ЧЕРНОВИЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЮРИЯ ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукописи

Стецько Юрий Павлович

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черновцы - 1993

Работа выполнена на кафедре теоретической кибернетики факультета кибернетики Киевского университета им. Тараса Шевченко.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук профессор Кириченко Н.Ф.

Официальные оппоненты: доктор технических наук профессор Гаращенко Ф.Г.

кандидат физико-математических наук, доцент Черевко И.М.

Ведущая организация: Ужгородский университет

Защита состоится "26" февраля 1993 г. в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного ученого совета К.068.16.05 в Черновицком государственном университете им. Юрия Федьковича (274012 г. Черновцы, ул. Коцюбинского, 2).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Черновицкого государственного университета (ул. Леси Украинки, 23).

Автореферат разослан "22" января 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета К.068.16.05 А.Сад Садовяк А.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Процессы совершенствования высокопроизводительных ЭВМ,расширения сферы их применения в областях науки,техники и производства , увеличения объемов обрабатываемой информации ,приводят к необходимости разработки новых программных средств взаимодействия пользователя и ЭВМ. На практике, в связи с этим, в последние годы происходит переоценка "полезности" многих методов и приемов, возникших в свое время из необходимости преодоления вычислительных трудностей. С появлением вычислительной техники преимущество стало отдаваться методам,которые имеют хорошую совместимость с ней,быструю сходимость и легко перелагаются на алгоритмические языки. С другой стороны особую ценность для пользователя приобретают программные продукты,в которых исследуемый материал систематизирован,удобно организован и обеспечен достаточным уровнем программного сервиса при работе с ним.Созданию удобного инструмента,с использованием ЭВМ, для исследования задач устойчивости и стабилизации линейных систем посвящена данная диссертационная работа.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

1. Разработка и исследование алгоритмов устойчивости и модального регулирования линейных систем.
2. Создание программного продукта для исследования задач устойчивости и стабилизации,включающего как новые, так и систематизированные известные результаты.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

При решении поставленных в работе задач были использованы результаты и положения теории устойчивости и стабилизации движения, принципы динамического программирования и положения структурного программирования для разработки комплексов программного обеспечения.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА.

1. Предложены новые формулировки критериев устойчивости линейных нестационарных систем и разработан ряд соответствующих им алгоритмов.
2. Разработан оригинальный подход к задаче модального регулирования, позволяющий формулировать оптимизационные постановки этой проблемы в удобной для решения на ЭВМ форме.
3. Доказана теорема, определяющая достаточные условия стабилизируемости линейных нестационарных систем через стабилизируемость систем с дискретным аргументом.
4. Разработан параллельный алгоритм решения матричного уравнения Риккати, возникающего в задачах стабилизации.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ

Разработанная и реализованная на ЭВМ система исследования задач устойчивости и стабилизации движения может использоваться как удобный инструмент при решении различных прикладных задач теории управления.

НА ЗАЩИТУ ВЫНОСЯТСЯ.

1. Алгоритмы, разработанные на основе новых формулировок критериев устойчивости линейных систем.
2. Алгоритм сведения задачи модального регулирования к задаче управления дискретной нелинейной системой.
3. Алгоритмы модальной стабилизации при различных критериях оптимизации.

4.Параллельный алгоритм решения матричного уравнения Риккати.

5.Диалоговая система исследования задач устойчивости и стабилизации линейных систем.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ.

Основные результаты работы докладывались на первой конференции молодых ученых КГУ (г. Киев,1985 г.),научном республиканском семинаре в Киевском государственном университете (научный рук. чл.-корр.АН Украины Б.Н.Бублик),двадцать четвертой Всесоюзной конференции молодых ученых (г.Москва ИПУ), республиканском семинаре "Математические проблемы управления" (г.Черновцы, рук. проф. Кириченко Н.Ф.), рабочем семинаре кафедры математических проблем управления и кибернетики Черновицкого государственного университета.

ПУБЛИКАЦИИ.

По результатам исследований опубликовано 3 печатных работы.

Структура и объем работы .

Диссертационная работа изложена на 98 печатных страницах машинописного текста , иллюстрирована 2 рисунками , состоит из введения,трех глав,заключения, списка литературы из 89 наименований и приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении обоснована актуальность проводимых исследований, сформулированы цели и задачи работы ,изложена новизна полученных результатов. Приведена структура диссертации и краткий обзор исследований по вопросам , касающимся тематики работы.

Первая глава диссертации посвящена методам исследования устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений.

