математики та механіки АН України (1977 - 1992), на другій Українсько- Угорській конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (1992).

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 23 друкованих роботах.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів та списку літератури, який містить у собі 150 найменувань вітчизняних та закордонних авторів. Загальний обсяг дисертації разом з списком літератури — 358 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

У вступі сформульована мета роботи, визначені її задачі, наукова та практична вага, виділені основні положення, які виносяться на захист.

Перший розділ носить назву "Експоненціальні нерівності у стохастичних системах з неперервним часом. Оцінки невідомих параметрів".

§ 1. НЕРІВНОСТІ ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ.

Теорема 1. Нехай рівняння $R(x) = 0$ має єдиний розв'язок θ_0, $|\theta_0| \le N < +\infty$ — відома апріорна оцінка, $R(x)$ така, що

$\nu |x - \theta_0|^2 \le R(x)(x - \theta_0)$, $\nu > 0$

$X(t)$ — розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = -\frac{a}{1+t}\Big[R(X(t))dt + \sigma_t(X(\cdot))dw(t) + \int f_t(X(\cdot),u)\tilde{\nu}(du,dt)\Big],\ X(0) = 0 -$$

неперервна процедура Робінса-Монро відшукання θ_0, $\sigma_t(X(\cdot))$, $f_t(X(\cdot),u)$ — неупереджуючі функціонали, тоді має місце оцінка

$$P\Big\{ \sup_{T \le t < +\infty} (1+t)^{a\beta} \big| X(t) - X_0 \big| > R \Big\} \le$$

$$\le 4\exp\Big\{ -\frac{1}{2ad}\varphi(R,T,N,\beta) + \frac{eC}{2d^2(1-2a\nu)} \Big\},$$

e — число Ейлера, $\big| f_t(X(\cdot),u) \big| \le d < +\infty$,

$$\left| \sigma_t(X(\cdot))\right|^2 + \int \left| f_t(X(\cdot),u)\right|^2 \pi(du) \le C < +\infty,$$
$$\varphi(R,T,N,\beta) = RT^{a(\nu-\beta)} - N > 0,$$
$$0 < a < \frac{1}{2\beta}, \quad 0 < \beta \le \nu.$$

Оцінки подібного вигляду отримані під час оцінювання невідомого параметра у зносі С.Д.Р.

$$d\xi_{\theta_o}(t) = a_t(\xi_{\theta_o}(\cdot),\theta_o)\, dt + \sigma_t(\xi_{\theta_o}(\cdot))dw(t) + \int f_t(\xi_{\theta_o(\cdot)},u)\, \tilde{\nu}(du,dt)$$

— тут $|\theta_o| \le N < +\infty$ — невідомий параметр, $\xi_T^{\theta_o} = \{ \xi_{\theta_o}(t),\ 0 \le t \le T \}$ — траєкторія, яку ми спостерігаємо. Розглянено дві процедури оцінювань :

$$d\,\theta(t) = \frac{a}{1+t}\left[d\xi_{\theta_o}(t) - a_t(\xi_{\theta_o}(\cdot),\theta(t))\, dt\right]\frac{\partial a_t(\xi_{\theta_o}(\cdot),\theta(t))}{\partial\theta} \text{ — неперервна,}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{a}{n}\int_n^{n+1}\left[d\xi_{\theta_o}(t) - a_t(\xi_{\theta_o}(\cdot),\theta_n)dt\right]\frac{\partial a_t}{\partial\theta}(\xi_{\theta_o}(\cdot),\theta_n), \qquad \theta_1 = 0$$

— дискретна процедура,а також неперервна та дискретна процедура Робінса-Монро знаходження оцінки невідомого параметра у стохастичній задачі Гурса.

$$d\xi_{\theta_o}(t,s) = a(t,s,\xi_{\theta_o}(t,s),\theta_o)\, dt\, ds + \sigma(t,s,\xi_{\theta_o}(t,s))\, dw(t,s)$$
$$\xi_{\theta_o}(t,s)\Big|_{t=0} = \varphi(s), \quad \xi_{\theta_o}(t,s)\Big|_{s=0} = \psi(s), \quad \varphi(0) = \psi(0)$$

Цим питанням присвячені теореми 2, 3, 4 § 1 глави I.

У § 2 першої глави у випадку лінійного входження невідомого параметра у снос рівняння побудовані оцінки вигляду

$$P\{\sqrt{T}\,|\theta_T - \theta_o| > R\} \le C_1\exp\{-C_2\varepsilon R\} + C_3\exp\{C_4T^{\alpha}\}$$

Теорема1. Нехай спостерігається $\xi_T^{\theta_o} = \{\xi_{\theta_o}(t),\ 0 \le t \le T\}$,де

$$d\xi_{\theta_o}(t) = \theta_o\, a\big(t,\xi_{\theta_o}(t)\big)\, dt + d\zeta(t), \quad \xi_{\theta_o}(0) = 0,$$
$$d\,\zeta(t) = \sigma(t)dw(t) + \int f(t,u)\, \tilde{\nu}(du,dt),\ |\theta_o| \le N$$

; тоді має місце оцінка

$$P\{\sqrt{T}\,|\theta_T - \theta_o| > R\} \le 2\exp\left\{-\frac{R^2\varepsilon^2}{8C_1^2}\right\} + 2\exp\left\{-\frac{R\varepsilon}{2d}\right\}\exp\left\{\frac{C_2\,\varepsilon}{2d^2}\right\} +$$
$$+ \left[M\exp\left\{-\frac{1+N^2}{2}\int_o^T\frac{a^2(t,\zeta(t))}{\sigma^2(t)}\right\}\right]^{\frac{1}{1+N^2}} e^{\varepsilon T}, \qquad (1)$$

$$\text{де } \left|\frac{a(t,x)}{\sigma(t)}\right| \le C_1 < +\infty, \quad \left|\frac{f(t,u)\, a(t,x)}{\sigma(t)}\right| \le d < +\infty,$$

$$\int \left|\frac{f(t,u)\, a(t,x)}{\sigma(t)}\right|^2 \pi(du) \le C_2 < \infty, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

У ряді випадків можна побудувати експоненціально спадну по T оцінку другого доданку у (1) :

а) $\sigma(t) = 1,\ f(t,u) \equiv 0,\ a^2(t,x) \ge x^2;$

б) $a^2(x) = a^2(-x)$, $\inf\limits_{0 \le x < +\infty}\left[a^2(x) + \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right] \ge \rho^2 > 0;$

в) $a^2(x)\big|_{x=a} = a^2(x)\big|_{x=b}$, $\left[a^2(x)\right]'_{x=a} = \left[a^2(x)\right]'_{x=b}$,

$a^2(x + b - a) = a^2(x)$, $b > a$, $b - a$ — період.

Таким чином, надійний інтервал можна, наприклад, побудувати для сносу вигляду $a(x) = \sin x$. Результати вигляду (1) отримані також під час розглядання стохастичної задачі Гурса — теорема 2 § 2.

