Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ЛИЧАК Михайло Михайлович

УДК 62-50:681.513

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНИХ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИХ МОДЕЛЕЙ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

01.01.11 — системний аналіз і автоматичне керування

Дисертація на здобуття ученого ступеня
доктора фізико-математичних наук
у формі наукової доповіді

Київ 1993

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
ЛАРІН В. Б.,
доктор фізико-математичних наук
НАКОНЕЧНИЙ О. Г.,
доктор фізико-математичних наук
КИРИЧЕНКО М. Ф.

Провідна організація: Фізико-механічний інститут
АН України (м. Львів).

Захист відбудеться «25» березня 1993 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.45.04 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічному архіві інституту.

Дисертація розіслана «23» лютого 1993 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради ГУБАРЄВ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність і стан проблеми. При побудові систем керування конкретними об'єктами конструктор повинен приймати до уваги як наявність в реальних умовах тих чи інших зовнішніх неконтрольованих збурень, що діють на об'єкт керування, так і те, що навіть для об'єктів з відомою структурою дійсні значення параметрів відомі лише наближено. Тому в більшості випадків при постановці і розв'язанні задач синтезу керування необхідно враховувати наявність невизначених факторів, а також можливість уточнення апріорної інформації про них, тобто необхідно розв'язувати задачу синтезу адаптивного керування.

Важливою проблемою тут є побудова і використання формалізованої моделі цієї невизначеності. В багатьох роботах із синтезу адаптивних систем керування вводиться припущення, що всі невизначені фактори мають ймовірнісний характер і в зв'язку з цим пропонується знаходити оптимальне керування з умови мінімізації математичного сподівання деякого функціоналу якості, а отримувані в процесі адаптації оцінки параметрів об'єкта трактувати як випадкові величини. При цьому ігнорується той факт, що отриманий таким чином "оптимальний" розв'язок може, взагалі кажучи, навіть не гарантувати працездатність синтезованої системи в реальних умовах. Через те, що на систему діє лише одна конкретна реалізація неконтрольованого збурення і існує одне дійсне значення кожного параметра об'єкта керування, немає ніяких гарантій, що вони не виявляться найгіршими з точки зору функціоналу якості при визначеному з умови оптимальності для "ансамблю" систем законі керування.

Завдяки цим причинам, а також у зв'язку з тим, що для багатьох об'єктів керування немає ніяких підстав всім наявним невизначеним факторам приписувати ймовірнісний характер, останнім часом все більш широке розповсюдження отримав такий підхід до постановки задач аналізу і синтезу керування, коли використовуються множинні оцінки параметрів і збурень. Тоді ефективність синтезованого алгоритма керування встановлюється шляхом перевірки його роботи при всіх можливих значеннях параметрів і збурень із відомих їх множинних оцінок, що можуть уточнюватись в процесі керування за допомогою процедури ідентифікації.

Інтенсивні дослідження з використанням множинної моделі невизначеності ведуться вченими в Україні (зокрема, співробітниками Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова АН України), в Росії і країнах СНД, а також і в інших країнах світу (зокрема, співробітниками Міжнародного інституту прикладного системного аналізу у Відні, Австрія). Можна відзначити вклад таких учених, як Ф.С.Швеппе, А.Б.Куржанський, Ф.Л.Черноусько, В.М.Кунцевич, Б.М.Пшеничний, М.Ф.Кириченко, Г.М.Бакан, О.Г.Наконечний та ін..

Мета і завдання досліджень. Дослідження спрямовані на створення теоретичних основ синтезу адаптивних дискретних систем керування на базі теоретико-множинних моделей невизначеності. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

1) ввести і методично обгрунтувати використання множинних оцінок для вектора постійних параметрів об'єкта керування;

2) побудувати математичну модель неконтрольованих збурень, для яких не існує (чи невідома) функція розподілу ймовірності, але проявляється регулярність поведінки стосовно стійкості множинних оцінок їх значень;

3) розробити методи розв'язання ряду задач прикладної математики (зокрема, розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь і апроксимації функціональних залежностей), коли для числових параметрів і збурень маємо лише множинні оцінки значень;

4) виконати теоретичні дослідження методів ідентифікації і керування в умовах нестохастично заданої невизначеності для деяких класів об'єктів;

5) розробити методи синтезу алгоритмів керування різними класами об'єктів, в тому числі багатовимірних, де фігурують матриця стану і матриця керування;

6) встановити зв'язок отриманих теоретичних результатів і проблеми дискретного керування за допомогою засобів цифрової техніки неперервним рухом динамічного об'єкта, враховуючи такі прикладні аспекти, як вибір величини тривалості такту керування і структурні обмеження на вимірювання вектора стану динамічного об'єкта.