В первом параграфе, в систематизированном виде, приведены основные критерии устойчивости линейных систем

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = A\,x(t) \quad ,$$

проанализированы реализующие их вычислительные процедуры , а также описаны соответствующие функции из диалогового комплекса программ.

Во втором параграфе описаны критерии и соответствующие им функции , позволяющие проводить исследования по проблеме, именуемой в литературе обобщенной проблемой Рауса-Гурвица. Ее суть состоит в изучении и построении условий желаемого расположения спектра матрицы относительно заданных областей комплексной области.

Третий параграф посвящен исследованию устойчивости линейных нестационарных систем с периодическими коэффициентами.Показана связь этой задачи с задачей устойчивости линейных стационарных систем и описаны возможности использования алгоритмов и программ из первого параграфа.

В четвертом параграфе для линейных нестационарных систем

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = A(t)\,x(t) \tag{1}$$

доказана теорема.

Теорема I. Для того , чтобы система (I) была равномерно асимптотически устойчива , необходимо и достаточно,чтобы существовали $1 > \varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$, при которых для любого $t > t_0$ имело место условие

$$\Gamma_{t+\Delta} \subset \{\, x : \| x \|_{\ell_p} < 1 - \varepsilon \,\} \, ,$$

где

$$\Gamma_{t+\Delta} = \{x : | \ell_j^T x | < \| \ell_j^T X(t+\Delta, t) \|_{\ell_q},\ j = 1,\dots,n\}.$$

Здесь ℓ_j ($j = 1,\dots,n$) некоторые постоянные вектора, при которых множество $\{x : | \ell_j^T x | < 1\ \ (j = 1,\dots,n)\}$ замкнуто и содержит точку ноль, числа $p > 0$, $q > 0$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Как следствие из теоремы I, приводится достаточное условие асимптотической устойчивости системы (I), имеющее более конструктивный характер.

Следствие. Для того, чтобы система (I) была равномерно асимптотически устойчива достаточно, чтобы существовало такое $0 < \Delta < \infty$, при котором справедливо неравенство

$$\max_{x \in \Gamma_{t_0+k\Delta}} \| x \| < 1, \quad k = 1, 2\dots . \qquad (2)$$

Для различных частных значений p и q алгоритмические аналоги условия (2) принимают следующий вид

1. $q = \infty$, $p = 1$, $\ell_j = e_j$, $j = 1,2,\dots,n$.

$$\max_{j=1,n} \sum_{i=1}^{n} |x_{ji}(t_0+k\Delta, t_0+(k-1)\Delta)| < 1, \quad k = 1,2,\dots .$$

2. $q = 1$, $p = \infty$, $\ell_j = e_j$, $j = 1,2,\dots,n$.

$$\sum_{j=1}^{n} \max_{i=1,n} |x_{ji}(t_0+k\Delta, t_0+(k-1)\Delta)| < 1, \quad k = 1,2,\dots .$$

3. $q = 2,\ p = 2,\ \ell_j = e_j,\quad j = 1,2,\dots,n.$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [x_{ji}(t_0+k\Delta, t_0+(k-1)\Delta)]^2 < 1\ ,\quad k = 1,2,\dots\ .$$

Доказаны также следующие теоремы.

Теорема 2. Если для некоторых $p \in [1,\infty)$ и неособенной матрицы L размерности $n \times n$, произвольного $t > t_0$ существуют $\Delta > 0$ и $z > 1$ такие, что имеет место

$$\min_{y} \frac{\| L\, X(t,t_0+\Delta) \|_{\ell_p}}{\| y \|_{\ell_p}} > z\ ,$$

то система (I) асимптотически устойчива.

Теорема 3. Если для некоторых $p \in [1,\infty)$, неособенной матрицы L размерности $n \times n$ и произвольного $t > t_0$ существуют такие $\Delta > 0$ и $z < 1$, что имеет место неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \| \ell_j^T X(t+\Delta, t) L^{-1} \|_{\ell_q}^{p} \right)^{1/p} < z\ ,$$

то система (I) асимптотически устойчива.

Здесь ℓ_j $(j=1,2,\dots,n)$ - вектор - строки матрицы L.

Теорема 4. Если для положительно определенной матрицы G_0 и произвольного $t > t_0$ существуют $\Delta > 0$ и $z > 1$, при которых имеет место неравенство

$$\min_{y} \frac{x^T R(t,t_0+\Delta)}{x^T G_0\, x} > z\ ,$$

то система (I) асимптотически устойчива.