У § 3 розглянуто задачі оцінювання невідомих параметрів у рівняннях вигляду

$$\frac{dX_{\theta_o}}{dt} = \theta_o\, a(t, X_{\theta_o}(t)) + \xi'(t),$$

$$X(0) = \xi(0) = 0,$$

тут $\xi'(t)$ — гаусівський процес, $M\xi'(t) = 0$; $R_{\xi'}(t,s)$ — його кореляційна функція, λ_k, $\{\varphi_k(t)\}$ — відповідно власні функції кореляційного оператора з ядром $R_{\xi'}(t,s)$. Вважаються невідомими спостерігачу як $R_{\xi'}(t,s)$, так й $a(t,x)$. Нехай

$$\theta_T = \frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_o^T \varphi_k(t)\, dX_{\theta_o}(t) \int_o^T a(t, X_{\theta_o}(t))\, \varphi_k(t)\, dt}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\int_o^T a(t, X_{\theta_o}(t))\, \varphi_k(t)\, dt \right)^2}.$$

Теорема 1. Нехай рівняння $a(t, X_{\theta_o}(t)) = \int_o^T R_{\xi'}^{1/2}(t,s)\, Z(s)\, ds$ має єдиний розв'язок, $|\theta_o| \le N < +\infty$, тоді для $\varepsilon > 0$

$$P\{\sqrt{T}\, |\theta_T - \theta_o| > R\} \le 2\exp\{-(R - \tfrac{1}{2})\varepsilon\} +$$

$$+ \exp\{\varepsilon T\} \Big[M \exp\Big\{ -\frac{1 + N^2}{2\lambda_1} \int_o^T f^2(t, \xi(t))\, dt \Big\} \Big]^{\frac{1}{1 + N^2}} \qquad (2)$$

— тут λ_1 — максимальне власне число (або його оцінка зверху) кореляційного оператора з ядром $R_{\xi'}(t,s)$,

$$R_{\xi'}(t,s) = \int_o^T R_{\xi'}^{1/2}(t,s)\, Z(s)\, ds$$

Наведено приклади гаусівських процесів, коли другий доданок у правій частині (2) можна оцінити таким чином, щоб він при $T \to +\infty$ наближався експоненціально швидко до нуля. Розглянуто також питання оцінювання невідомого параметра θ_o, що мультиплікативно входить у "збурений" шум. Саме по реалізації $\xi^T_{\theta_o} = \{\xi_{\theta_o}(t) : 0 \le t \le T\}$,

де ξ_{θ_o} — розв'язок задачі Коши або початково-крайової задачі для рівняння

$$d\xi^{n-1}_{\theta_o}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, \xi^{(k)}_{\theta_o}(t)\, dt + f(t, \xi_{\theta_o}(t))\, dt = \theta_o\, \eta(t)\, dt$$

— де $a_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, $f(t,x)$ — відомі функції,

$\eta(t)$ — центрований гаусівський процес з відомою кореляційною функцією $R_\eta(t,s)$. Оцінюється невідомий параметр θ_o. Пропонується оцінка:

$$\theta_T^2 = \frac{1}{S(T)}\int_0^T \zeta^2_{\theta_0}(t)\,dt,$$ де

$$\zeta_{\theta_0}(t) = \xi_{\theta_0}(t) + \int_0^T G(t,s)\, f(s,\xi_{\theta_0}(s))\, ds,$$

$$R(t,s) = \int_0^T \int_0^T G(t,\tau) R_\eta(\tau,\nu) G(s,\nu)\, d\tau\, d\nu,$$

$S(T) = \int_0^T R(t,t)\,dt$, $G(t,s)$ — відповідна функція Гріна, відшукана по однорідній задачі

$$\frac{d^n X}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k X}{dt^k} = 0$$

з такими ж крайовими та початковими умовами, що й для (3).

Теорема 2. Має місце оцінка

$$P\left\{\frac{\theta_T^2}{1+\varepsilon} < \theta_0^2 < \frac{\theta_T^2}{1-\varepsilon}\right\} \geq 1 - \exp\left\{-\frac{S(T)}{2C(T)}\left[1 - \sqrt{1-\varepsilon}\,\right]\right\}^2 -$$

$$- \exp\left\{-\frac{S(T)}{2C(T)}\left[\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right]^2\right\}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

$C(T)$ — оцінка λ_1 — максимального власного числа оператора з ядром $R(t,s)$.

§ 4 першого розділу присвячений поширенню результатів теореми 1 § 3 на випадок більш складних систем. Розглянуто рівняння вищих порядків, перша початково-крайова задача для квазілінійного параболічного рівняння, стохастична задача Діріхле, а також аналогічні постановки для гіперболічних систем. Відповідні результати знайшли своє відображення у теоремах 1, 2, 3, 4 та прикладах, наведених у § 4 розділу 1.

На закінчення розділу 1 у § 5 розглянуто процедури стохастичної апроксимації — багатовимірна неперервна процедура Роббінса-Монро, результат дослідження якої підсумовано у теоремі 1 — є поширення висновків теореми 1 § 1 на багатовимірний випадок. (На відміну від використаного у § 1 мартингального методу, метод моментів, що використовується у § 5, дозволив подолати труднощі, пов'язані з вимірністю простору, отримати відповідні експоненціальні нерівності, але з дещо гіршим ступенем спадання із зростанням R — у показнику експоненти замість R стоїть $R^{1/3}$, та нескінченна процедура Роббінса-Монро. Якщо спостерігається розв'язання стохастичного параболічного рівняння

$$d_t\,\zeta(t,s) = \frac{a}{1+t}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right] dt - \right.$$

$$\left. - f(t,\zeta(t,x))\,dt - \int_D K(x,y)\,\zeta(t,y)\,dy\,dt + \sigma(t,x,\zeta(t,x))\,dw(t)\right],$$

$$\zeta(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \zeta(t,x)\Big|_{x\in\partial D} = 0$$

відшукання розв'язку задачі Дирихле

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dt = f\,(t,u(t,x)) + \int_D \bar{K}(x,y)\, u(t,y)\, dy,$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi\,(x),\ u\,(t,x)\Big|_{x\in\partial D} = 0$$

D — деяка обмежена область в R^n, ∂D — її достатньо гладка межа.

Теорема 2 . Нехай

$$\nu\, |z|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, z_i\, z_j \le A_0 |z|^2,\ \|u\|^2 = \int_D u^2(x)dx \le N < +\infty,$$

$$|\sigma\,(t,x,z)|^2 \le \sigma_0(x),\ \int_\infty \sigma_0(x)dx \le C_1 < +\infty,$$

$$\left(f\,(x,z) - f\,(x,u),\ z - u\right) \ge \rho\, |z - u|^2,\ \rho \ge 0$$

тоді

$$P\left|t^{\,aK_0}\, \|\xi(t) - u\| > R\right| \le C_2 \exp\left| -\frac{1}{2}\sqrt{R / C_3}\ \right|,$$

де $K_0 = [\,C(mes\,D)^{1/n}\,]^{-1} + \rho$, сталі C_2, C_3, C які виписані у явному вигляді.

Другий розділ носить назву "Усереднення у стохастичних системах. Експоненціальні оцінки ймовірності відхилення розв'язкі .