Наукова новизна і значимість роботи. Розроблено новий метод синтезу дискретних адаптивних систем керування на основі теоретико-множинних моделей невизначеності. Введення моделей нового типу (якісно відмінних від ймовірнісних) дозволило по новому ставити і розв'язувати задачі теорії керування і прикладної математики. Використання множинних оцінок невизначених факторів для розробки конструктивних алгоритмів параметричної і структурної ідентифікації, адаптивного керування різними класами об'єктів є відмітною ознакою виконаних досліджень. При цьому оптимальне керування визначається з умови мінімаксу (мінімум по керуванню, а максимум по невизначених факторах у межах їх множинних оцінок) заданого критерія якості. Оригінальність розроблених методів синтезу матричних алгоритмів керування підтверджена отриманим авторським свідоцтвом на винахід конкретного вигляду матричного регулятора. Через те, що на практиці дуже часто використовується цифрове керування для формування заданого неперервного руху динамічного об'єкта, побудова таких математичних моделей відповідних систем керування із зворотнім зв'язком, що дозволяють поширювати на них методи теорії аналізу і синтезу дискретних систем керування, є вкрай важливим фактором практичного застосування цієї теорії.

Апробація роботи. Головні концепції, ідеї, положення і результати досліджень доповідались на: IV Всесоюзній нараді з проблем керування (м. Москва, 1974), V Всесоюзній нараді з інваріантності, теорії чутливості і їх застосування (м. Київ, 1976), VII Всесоюзній нараді з проблем керування (м. Мінськ, 1977), IV Всесоюзній нараді з статистичних методів теорії керування (м. Фрунзе, 1978), IX Всесоюзній нараді з керування багатозв'язаними системами (м. Москва, 1978), IV Ленінградському симпозиумі "Теорія адаптивних систем" (м. Ленінград, 1979), VIII Всесоюзній нараді з проблем керування (м. Таллінн, 1980), IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань (м. Київ, 1981), Координаційній нараді з проблем адаптації і IX семінарі з адаптивних систем (м. Фрунзе, 1982), IX Всесоюзній нараді з проблем керування (м. Єреван, 1983), Всесоюзній конференції "Теорія адаптивних систем і їх застосування" (м. Ленінград, 1983), X Всесоюзній акустичній конференції (м. Москва, 1983), Координаційній нараді з проблем адаптації і XII школі-семінарі з адаптивних систем (м. Могильов, 1984), Міжнародній конференції з стохастичної оптимізації (м. Київ, 1984), XIII Всесоюзній школі з адаптивних систем (м. Звенигород, 1986), X Всесоюзній нараді з проблем керування (м. Алма-Ата, 1986), Всесоюзній нараді з проблем віброізоляції машин і приладів (м. Москва, 1986), XXI Всесоюзній школі з автоматизації наукових досліджень (м. Чолпон-Ата, 1987), 8-мому IFAC/IFORS симпозіумі "Ідентифікація і оцінювання параметрів систем" (м. Пекін, Китай, 1988), конференції IFAC "Застосування методів адаптивного керування в промисловості" (м. Тбілісі, 1989), Всесоюзній нараді "Проблеми комп'ютерного інтегрованого виробництва" (м. Київ, 1990), республіканському семінарі "Дискретні системи керування" (м. Київ, ІК АНУ). Опубліковано по матеріалах досліджень самостійно і в співавторстві 120 друкованих праць і винаходів, основні результати по темі дисертації містяться в 34 наукових працях, наведених у списку літератури.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Розглядаються дискретні системи керування об'єктами, збурений рух яких описується в загальному випадку нелінійними різницевими рівняннями вигляду

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n, L, F_n), \quad X_0 = X^0, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (1)$$

де $Y_n^T = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n})$ – m-мірний вектор фазових координат системи (т – символ транспонування); $U_n^T = (u_{1,n}, u_{2,n}, \ldots, u_{r,n})$ – r-мірний вектор керування, вибір якого здійснюється конструктором системи керування для досягнення тієї чи іншої мети керування; $F_n^T = (f_{1,n}, \ldots, f_{k,n})$ – k-мірний вектор зовнішніх неконтрольованих збурень, як адитивних, так і мультиплікативних, що діють на об'єкт керування; L – s-мірний вектор постійних параметрів об'єкта, точні значення яких у загальному випадку конструктору системи керування невідомі; $\Phi(\cdot)$ – деяка задана вектор-функція, обмежена на будь-якій обмеженій множині значень X_n, U_n, L, F_n і n.