Здесь матрица R является решением задачи

$$\frac{d R(\tau,t)}{d t} = - A^{T}(t) R(\tau,t) - R(\tau,t) A(t)$$

$$R(\tau,\tau) = G_0.$$

Следствие 2. Если наименьшее характеристическое число пучка квадратичных форм

$$x^{T} R(t,t+\Delta) x + \lambda x^{T} G_0 x$$

больше единицы, то система (I) асимтотически устойчива.

Вторая глава посвящена исследованию задач стабилизации линейных систем управления.

В первом параграфе главы рассматриваются вопросы модальной стабилизации линейных стационарных систем.

$$\frac{d x(t)}{d t} = A x(t) + B u(t) , \qquad (3)$$

Здесь,наряду с известными результатами по модальному регулированию, описан метод сведения данной задачи к задаче управления дискретной системой специального вида. Это , в отличии от известных результатов,дает возможность выписать все множество законов модального регулироваия системы (3).

Теорема 5. Множество законов стабилизации $u = C x(t)$, обеспечивающих системе (3) свойство асимтотической устойчивости, определяется матрицами

$$C = \begin{bmatrix} c_1^{T} \\ c_2^{T} \\ \vdots \\ c_m^{T} \end{bmatrix}$$

где c_j $(j = 1,2,\dots,m)$ представляют собой векторы управления дискретной системой

$$p(k+1) = p(k) - P(k)\, S^T(k)\, c_{k+1}\ , \qquad (4)$$
$$k = 0,1,\ldots m-1\ ,$$

по переводу ее из начального состояния

$$p(0) = p\ , \qquad (5)$$

в финальное состояние

$$p(m) = a\ . \qquad (6)$$

Здесь

$$P(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1(k) & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(k) & p(k) & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

$$S(k) = [\, b_{k+1}, A_k b_{k+1}, \ldots, A_k^{n-1} b_{k+1}]\ ,$$

$$A_k = A + \sum_{j=1}^{k} b_j c_j^T = A + \sum_{j=1}^{k-1} b_j c_j^T + b_k c_k^T = A_{k-1} + b_k c_k^T.$$

Выбор управляющих параметров c_k, в системе (4) при заданных p и a, в общем случае осуществляется неоднозначно. А это означает, что при решении проблемы синтеза модальных регуляторов имеет смысл рассматривать различного рода оптимизационные постановки задач. Такого рода задачам посвящен второй параграф главы.

Для случая модальной стабилизации, при условии минимизации квадратичного функционала

$$Q(u) = \int_{t_0} \{x(\tau)\, G_1 x(\tau) + u(\tau)\, G_2 u(\tau)\}\, dt\,, \qquad (7)$$

здесь G_1, G_2 - положительно - определенные, симметризированные матрицы размерности $n \times n$, $m \times m$ соответственно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6 . Закон стабилизации $u = C\,x(t))$ для системы (3) , доставляющий минимум функционалу (7) , обладает следующим модальным свойством

$$\det(\lambda E - A - BC) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T = p(m),$$

где вектор $p(m)$ определяется как решение задачи Коши для дискретной системы

$$p(\kappa+1) = p(\kappa) - P(\kappa)\, S^T(\kappa)\, R^T B\, g_{\kappa+1}\,,$$
$$p(0) = p\,,\quad \kappa = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Здесь $(g_1, g_2, \ldots, g_m) = G_2^{-1}$, R - решение матричного уравнения

$$A^T R + RA - RBG^{-1}B^T R + G_1 = 0\,.$$

Рассмотрена также задача (4) - (6) при условии минимизации функционала

$$J = \sum_{\kappa=0}^{m-1} \| c_{\kappa+1} \|^2 \qquad (8)$$

Теорема 7. Оптимальное управление $c_{\kappa+1}$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, m-1)$ системой (4), по переводу ее из состояния (5) в состояние (6), при минимизации функционала (7), имеет следующий вид :

$$c_{\kappa+1} = S(\kappa)\, P(\kappa)\, \Psi(\kappa+1) + \Phi(\kappa+1)\, b_{\kappa+1}\,,$$

здесь матрицы $\Psi(\kappa+1)$, $\Phi(\kappa+1)$ вычисляются из уравнений

$$\Psi(\kappa) = \Psi(\kappa+1) - \begin{vmatrix} \Psi_2 & \Psi_3 & \dots & \Psi_n & 0 \\ \Psi_3 & \Psi_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Psi_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} S^T(\kappa)\, c_{\kappa+1} ,$$

$$\Phi(\kappa) = \Phi(\kappa+1) - c_{\kappa+1} \Psi^T(\kappa+1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T_{\kappa+1} \\ 2\, B^T_{\kappa+1} A^T_\kappa \\ 3\, B^T_{\kappa+1} [A^T_\kappa]^2 \\ \vdots \\ (n-1) B^T_{\kappa+1} [A^T_\kappa]^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\kappa = 0, 1, \dots , m-1 ,$$
$$\Psi(m) = 0 , \quad \Phi(m) = 0 .$$

Рассмотрен , также, случай построения модального регулятора при условии минимизации количества используемых управляющих органов, т.е. величины m в задаче (4)-(6). Поскольку точное решение этой задачи для нелинейной системы (4) выписать трудно, то в параграфе приведены алгоритмы ее приближенного решения.