§ 1. Розглянемо у R^1 стохастичне диференціальне рівняння

$$d\,\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon\ \ [\,a(t,\xi_\varepsilon(t))dt + \sigma\,(t,\xi_\varepsilon(t))dw\,(t) + \qquad (1)$$
$$+ \int f\,(t,\xi_\varepsilon(t),u)\ \tilde{\nu}\,(du,dt)\,],\quad \xi_\varepsilon(0) = x_0$$

де функції $a(t,x)$, $\sigma\,(t,x)$, $f\,(t,x,u)$ — невипадкові, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $w\,(t)$ — стандартний вінерів процес,

$\tilde{\nu}\,(A,t) = \nu\,(A,t) - \pi\,(A)t$, $\nu(A,t)$ — незалежна від $w(t)$ пуассонова міра,

$M\,\nu\,(A,t) = \pi\,(A)t$.

Нехай виконані умови

$$|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 + \int\ |f(t,x,u)|^2\pi\,(du) \le C,$$

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + |\sigma\,(t,x) - \sigma\,(t,y)|^2 +$$

$$\int\ |f\,(t,x,u) - f\,(t,y,u)|^2\, \pi\,(du) \le L\,|x - y|^2,$$

рівномірно за C, x існує границя

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_C^{C+T} a(t,x)dt = a_0(x),$$

$X(t)$ — розв'язок задачі $\dfrac{dX}{dt} = a_0(X\,(t)),\ X(0) = X_0$

Теорема 1. Нехай

$$\rho\,(\varepsilon,T\,) = \sup_{0 \le t \le T} \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t [\,a\,(\,\tfrac{\tau}{\varepsilon},X_0\,(\tau)) - a_0(X_0\,(\tau))\,]\,d\tau\right|,$$

тоді, якщо $\rho\,(\varepsilon,T)\varepsilon^{1/4} \le D < \exp\left| -LT\,\right|$,

$$P\left\{\sup_{0 \le t \le T} \left|\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - X_0(t)\right| \ge \varepsilon^{1/4}\right\} \le$$

$$\le 4\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon^{1/4}}\left[\exp\left|-TL\right| - D - \varepsilon^{1/4}\; CT\right]\right] . \qquad (2)$$

Аналогичну нерівність побудовано й при усередненні у стохастичній задачі Гурса

$$\frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x\, \partial y} = \varepsilon\left[a(x,y,\xi_\varepsilon(x,y)) + \sigma(x,y,\xi_\varepsilon(x,y))\;\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right],$$

$$(x,y) \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \times \left[0, \frac{S}{\varepsilon}\right],\; \xi_\varepsilon(x,0) \equiv \xi_\varepsilon(0,y) \equiv 0\;; \qquad (3)$$

тут $w(x,y)$ — вінерове поле, у даному випадку

$$a_0(z) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T^2} \int_b^{b+T} \int_c^{c+T} a(x,y,z)\, dx\, dy,$$

$$\rho\,(\varepsilon,T,S) = \sup_{\substack{0 \le x \le T \\ 0 \le y \le S}} \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \int_0^y \left[a\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{S}{\varepsilon}, Z(t,s)\right) - a_0(Z(t,s))\right] dt\, ds\right|$$

,

$Z(x,y)$ — розв'язок "усередненої" задачі Гурса.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} = a_0(Z(x,y)),\; (x,y) \in [\,0,T\,] \times [\,0,S\,],\; (x,0) \equiv Z(0,y) \equiv 0$$

Теорема 2. Якщо $0 < \rho\,(\varepsilon,T,S)\sqrt{\varepsilon} \le D < \exp\left|-LTS\right|$, то

$$P\left|\sup_{\substack{0 \le x \le T \\ 0 \le y \le S}} \left|\xi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) - Z(x,y)\right| < \sqrt{\varepsilon}\right| \le$$

$$\le \frac{4e}{e-1}\exp\left|-\frac{1}{\varepsilon}\left[\exp\left|-LTS\right| - D\right]^2\right| \qquad (4)$$

Зауважимо , що оцінки (2) та (4) існують і у тих випадках, коли збіжності нормованих різниць

$$\xi_\varepsilon(t) = \frac{\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - X(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \xi_\varepsilon(x,y) = \frac{\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) - Z(x,y)}{\varepsilon}$$

до відповідних дифузійних процесів може і не бути, тобто нерівності (2) та (4) можна використовувати при побудові надійних "смуг" і в тих випадках, коли стандартна методика побудови надійних областей, яка грунтується на застосуванні граничних теорем, неприпустима.

У § 2 розділу II досліджуються питання усереднення та побудови експоненціальних нерівностей у стохастичних параболічних та гіперболічних системах.

Нерівності вигляду (2), (4) побудовані при усередненні у задачі Коші.

$$d_t\,\xi_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\,[\,L_{t,x}\,\xi_\varepsilon(t,x)\,dt + A(t,x,\xi_\varepsilon(t,x))\,dt\,] + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,x,\xi_\varepsilon(t,x))\,dw_i(t), \tag{5}$$

$$\xi_\varepsilon(t,x)\Big|_{t=\sigma} = \varphi(x),\ x \in R_n,\ \ \varepsilon > 0 \text{ — малий параметр},$$

$$L_{t,x}\,u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(t,x)\,u\,.$$

Нехай у невипадкових коефіцієнтів рівняння (5) існує середнє за часом

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}(t,x)\,dt = \overline{a_{ij}}(x),\ i,j = \overline{1,n},$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T b_i(t,x)\,dt = \overline{b}_i(x),\ i = \overline{1,n},$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T c(t,x)\,dt = \overline{c}(x),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t,x,z)\,dt = \overline{A}(x,z)$$

рівномірно за $x \in R^n$, $z \in R^1$
Нехай

$$\overline{L_x}\,u = \sum_{i,j=1}^{n}\overline{a_{ij}}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\overline{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \overline{c}(x)\,u$$ — "усереднений" оператор,

$$\overset{*}{L}_{t,x}\,u = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}[\,a_{ij}(t,x)\,u\,] - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)\,u\,] + c(t,x)\,u$$

— оператор, сполучений до $L_{t,x}$.
Нехай $u(t,x)$ — розв'язок задачі Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \overline{L_x}\,u + \overline{A}(x,u),\ u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\rho_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t [A(s/\varepsilon, x, u(s,x)) - \overline{A}(x,u(s,x))\,]\,ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t (L_{s/\varepsilon,x} - \overline{L_x})\,u(s,x)\,ds$$

Припустимо, що величини

$$\beta_\varepsilon = \sup_{0\le t\le T}\Big[\int_{R_n}|\overset{*}{L}_{t/\varepsilon,x}\,\rho_\varepsilon(t,x)|^2\,dx\Big]^{1/2} < \infty,$$

$$\rho_\varepsilon = \sup_{0\le t\le T}\Big[\int_{R_n}|\rho_\varepsilon(t,x)|^2\,dx\Big]^{1/2} < \infty,$$

$$\sigma_\varepsilon = \sup_{z \in R^1} \sum_{i=1}^{n} \int_{R_n} |\sigma_i(t/_\varepsilon,x,z)|^2\, dx < \infty,$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \sup_{z \in R_1} |A(t/_\varepsilon,x,z)|, \quad |\varphi(x)|^2,$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \sup_{z \in R^1} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t/_\varepsilon,x,z),$$

обмежені та наближаються до нуля за $|x| \to +\infty$

$$\nu \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, z_i\, z_j \le N \sum_{i=1}^{n} z_i^2, \quad \nu > 0, \quad N < +\infty, \quad z \in R^n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2(t,x) \le B^2 < +\infty$$

Теорема 3. Якщо виконані перелічені вище умови та до того ж

$$\sup_{0 \le t \le T/_\varepsilon} \sup_{x \in R_n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 a_{ij}(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j}\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial b_i(t,x)}{\partial x_i}\right| + |C(t,x)| \right) < K < \infty$$

, то

$$P\left\{ \sup_{0 \le t \le T} \int_{R_n} |\xi_\varepsilon(t/_\varepsilon,x) - u(t,x)|^2\, dx > \varepsilon R^2 \right\} \le$$

$$\le \sqrt{2/\pi}\, \exp\left\{ -\frac{R}{2D^2(\varepsilon)} \right\}, \tag{6}$$

де $D(\varepsilon)$ виписано у явному вигляді.