Причини, що спонукають віддати виключну перевагу дискретним системам керування, перш за все пов'язані з тим, що реалізація більш-менш складних алгоритмів ідентифікації і керування неможлива без застосування обчислювальної техніки, тому навіть для об'єктів керування, неперервних по своїй природі, поведінка всієї системи керування в цілому набуває явно вираженого дискретного характеру. Крім того, будемо рахувати, що керування формується на основі дискретних вимірів вектора фазових координат системи, результатом яких є m-мірний вектор Y_n, де $Y_n^T = (y_{1,n}, y_{2,n}, \ldots, y_{m,n})$, що являє собою вихід деякого вимірного пристрою, описуваного рівняннями вигляду

$$y_{i,n} = (1 + v_{i,n}) \cdot x_{i,n} + z_{i,n}, \quad i = \overline{1,m}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (2)$$

де $z_{i,n}$ – адитивні похибки вимірювань вектора фазових координат, що складають вектор $Z_n^T = (z_{1,n}, z_{2,n}, \ldots, z_{m,n})$, а $v_{i,n}$ – мультиплікативні похибки цих же вимірів, що складають вектор $V_n^T = (v_{1,n}, v_{2,n}, \ldots, v_{m,n})$.

<u>Теоретико-множинні моделі невизначеності.</u> Центральним пунктом нового підходу до синтезу адаптивних дискретних систем керування є введене в [1] припущення про те, що для вектора постійних параметрів L відома лише його апріорна оцінка у вигляді заданої стаціонарної множини $\Omega^{(0)}$, якій належить значення вектора L, тобто

$$L \in \Omega^{(0)}. \qquad (3)$$

Дана оцінка буде уточнюватися в процесі вимірів і отримувані апостеріорні оцінки $\Omega^{(n)}$ будуть використовуватись для розрахунку керування [2-3].

Природно, що такі уточнення можливі лише при аналогічних припущеннях про збурення у вигляді належності значень векторів F_n, Z_n і V_n деяким відомим множинам [4-7], причому на значення кожної з компонент вектора в різні моменти часу можуть бути накладені спільні обмеження. Відзначимо, що використання абсолютною більшістю дослідників при синтезі систем керування лише інформації про обмежену величину збурень приводить в деяких випадках до "загрубілості" отримуваних при ідентифікації оцінок невідомих параметрів і надмірного "песимізму" при розрахунку керувань. В [8] була запропонована математична модель збурень, що, з одного боку, базується на множинних оцінках їх значень, а з іншого боку, дає досить багату інформацію про характер їх поведінки.

Розглянемо скалярне дискретне обмежене збурення f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ і породжуване ним однопараметричне сімейство обмежених процесів

$$\tilde{f}_n(N) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} f_{n+i}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

де $N \geq 0$ - ціле число-параметр (при $N = 0$ маємо $\tilde{f}_n(0) = f_n$).

Позначимо

$$p_1(N) = \inf_{n \geq 0} \{\tilde{f}_n(N)\}, \quad p_2(N) = \sup_{n \geq 0} \{\tilde{f}_n(N)\}. \tag{5}$$

<u>Означення 1.</u> Стаціонарним невизначеним процесом називається обмежений процес f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, що породжує згідно з (4) однопараметричне сімейство обмежених процесів $\tilde{f}_n(N)$ з характеристиками $p_1(N)$ і $p_2(N)$ з (5).

З (4) і (5) випливає, що якщо збурення f_n розглядається на інтервалі $[0, M]$, то значення будь-якої її конкретної реалізації задовольняють нерівностям

$$p_1(N) \leq \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} f_{n+i} \leq p_2(N), \quad n = \overline{0, M-N}, \quad N = \overline{0, M}, \tag{6}$$

які задають множину в просторі значень збурення f_n. Позначимо цю множину через $\mathfrak{F}_M$. Ввівши аналогічні позначення для випадків інших збурень, запишемо, що

$$f_n \in \mathfrak{F}_M, \quad Z_n \in \mathfrak{Z}_M, \quad V_n \in \mathfrak{B}_M. \tag{7}$$

Відзначимо, що нерівності (6) при $N = 0$ задають звичайні обмеження знизу і зверху на величину збурень, що відповідає апріорній множині у вигляді гіперпаралелепіпеда в просторі E^M. Значення нерівностей (6) при $N \neq 0$ дозволяє отримувати більш точну оцінку у вигляді опуклого багатогранника, що належить цьому гіперпаралелепіпеду, а отже дає досліднику більш багату і змістовну інформацію. Як показано в [8], множинні оцінки (7) задають властивості збурень з тією ж повнотою, що і статистичні характеристики випадкових процесів типу кореляційної функції чи спектральної густини.