В § 2.3 для нестационарной линейной системы

$$\frac{d\, x(t)}{d\, t} = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \qquad (9)$$

предложен новый подход к исследованию вопроса ее стабилизируемости. Формулируется он следующим образом.

Рассмотрим систему (9) на подинтервале $[t_{j-1}, t_j)$, $(j = 1,2,\dots, 0 < \Delta_1 < t_j - t_{j-1} < \Delta_2 < \infty)$.

Обозначим через $\kappa_1(j), \kappa_2(j), \dots, \kappa_{z_j}(j)$ линейно независимые столбцы матрицы

$$S_j = \det \int_{t_{j-1}}^{t_j} W(t_j,\tau)\, W^T(t_j,\tau)\, d\tau ,$$

$$\operatorname{rank} S_j = z_j .$$

Обозначим через $K_{z_j}(j)$ - подпространство, образованное этими столбцами. Тогда имеет место теорема.

Теорема 8. Если система с дискретным аргументом

$$y_2(t_j) = Q_4(j)\, y_2(t_{j-1}) + Q_3(j)\, v(j) \qquad (10)$$

стабилизируема, то и система (9) стабилизируема.

Здесь $Q(j) = \begin{vmatrix} Q_1(j) & Q_2(j) \\ Q_3(j) & Q_4(j) \end{vmatrix} = T^{-1}(j)\, X(t_j, t_{j-1})\, T(j)$

$$T(j) = [\kappa_1(j), \kappa_2(j), \dots, \kappa_{z_j}(j), d_{z_{j+1}}(j), \dots, d_n(j)]$$

$$\det T(j) \neq 0 ,\ d_s^T \kappa_i(j) = 0 ,$$

$$s = z_j, \dots, n,\ i = 1, \dots, z_j,$$

$y_2(j)$ - $(n - z_j)$ - мерный вектор состояния системы (10),

$v(j)$ - z_j - мерный вектор входа системы (10).

В развитие результатов второй главы, в § 3.1 приведен параллельный алгоритм решения матричного дифференциального уравнения Риккати, которое часто встречается в задачах теории управления.

В § 3.2 описаны структурная схема диалоговой подсистемы " Алгоритмы устойчивости и стабилизации" , принципы ее функционирования, требования к периферийным устройствам и назначение основных функций системы .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.

I. Предложены новые формулировки критериев устойчивости линейных нестационарных систем и разработан ряд соответствующих им алгоритмов и программ.
2. Для стационарных линейных систем управления разработан оригинальный подход к задаче модального регулирования, позволяющий формулировать оптимизационные постановки этой проблемы в удобной для решения на ЭВМ форме. Выписано множество законов модальной стабилизации этих систем.
3. Разработаны алгоритмы модальной стабилизации для различных критериев оптимизации.
4. Разработан параллельный алгоритм решения матричного уравнения Риккати ,возникающего в задачах управления и стабилизации.
5. Разработана и реализована на ЭВМ система исследования задач устойчивости и стабилизации линейных систем.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

I. Стецько Ю. П. Параллельный алгоритм решения матричного уравнения Риккати. // Численно - аналитические методы динамики и устойчивости многомерных систем. Сб. науч.тр. -Киев : Ин-т математики АН УССР. 1985.-С. 38-43.
2. Стецько Ю. П. Алгоритмы исследования устойчивости линейных нестационарных систем. //24 Всесоюзная конференция молодых ученых. 1989 г.,г. Москва.Тезисы докладов.,стр.70.
3. Кириченко Н. Ф., Стецько Ю. П. К задаче стабилизации движения. Автоматика, N 3, 1990.- с. 65-70.

Ю.Стецько

Подписано к печати I8.0I.93.

Формат 60х84/I6. Бумага типографская №I.

Офсетная печать. Усл.печ. листов 0,93.

Уч.-изд. листов I,0. Заказ № 0I3. Тираж I00.

Бесплатно.

Лаборатория копировально-множительной печати

Черновицкого государственного университета

г. Черновцы, ул. Коцюбинского, 2