Зауваження. Нерівність (6) дає можливість побудувати надійну "смугу" для $\xi_\varepsilon(\frac{t}{\varepsilon},x)$ також у випадку , коли $\varepsilon^{1/4} \rho_\varepsilon$ просто обмежено, тобто умова $\rho_\varepsilon \to 0$, фігуруюча під час доведення слабкої збіжності $[\xi_\varepsilon(t/_\varepsilon,x) - u(t,x)]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ до деякого гаусівського процесу дифузійного типу може не мати місця. Аналогічні (6) нерівності встановлені при усередненні в першій початково-крайовій задачі для стохастичного параболічного та гіперболічного рівнянь. Доведенню цих фактів теореми 1,2 присвячений § 3 розділу II.

§ 4 розділу II присвячено дослідженню принципу усереднення в системах, припускаючих залежність від всього минулого траєкторії руху. Подібні запитання виникають при дослідженні інтегро-диференційних систем рівнянь з запізненням аргументу .

Буде, зокрема, встановлено, що якщо міра $K(A)$, яка вводиться нижче, задовольняє певні умови (міра $K(A)$ характеризує залежність від минулого), тоді усереднене рівняння не буде володіти залежністю від минулого.

Розглянемо систему

$$\frac{d\xi_\varepsilon}{dt} = \varepsilon F(t,\theta_t\ \xi_\varepsilon(\cdot),\omega), \tag{7}$$

$$\xi_\varepsilon(s) = \varphi(s), \quad s \le 0$$

Φ — множина обмежених функцій $\varphi(s)$, $s\in(-\infty, 0]$ із значеннями в R^2 з напівнормою

$$\| \varphi \| = \left[\int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^2 K(ds)\right]^{1/2},$$

де $K(A)$ — деяка зліченно-адитивна міра борелівських множин напівосі $(-\infty, 0]$, $K(-\infty, 0] = K^2 < +\infty$, $\theta_t\ X(t)$ — оператор, який ставить траєкторії $X(t)$, $t\in(-\infty, +\infty)$ її частину на $(-\infty, t]$. Нехай процес $F(t,\varphi,\omega)$ задовольняє закон великих чисел у наступній формі

$$\sup_{\varphi\in\Phi, t\in[0,+\infty)} \left| \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(s,\varphi,\omega)\, ds - F_0(\varphi)\right| \to 0,\ T\to+\infty,$$

тоді відомо, що $\sup_{0\le t\le T/\varepsilon} |\xi_\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t)| \to 0,\ \varepsilon\to 0$

також за ймовірністю, тут $X^\varepsilon(t)$ — розв'язок усередненої задачі

$$\frac{dX^\varepsilon}{dt} = \varepsilon\, F(\theta_t\ X^\varepsilon(\cdot)),\ X^\varepsilon(s) = \varphi(s), s \ge 0 \tag{8}$$

В теоремі 1 § 4 встановлено наступний факт:

якщо $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} s^2 K(ds) = 0$, то усереднене рівняння (8) не має залежності від минулого,тобто є рівнянням "марківського" типу.

Як відомо,специфіка ймовірнісного випадку методу усереднення в системах вигляду (7) виявляється при дослідженні флуктуації розв'язку похідного рівняння відносно розв'язку усередненої системи. У випадку, якщо процес $F(t,\varphi,\omega)$ ($\varphi\in\Phi$ — фіксоване) задовольняє умову сильного або равномірно сильного перемішування, показано, що процес

$$\zeta_\varepsilon(t) = \left[\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - X^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

збігається до $\zeta(t)$ — деякого гаусівського процесу дифузійного типу. В теоремах 2 та 3 § 4 було встановлено експоненціальні нерівності вигляду

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T} \left|\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - X\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right| > \sqrt{\varepsilon}\ R\right\} \le$$

$$\le C_1 \exp\left[-C_2 R^\alpha\right] + \frac{C_3}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{C_4}{\varepsilon^\beta}\right], \tag{9}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0,$$

де величини C_1, C_2, C_3, C_4 виписані у явному вигляді.

Знову відзначимо , що величина

$$\rho_\varepsilon(t) = \sup_{0 \le t \le T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [M F(\tau,\theta_\tau X^\varepsilon(\cdot),\omega) - F_0(\theta_\tau , X^\varepsilon(\cdot))] d\tau \right| ,$$

прямування якої до нуля є однією з вимог при доведенні слабкої збіжності $\zeta_\varepsilon(t)$, до граничного процесу $\zeta(t)$ може не мати місця; разом з тим оцінки вигляду (9) дозволяють побудувати відповідну надійну "смугу" для $\xi_\varepsilon(t/\varepsilon)$, $0 \le t \le T$.

§ 5 розділу II присвячено побудові нерівностей типу (9) для стохастичних систем вигляду

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon [L_{t,x} u_\varepsilon + A(t,x,u_\varepsilon) + \sigma(t,x,u_\varepsilon) \eta(t)], \tag{10}$$

$$u_\varepsilon(t,x) \Big|_{t=0} = \varphi(x) .$$

При виконанні певних умов теореми I встановлено, що має місце оцінка

$$P \left\{ \sup_{0 \le t \le T} \int_{R_n} | \zeta_\varepsilon(t/\varepsilon,x) - u(t,x) |dx > \sqrt{\varepsilon}\, C(\varepsilon,r,R) \right\} \le$$

$$\le C_1 \exp \left[-C_2 R^\alpha \right] + C_3 \exp \left[-C_4 r^\beta \right] + r_1(\varepsilon) + r_2(\varepsilon),$$

де $r_1(\varepsilon)$ та $r_2(\varepsilon)$ наближаються до нуля при $\varepsilon \to 0$, $C(\varepsilon,r,R)$ виписано у явному вигляді, $u(t,x)$ — розв'язок відповідної "усередненої" задачі Коші. Випадковий процес $\eta(t)$ — центрований, має кінцеві експоненціальні моменти. Аналогічні нерівності встановлено також у випадку початково-крайових задач для параболічного та гіперболічного рівнянь з випадковими збуреннями такими ж , як в рівнянні (10). Цим питанням присвячені теорема 2 § 5 та теорема 1 § 6.