Означення 2. Регулярним стаціонарним невизначеним процесом називається такий стаціонарний невизначений процес f_n (згідно з означенням 1), що при будь-якому $N \geq 0$ для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon(N) > 0$ (причому $\varepsilon(N) < p_2(N) - p_1(N)$) існує таке ціле число $\theta(N) > 0$ (інтервал регулярності), що для будь-якого $n \geq 0$ на інтервалі $[n, n + \theta(N)]$ знайдеться таке $n_1 \in [n, n + \theta(N)]$, що

$$\tilde{f}_{n_1}(N) \leq p_1(N) + \varepsilon(N), \tag{8}$$

і таке $n_2 \in [n, n + \theta(N)]$, що

$$\tilde{f}_{n_2}(N) \geq p_2(N) - \varepsilon(N). \tag{9}$$

Як випливає з означення 2, регулярність процесу f_n означає, що кожний процес з однопараметричного сімейства $\tilde{f}_n(N)$ при реалізації в часі багаторазово досягає значень, близьких до граничних. Ця властивість особливо важлива при використанні оцінок (6) для розв'язку задач прикладної математики і теорії керування, зокрема задач апроксимації і ідентифікації [9].

Наявність невизначеності відносно параметрів і збурень у вигляді (3) і (7) не дозволяє безпосередньо використовувати рівняння (1) для опису руху і розв'язку задач керування. Навіть вимірявши точно початкове значення вектора фазових координат X_0 неможливо однозначно передбачити значення X_1. Математична модель руху тут матиме вигляд різницевого включення

$$X_1 \in \mathfrak{X}_1 = \{X_1 : X_1 = \Phi(X_0, U_0, L, F_0) \quad \forall L \in \mathfrak{L}_0, F_0 \in \mathfrak{F}\}. \tag{10}$$

Аналогічно описується один крок руху системи з довільного стану, однак прогноз руху на декілька кроків є більш складним. В роботах [10], [11] було запропоновано для цієї мети використовувати різницеві рівняння, що визначають еволюцію множин. Зауважимо лише, що в цьому випадку слід враховувати той факт, що вектор параметрів L постійний і його справжнє значення $L = \overset{*}{L}$, що дійсно реалізується, залишається тим самим для всіх моментів часу.

Так, для відомої оцінки початкового стану

$$X_0 \in \mathfrak{X}_0 \tag{11}$$

і множини можливих керувань

$$\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{U}}, \tag{12}$$

де

$$\tilde{U}^T = (U_0^T, U_1^T, \dots, U_M^T), \tag{13}$$

можна визначити оцінку

$$X_{M+1} \in \mathfrak{X}_{M+1}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{X}_{M+1} = \tilde{\Phi}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{U}, \mathfrak{P}_0, \mathfrak{F}_M), \tag{15}$$

де $\tilde{\Phi}(\cdot)$ - вектор-функція перетворення множин [11], що отримана з (1) шляхом реалізації M кроків для визначення X_{M+1} через початковий стан.

Методи розв'язання задач прикладної математики. Задача відшукання ефективних способів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь в її різноманітних постановках є, напевно, в історичному плані однією з найдавніших проблем в математиці. Наявність неминучих похибок (неточностей) в установленні числових коефіцієнтів, що обумовлюється або неточністю вихідних даних в тій змістовній задачі, математичною моделлю якої є розглядувана система рівнянь, або похибками заокруглення, або і тим і іншим разом, приводить до невизначеності шуканого розв'язку. В [12] був запропонований метод розрахунку множини всіх розв'язків, які можуть бути отримані при варіації коефіцієнтів системи рівнянь і їх правих частин у межах заданої точності.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$AX = B, \tag{16}$$

де X - m-мірний вектор, який потрібно визначити; A - матриця коефіцієнтів системи розмірністю (r × m); B - r-мірний вектор правих частин. Нехай істинні значення елементів матриці A і вектора B невідомі, а задані лише обмежені множини матриць $\mathfrak{A}$ і векторів $\mathfrak{B}$, яким вони належать, тобто відомо, що

$$A \in \mathfrak{A}, \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{17}$$

У відповідності з наведеними в [11] і [2] означеннями функціональних перетворень із множинами визначимо функцію (відображення) елементів $A \in \mathfrak{A}$ і $B \in \mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{F}(A,B) = \{X: AX = B\}, \tag{18}$$

де $\mathfrak{F}(\cdot)$ - в загальному випадку деяка множина в евклідовому просторі E^m (зокрема, одноточкова для випадку r = m і невиродженої матриці A).