Останній § 7 розділу II присвячено дослідженню усереднення в періодичних випадкових середовищах. Розглянута, наприклад, задача Діріхле

$$\frac{d}{dx} \left[K(x/\varepsilon) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right] = f(x) + \eta(x/\varepsilon), \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 , \tag{11}$$

$K(x)$ — періодична з періодом 1 функція, яка задовольняє умову $0 < K_0 \le K(x) \le K_1 < +\infty$,
$\eta(x)$ — випадковий центрований процес.

Нехай регулярна складова поля $f(x)$ така, що

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \le f_0 < +\infty, \quad \overline{K} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1},$$

$u(x)$ — розв'язок задачі

$$\overline{K} \frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \; u(0) = u(1) = 0. \tag{12}$$

Нехай $\eta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} \eta(y)\, dy$, $\|\eta_\varepsilon\|$ — його норма у $L_2[0,1]$, причому має місце оцінка

$$P \left\{ \|\eta_\varepsilon\| > R \right\} \le C_1 \exp \left[-C_2 R^\alpha \right] + r(\varepsilon),$$

$r(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

ТеоремаI. Слушна нерівність

$$P\left\{\left|u_\varepsilon - u_\varepsilon^1\right| > \varepsilon R + \frac{\varepsilon K_1}{K_o{}^2}\sqrt{f_o/2}\left(1+\frac{K_1}{K_o}\right)\right\} \le$$

$$\le C_1 \exp\left\{-C_2 R^2 K_o^a 2^{a/2}\right\} + r(\varepsilon) \tag{13}$$

тут $u_\varepsilon^1(x) = u(x) + \varepsilon N\left(\frac{X}{\varepsilon}\right)\frac{du}{dx}$, де $N(x) = \int_o^x \left(\frac{\overline{K}}{K(y)} - 1\right) dy$,

$u(x)$ — розв'язок "усередненої" задачі (12). Оцінки вигляду (13) побудовані у випадку першої початково-крайової задачі для параболічного рівняння (теорема 2 § 7)

$$S(x/\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x/\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right] = f(t,x) + \eta(t,x/\varepsilon),$$

$$u_\varepsilon(t,0) \equiv u_\varepsilon(t,1) \equiv 0,\ u_\varepsilon(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x)$$

У даному випадку

$0 < S_o \le S(x) \le S_1 < +\infty$, $0 < K_o \le K(x) \le K_1 < +\infty$,

$\overline{K}\left(\int_o^1 \frac{dx}{u(x)}\right)^{-1}$, $\overline{S} = \int_o^1 S(x)\,dx$

$u(t,x)$ — узагальний розв'язок з $V_2(\theta_T)$ усередненої задачі

$$\overline{S}\ \frac{\partial u}{\partial t} - \overline{K}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x),$$

$$u(t,0) \equiv u(t,1) \equiv 0,\ u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u_\varepsilon^1(t,x) \equiv u(t,x) + \varepsilon N(x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x},$$

а також при дослідженні усереднення в гіперболічній задачі (теорема 3 § 7)

$$R(x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x/\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right] = f(t,x) + \eta(t,x/\varepsilon),$$

$$u_\varepsilon(t,0) \equiv u_\varepsilon(t,1) \equiv 0,\ u_\varepsilon(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,x)\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

$0 < R_o \le R(x) \le R_1 < +\infty$, $0 < K_o \le K(x) \le K_1 < +\infty$,

$\overline{K} = \left(\int_o^1 \frac{dx}{K(x)}\right)^{-1}$, $\overline{R} = \int_o^1 R(x)\,dx$

усереднене рівняння має вигляд

$$\overline{R}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \overline{K}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x),$$

$$u(t,0) \equiv u(t,1) \equiv 0,\quad u(t,x)\Big|_{t=o} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o} = \psi(x). \tag{15}$$

$$u_{\varepsilon}^{1}(t,x) = u(t,x) + \varepsilon N(x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x},$$

$u(t,x)$ — узагальний розв'язок з $\overset{o}{W}{}_2^1$ задачі(15).

Розділ III носить назву "Експоненціальні нерівності під час непараметричного оцінювання. Перевірка параметричних гіпотез непараметричними методами. Оцінка "розрахункових" діянь".

§ I. Окрім дискретних та неперервних випадкових величин в задачах практики природним чином виникають неперервно-дискретні величини. Наприклад, час після першого ремонту, проходження сигналу крізь фільтр- обмежник, розподіл довжини перетину поданого інтервалу випадковим інтервалом та інше.

У § 1 поставлена задача. Нехай $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ - незалежні спостереження за ξ, де $F_\xi(x) = \alpha F^p(x) + (1-\alpha) F^n(x), \ 0 < \alpha < 1$

Теорема I. Якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - a|^{m-2}\, dF^p(x) \le \frac{\sigma^2 H^{m-2}}{2} m!, \quad m \ge 2, \quad a = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF^p(x),$$

тоді

$$P\left\{\sqrt{n}\sup_x |F_n(x) - F_\xi(x)| > r\right\} \le$$

$$\le 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{\sup_x |F^n(x) - F^p(x)|^2}\right\} +$$

$$+\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(r-\delta)^2}{\sigma^2 \pi}\left(1 + 1{,}62\frac{r-\delta}{\sigma^2}\sqrt{r/n}\, H\right)^{-1} +\right.$$

$$\left.+\frac{(r-\delta)^4}{4\sigma^4\pi^2 n}\left(1 + 1{,}62\frac{r-\delta}{\sigma^2}\sqrt{r/n}\, H\right)^{-2}\right] +$$

$$+ C\exp\left\{-(r-\delta)^2 + \frac{(r-\delta)^4}{n}\right\}$$

В § 2 розглянуто задачу перевірки гіпотези про належність флуктуації розподілу спостерігаємої випадкової величини сім'ї неперервних функцій розподілу.

$$\Gamma = \{F(x,\theta) : \theta \in \Theta \in R^m, \quad x \in R^1\}$$

Нехай $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — незалежні спостереження за випадковою величиною, існує $\theta_0 \in \Theta$ така, що $P\{\xi < x\} = F(x,\theta_0)$, де θ_n — оцінка, одержана за методом мінімуму $\omega_n^2(\theta)$.

Відомо, що

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) > \lambda\} \le P\{\omega^2 > \lambda\}$$

Теорема 2. Нехай $F(x,\theta)$ задовольняє деякі умови регулярності, тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) + \Delta^2(\theta_n, x_0^2) > r\} \le \sqrt{x_0 / \sin x_0}\, e^{-\frac{x_0^2}{2} r} \quad (1)$$

де x_0 — корінь $x\,ctg\, x + 2rx - 1 = 0$, який лежить в інтервалі $(0, \pi)$

$$\Delta^2(\theta_n, x_0^2) = \frac{1}{x_0^2} \ln \Big[1 + x_0^2 \int_0^1 \int_0^1 R(t,s)\, g(t,\theta_n)\, B^{-1}(\theta_n)\, g(s,\theta_n)\, dt\, ds,$$

де $R(t,s) = \min(t,s) - ts$,

$$g(t,\theta_n) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(x,\theta)\Big|_{\theta=\theta_n}, \quad x = F^{-1}(t,\theta_0),$$

$$b_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial \theta_i}(x,\theta)\, dF(x,\theta), \quad i,j = \overline{1,m},$$

оцінка (1) цілком придатна для практичного використання, наприклад, при $r = 1{,}41$ права частина менша 0,008, при $r = 1{,}23$ права частина дорівнює 0,018.

Існує грубіший, але простіший варіант.

Теорема 3.

$$\lim_{n\to\infty} P\{\, \omega_n^2(\theta_n) + \Delta^2(\theta_n) > r \,\} \le e^{-\frac{r^2\pi^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6r}}\right)^2};$$

тут

$$\Delta^2(\theta_n) = \frac{1}{\pi^2} \ln \Big[1 + \pi^2 \int_0^1 \int_0^1 R(t,s)\, g(t,\theta_n)\, B^{-1}(\theta_n)\, g^*(s,\theta_n)\, dt\, ds \Big].$$

Зауваження. У більшості випадків знайти оцінку θ_n у явному вигляді надто важко. Разом з тим при деякій регулярності сім'ї функцій розподілу довільну $\theta_n' - \sqrt{n}$ обгрунтовану оцінку можна перетворити таким чином, щоб вона була еквівалентна θ_n.

Лема. Нехай виконані умови теореми 1. Окрім того є третя мішана похідна $F(x,\theta)$ по θ, абсолютно інтегрована за $\theta'' \in \Theta$, тоді

$$\theta_n'' = \theta_n' + \int_{-\infty}^{+\infty} [\, F_n(x) - F(x,\theta_n') \,]\, B^{-1}(\theta_n'')\, \frac{\partial F}{\partial \theta}(x,\theta_n')\, dF(x)$$

асимптотично еквівалентна θ_n, $\sqrt{n}\,|\theta_n - \theta_n''| \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$

Результати пункту 1 можна перенести також на випадок залежних спостережень.

2. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — спостереження за лінійчатим стаціонарним процесом

$$X_t^{\theta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\theta_0)\, \xi_{t-k}, \; \xi_k \text{ — незалежні}$$

$$M\,\xi_k = 0, \quad M\,\xi_k^2 = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2(\theta_0) < +\infty$$

Нехай $\Gamma = \{\, F(\lambda,\theta)$:

$$\int_0^{\pi} f^2(\lambda,\theta)\, dx < \infty,\ \theta \in \Theta \in R^m,\ \lambda \in [0,\pi] \,\}$$

де $f(\lambda,\theta) > 0$ — спектральна густина процесу X_t. Бажаємо перевірити гіпотезу про те, що спектральна функція процесу X_t належить сім'ї Γ, тобто знайдеться $\theta_0 \in \Theta$, при якому $F(x,\theta_0)$ буде саме спектральною функцією.

Нехай

$$C_n^{\,r} = \sum_{k=1}^{n-r} X_k X_{k+r}, \quad F_n(\lambda) = \frac{C_n^{\,o}}{2\pi n} + \frac{1}{\pi n}\sum_{r=1}^{n-1} C_n^{\,r} \cos r\lambda$$ — періодограма,

$$F_n(\lambda) = \frac{C_n^{\,o}\lambda}{2\pi n} + \frac{1}{\pi n}\sum_{r=1}^{n-1} C_n^{\,r}\,\frac{\sin r\lambda}{r}$$ — оцінка спектральної функції.

Нехай

$$A_n^2(\theta) = 2\pi n \int_o^{\pi} [F_n(\lambda) - F(\lambda,\theta)]^2 f(\lambda,\theta)\, d\lambda,$$

θ_n — надає $A_n^2(\theta)$,

$B(\theta)$ — матриця, $b_{ij}(\theta) = \int_o^{\pi} \frac{\partial F}{\partial \theta_i}(\lambda,\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta_j}(\lambda,\theta) f^2(\lambda,\theta)\, d\lambda$.

Припустимо, що є $B^{-1}(\theta)$, а також, що Θ — компакт, θ - його внутрішня точка.

Нехай l — четвертий семіваріант, $l = \mu_1 - 3\mu_2^2 = 0$. Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 4.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{A_n^2(\theta_n)}{\sigma^2(\pi,\theta_n)} + \Delta^2(\theta_n, x_o^2) > r\right\} \le \frac{e^{-\frac{r x_o^2}{2}}}{\sqrt{\cos x_o}},$$

де $x_o \in (0, \pi/2)$ корінь $tgx = 2rx$

$$\Delta^2(\theta, x_o^2) = \frac{1}{x_o^2}\ln [1 + x_o^2 \int_o^{\pi}\int_o^{\pi} 2\pi \int_o^{\min(t,s)} f^2(\lambda,\theta)\, d\lambda \times$$

$$\times \frac{\partial F}{\partial \theta}(t,\theta) B^{-1}(\theta)\frac{\partial F^{o}}{\partial \theta}(s,\theta) f^2(t,\theta) f^2(s,\theta)\, dt\, ds\,],$$

$$G(t,\theta) = 2\pi\int_o^t f^2(\lambda,\theta)\, d\lambda.$$

Оцінка цілком придатна для практики при $r = 4{,}7$, $x_o = 1{,}5$, права частина менше 0,02.

Нехай $l < 0$, $C = \sqrt{2 + l/\pi} - \sqrt{2/\pi}$.

Теорема 5.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{A_n^2(\theta_n)}{\sigma^2(\pi,\theta_n)} + \Delta^2(\theta_n, x_o^2) > r\right\} \le \frac{\sqrt{2/\pi}}{(C + \sqrt{2/\pi})\sqrt{\cos x_o}}\, e^{-\frac{r x_o^2}{2}}$$

Нехай

$$0 < l < \frac{4}{\sqrt{1 - 1/\pi}\,(1 + \sqrt{1 - 1/\pi})} + \frac{2}{(1 - 1/\pi)(1 + \sqrt{1 - 1/\pi})^2},$$

$\varepsilon > 0$ таке, що $1 + \pi\left(\frac{C^2}{(l + \sqrt{2\pi})^2} - \frac{2l}{C + \sqrt{2\pi}}\right)(1 + \varepsilon) > 0$, тоді

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{A_n^2(\theta_n)}{\sigma^2(\pi,\theta_n)} + \left[\frac{-C+\sqrt{2\pi}}{D_\varepsilon(C)\sqrt{2\pi}}\right]^{\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}} \Delta(\theta_n, x_o^2) > r\right\} \le \left[\frac{e^{-\frac{r x_o^2}{2}}}{\sqrt{\cos x_o}}\right]^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

$$D_\varepsilon(C) = \left[1 + \pi\left(\frac{C^2}{(C+\sqrt{2\pi})^2} - \frac{2C}{C+\sqrt{2\pi}}\right)(1+\varepsilon)\right]^{-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}$$

Якщо, наприклад, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — спостереження у дискретні моменти стаціонарного розв'язання рівняння

$dX_t = -\theta_o X_t\, dt + dw(t),\ 0 < \delta \le \theta_o \le K < +\infty.$

У даному випадку

$$f(\lambda,\theta) = \frac{\theta}{\pi(\lambda^2+\theta)^2},\quad G(t,\theta) = \frac{2\theta^2}{\pi}\int_o^t \frac{d\lambda}{\lambda^2+\theta^2},$$

$$F(\lambda,\theta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\theta},\quad B(\theta) = \frac{\theta^2}{\pi^n}\int_o^\pi \frac{\lambda^2\, d\lambda}{(\lambda^2+\theta^2)^n},$$

$$\Delta^2(\theta, x_o^2) = \frac{1}{x_o^2}\ln\left[1 + \frac{x_o^2}{B(\theta)}\int_o^\pi\int_o^\pi \min(G(t,\theta), G(s,\theta))\frac{t s\, dt\, ds}{(t^2+\theta^2)(s^2+\theta^2)^2}\right],$$

$$\theta_n' = \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}\right|}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2},\quad \theta_n'' = \theta_n' - \frac{D_n(\theta_n')}{C_n(\theta_n')},$$

$$D_n(\theta) = \frac{dA_n^2(\theta)}{d\theta},\qquad C_n(\theta) = \frac{d^2 A_n^2(\theta)}{d\theta^2}.$$

Тоді, у випадку слушності гіпотези

$$\frac{A_n^2(\theta_n'')}{\sigma^2(\pi,\theta_n'')} + \Delta^2(\theta_n'', 2, 15) < 4{,}7,\ \ p \ge 0{,}98\ .$$

У протилежному випадку гіпотезу відкидають.

Параграф 3 присвячений наступній задачі.

Нехай $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — спостереження за стаціонарним процесом, які задовольняють або р.с.п., або с.п. з експоненціально швидким перемішуванням.

Теорема 6. Нехай $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — задовольняють умову р.с.п., з коефіцієнтом $\rho(\tau)$. Тоді

$$P\left\{ \omega_n^2 > \frac{\rho^2}{\pi^2}\ \frac{2-2\alpha}{1-2\alpha} \right\} \le 2\exp\left\{ \left(\frac{n}{r_n}+1\right)\varphi(r_n)\sqrt{e} \right\} \times$$

$$\times\left[1+\frac{32(1+4C)(\sqrt{e}-1{,}5)(1+\frac{r_n}{n})}{\alpha\rho^2}\right] B(\alpha, \frac{\rho_2}{32(1+4C)(\sqrt{e}-1{,}5)(1+\frac{r_n}{n})}) \times$$

$$\times e^{-\frac{\rho^2}{32(1+4C)(\sqrt{e}-1{,}5)(1+r_n/n)}},$$

тут $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $B(\alpha,x) = 1+\sum_{k=1}^{[1/\alpha]} \frac{1}{x^k}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\alpha}-i\right)$,

$r_n \to \infty:\ \frac{r_n}{\sqrt{n}} \to 0\quad \frac{n\,\varphi(r_n)}{r_n} \to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k) \le C < +\infty.$

Теорема 7. Якщо виконана умова сильного перемішування з $\alpha(m) \le C\exp\{-\gamma m\}$, тоді для $0<\beta<\frac{1}{2}$ має місце оцінка

$$P\left\{\omega_n^2 > \frac{\rho^2(2-2\beta)}{1-2\beta}\right\} \le \left[1+3{,}31\left(\frac{C}{\pi^2}\right)^{1/6}\exp\left\{\frac{1+12\gamma}{36}\right\}\right] \times$$

$$\times\left[1+\frac{25}{\gamma^{1/3}\rho^{2/3}}\right] B\left(\frac{2}{3}\beta, \frac{\rho^{2/3}\gamma^{1/3}}{16{,}65}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^{2/3}\gamma^{1/3}}{16{,}65}\right\}.$$

В § 4 розділу III розглянута наступна задача.

Нехай спостерігається $X_T^{\varepsilon} = \{X_\varepsilon(t),\ t\in[0,T]\}$, де $X_\varepsilon(t)$ — розв'язок задачі Коши

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = a(t,X_\varepsilon(t)) + \eta(t/\varepsilon),\ X_\varepsilon(0) = x_0, \qquad (1)$$

де $a(t,x)$ — невипадкова функція, невідома спостерігачу ; будемо припускати, що
$|a(t,x)| \le C(1+|x|)$,
$|a(t,x)-a(s,y)| \le L(|x-y|+|t-s|),\ t,s\in[0,T]$

Поряд з рівнянням (1) розглянемо рівняння

$$\frac{dX_0}{dt} = a(t,X_0(t)),\ X_0(0) = x_0,$$

яке описує рух системи при відсутності випадкових діянь $\eta(t/\varepsilon),\ t\in[0,T]$.

Функцію $a(t,X_0(t))$ будемо називати розрахунковою швидкістю руху системи у детермінованому середовищі. У даному параграфі поставлено наступну задачу : по X_T^{ε} — спостереженій траєкторії руху системи у швидкоколивному випадковому середовищі оцінить швидкість руху в ідеальному середовищі.

Як оцінку $a(t,X_0(t))$ візьмемо функцію

$$a_\varepsilon(t) = \frac{1}{h_\varepsilon}\int_0^T K_t^2\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)dX_\varepsilon(s),\ h_\varepsilon>0,\ h_\varepsilon\to 0 \quad \text{при } \varepsilon\to 0.$$

На ядро $K_t^{\varepsilon}(u)$ будемо накладати наступні обмеження : $K_t^{\varepsilon}(u) \geq 0$,

$$\frac{1}{h_\varepsilon}\int_0^T K_t^{\varepsilon}\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) ds = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} K_t^{\varepsilon}(u)du \leq C_1 < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{dK_t^{\varepsilon}(u)}{du}\right| du \leq C_2 < +\infty, \quad \sup_{-\infty < u < +\infty} K_t^{\varepsilon}(u) = K_0 < +\infty.$$

Припустимо також, що випадкове діяння $\eta(t)$ таке, що $M\,\eta(t) = 0$,

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} \eta(s)\,ds\right| > R\right\} \leq r_\varepsilon + C'\exp\left\{-C'' R^{\gamma}\right\},$$

$C' > 0, C'' > 0, \gamma > 0, r_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 8. Нехай $R_\varepsilon \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$ так, що $\varepsilon^{1/4} R_\varepsilon \to 0$, $h_\varepsilon = \varepsilon^{1/4}$, тоді

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |a_\varepsilon(t) - a(t,X_0(t))| > \varepsilon^{1/4}\left[R_\varepsilon\,(L\varepsilon^{1/4} + 2C_2 + K_0) + C_1C_3(x_0,C,T)\right]\right\} \leq$$

$$\leq r_\varepsilon + C'\exp\left\{-C'' R_\varepsilon^{\gamma}\right\}$$

де $C_3(x_0,C,T) = 1 + C\,(1 + |x_0| + CT)\exp\{CT\}$

Як приклад на використання теореми 8 розглянуто рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{dX_\varepsilon}{dt} = a(t,X_\varepsilon(t)) + \eta_\varepsilon(t) - M\,\eta_\varepsilon(t), \\ \qquad d\,\eta_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\, b(t/\varepsilon, \eta_\varepsilon(t))\,dt + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sigma(t/\varepsilon, \eta_\varepsilon(t))\,dw(t) \end{cases}$$

$X_\varepsilon(0) = x_0,\ \eta_\varepsilon(0) = 0,$

де $b(t,x)$ таке, що $x\,b(t,x) \leq -\lambda x^2$,

$\lambda > 0$, $|b(t,x) - b(t,y)| \leq C\,|x - y|$, $\sigma(t,x)$ — рівномірно обмежена по t, x позитивна величина.

§ 5 розділу III присвячено оцінюванню впливу нелінійності $A(t,x,\xi_0)$, де $\xi_0(t,x)$ — розв'язок задачі

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = L_{t,x}\,\xi_0 + A(t,x,\xi_0),$$

$$\xi_0(0,x) = \varphi(x), \quad \xi_0(t,x)\Big|_{x \in \partial D} = \Phi(t,x)$$

якщо спостерігається $\xi_\varepsilon(t,x)$ — розв'язок стохастичної задачі

$$\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial t} = L_{t,x}\,\xi_\varepsilon + A(t,x,\xi_\varepsilon) + \sigma(t,x,\xi_\varepsilon)\,\eta(t/\varepsilon),$$

$$\xi_\varepsilon(0,x) = \varphi(x),\ x \in D \in R_n,\ \xi_\varepsilon(t,x)\Big|_{x \in \partial D} = \Phi(t,x)$$

тут D - деяка множина з R_n, ∂D — її достатньо гладка межа,

$$L_{t,x}\,u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Змістом результатів § 5 розділу III є теорема 1, в якій при обмеженнях типу обмежень в умовах теореми 8 дістали аналогічну твердженню теореми 8 оцінку.

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_D \left| A_\varepsilon(t,x)-A(t,x,\xi_0(t,x))\right|dx>\varepsilon^{1/4}C(R,\varepsilon)\right\}\le$$
$$\le C'\exp\{-C''R^{\gamma}\},$$

де $C(R,\varepsilon)$ виписана у явному вигляді,

$$A_\varepsilon(t,x)=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}}\int_D\int_0^T\left[\frac{\partial\,\xi_\varepsilon(s,y)}{\partial s}-L_{s,y}\,\xi_\varepsilon(s,y)\right]K_t\left(\frac{t-s}{\varepsilon^{1/4}}\right)K_x\left(\frac{x-y}{\varepsilon^{1/4}}\right)ds\,dy$$

Якщо як міра, яка характеризує відхилення оцінки від оцінюваної функції у § 5 використовувалась метрика L_1 — теорії

$$\rho(f,\varphi)=\sup_{0\le t\le T}\int_D|f(t,x)-\varphi(t,x)|\,dx,$$

тому що більше вивчена L_2 — теорія приводить до ряду аномальних ефектів та уявлень.

В § 6 розділу III було розглянуто аналогічну задачу, коли як міру відхилення брали стандартну метрику L_2 — теорії. У метриці L_2 — теорії при менших обмеженнях побудовано нерівність, аналогічну відповідній нерівності § 5, що складає зміст теореми 1 § 6.

Останній § 7 розділу III присвячено відповіді на аналогічні питання у випадку першої початково-крайової задачі для гіперболічного рівняння. У метриці L_2 — теорії отримано аналогічний §5 та §6 результат для гіперболічних систем.

Основні положення за темою дисертації надруковані у наступних роботах .

1. Бондарев Б.В. К вопросу о скорости сходимости в принципе усреднения//Теория случайных процессов.-1980.- Вып.8.-С.7-16.

2. Бондарев Б.В. Неравенства больших уклонений для непрерывных процедур стохастической аппроксимации// Теория случайных процессов.-1981. -Вып.9.-С.20-24.

3. Бондарев Б.В. Вероятности больших уклонений для рекуррентных оценок неизвестного параметра в сносе стохастического уравнения//Теория случайных процессов. -1982. -Вып.10.-С.3-6.

4. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра в сносе стохастического дифференциального уравнения// Теория случайных процессов.-1983.- Вып.11-С.5-9.

5. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра в сносе простейшего стохастического дифференциального уравнения// Теория случайных процессов.-1985.- Вып.13.-С.10-13.

6. Бондарев Б.В. О проверке сложных статистических гипотез I.//Теория вероятностей и мат. статистика.-1987.- Вып.36.-С.3-10.

7. Бондарев Б.В. О проверке сложных статистических гипотез II.//Теория вероятностей и мат. статистика.-1988.-Вып.38-С.16-25.

8. Бондарев Б.В. О доверительном интервале для параметра шума в стохастических системах// Марковские случайные процессы и их применения: Межвуз. науч. сб.- Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988. - С. 3-11 .

9. Бондарев Б.В. О проверке статистических гипотез при слабо зависимых наблюдениях//Теория вероятностей и мат. статистика.-1988.-Вып.39.-С.11-17.

10. Бондарев Б.В. О статистике Колмо
ции распределения//Укр. мат. журн.-19

11. Бондарев Б.В. Усреднение в стохастических квазилинейных параболических уравнениях//Теория вероятностей и мат. статистика.-1989.Вып.41.-С.16-23.

12. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра коэффициента сноса уравнения, возмущенного гауссовским шумом//Теория вероятностей и математическая статистика.-1990.-Вып.42.-С.3-13.

13. Бондарев Б.В. Некоторые вопросы непараметрической статистики слабо зависимых наблюдений//Теория вероятностей и мат. статистика.-1990.-Вып.43.С.-19-26.

14. Бондарев Б.В. Об усреднении в стохастических системах с зависимостью от всего прошлого//Укр. мат. журн.-1990. - 42 , N 3. -С.443-451.

15. Бондарев Б.В. Об усреднении стохастических систем при слабо зависимых возмущениях//Укр. мат. журн.-1990.- 42, N 5.- С.593-600.

16. Бондарев Б.В. О принципе усреднения в начально-краевых задачах для стохастических параболических и гиперболических уравнений//Теория случайных процессов и ее прил. -Киев: Наук. думка,1980.-С.15-25.

17. Бондарев Б.В. Усреднение в параболических системах, подверженных слабо зависимым случайным возмущениям//Укр. мат. журн.-1991. - 43, N 2.- С.167-172.

18. Бондарев Б.В. Усреднение в параболических системах, подверженных слабо зависимым случайным возмущениям//Укр. мат. журн.-1991, - 43, N 3.- С.315-322.

19. Бондарев Б.В. Усреднение в периодических средах при слабо зависимых случайных воздействиях. I//Теория вероятностей и мат. статистика.-1991.-Вып.45.-С.12-20.

20. Бондарев Б.В. Осереднення в періодичних середовищах при слабко залежних випадкових збудженнях II//Теория вероятностей и мат. статистика.-1992.- Вып.46.-С.18-24.

21. Бондарев Б.В. Оценка параметра нелинейности в начально- краевых задачах с гауссовскими возмущениями//Теория вероятностей и её применения.-1991.-36, N 3.- С.553-560.

22. Бондарев Б.В. Об одном применении метода стохастической аппроксимации//Тез. докл. VI Советско-Японского симпоз. по теории вероятностей и мат. статистике. Киев, 5-10 авг. 1991г.-С.24.

23. Бондарев Б.В. Метод малого параметра для параболических и гиперболических систем, возмущенных слабо зависимыми случайными процессами//Тез. докл. V Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 26 июня - 1 июля 1989г.-Т. III.-С.78-79.

Підп. до друку 10.12.92. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс.друк.
Умов.друк.арк. 1,39. Умов.фарб.-відб. 1,39. Обл.-вид.арк. 1,1.
Тираж 100 прим. Зам. 346. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3