Ця множина є пустою в тому випадку, коли не існує X, що задовольняють (16) для заданих A і B.

Будемо шукати множину

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} \; \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \mathfrak{F}(A,B), \tag{19}$$

тобто множину всіх можливих розв'язків системі рівнянь (16) при всіх можливих у відповідності з (17) значеннях коефіцієнтів матриці A і правих частин системи.

Означення 3. Під розв'язком системи (16) і (17) будемо розуміти множину $\mathfrak{X}$ всіх можливих $X \in E^m$, для кожного з яких знайдуться такі A і B, що задовольняють (17), і для яких виконується (16).

Природно, що в загальному випадку при відсутності додаткових умов відбору всі елементи цієї множини (якщо вона не пуста) рівноправні в тому сенсі, що жоден із них не може претендувати на роль єдино "правильного" розв'язку.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{l} \mathfrak{B}_l, \quad l = \overline{1,N_B}, \tag{20}$$

де $\mathfrak{B}_l$ - деякі підмножини множини $\mathfrak{B}$ (N_B - кількість цих підмножин) і

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{k} \mathfrak{A}_k, \quad k = \overline{1,N_A}, \tag{21}$$

де $\mathfrak{A}_k$ - деякі підмножини множини $\mathfrak{A}$ (N_A - кількість цих підмножин). Тоді, підставляючи (20) і (21) в (19), отримаємо

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{k} \; \bigcup_{l} \mathfrak{X}_{kl}, \quad k = \overline{1,N_A}, \quad l = \overline{1,N_B}, \tag{22}$$

де

$$\mathfrak{X}_{kl} = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}_k} \; \bigcup_{B\in\mathfrak{B}_l} \mathfrak{F}(A,B). \tag{23}$$

Із рівностей (22) і (23) випливає, що шукана множина $\mathfrak{X}$, яка є розв'язком системи лінійних рівнянь (16) при умові (17) в сенсі наведеного вище означення, має властивість, яку будемо називати властивістю композитивності. Дійсно, ця множина може бути отримана із підмножин вигляду (23) шляхом їх об'єднання. Тому при визначенні множини $\mathfrak{X}$ можна представити множини $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ у вигляді (20) і (21), тобто об'єднання деякого числа підмножин стандартного типу, для будь-якої пари яких можна визначити множину вигляду (23), а після цього скористуватись співвідношенням (22). Із сказаного випливає, що необхідно мати конструктивну методику знаходження множини-розв'язку системи (16) для деякого стандартного типу непустих множин $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку системи (16) в сенсі даного означення 3 для випадку, коли відомі оцінки коефіцієнтів матриці A і правих частин рівнянь у вигляді

$$a_{nj}^{(0)} \leqslant a_{nj} \leqslant a_{nj}^{(1)}, \quad n = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{24}$$

$$b_n^{(0)} \leqslant b_n \leqslant b_n^{(1)}, \tag{25}$$

де $a_{nj}^{(k)}$ и $b_n^{(k)}$ $(k = (0;\ 1))$ – відомі числа.

Розв'язок представимо у вигляді

$$\mathfrak{X} = \bigcup_i \mathfrak{X}^{(i)}, \quad i = \overline{0,N_0-1}, \tag{26}$$

де $\mathfrak{X}^{(i)}$ – деякі опуклі підмножини (N_0 – число таких підмножин). З цією метою розглянемо спочатку випадок, коли відомо, що множина $\mathfrak{X}$ повністю належить одному з ортантів простору E^m, тобто частині простору, де всі координати зберігають свій знак.

Поставимо у відповідність кожній j-й координаті вектора X у виділеному ортанті число "0", якщо ця координата позитивна, і "1", якщо вона негативна. Впорядкована (по номерах компонент вектора X) послідовність таких нулів і одиниць і буде характеризувати кожний ортант простору E^m. Якщо таку послідовність розглядати як деяке число в двійковій формі, то десяткове значення цього числа буде задавати номер $i = \overline{0,N-1}$ $(N = 2^m)$ виділеного ортанта. Введемо матриці

$$E^{(i)} = \operatorname{diag}(e_j^{(i)}), \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{0,N-1}, \tag{27}$$

де j-а діагональна компонента дорівнює "0", якщо x_j позитивне в i-му ортанті, і "1" якщо негативне, тобто по діагоналі матриці $E^{(i)}$ розташована послідовність нулів і одиниць, що характеризують i-й ортант. Тоді отримаємо, що кожний ортант виділяється системою нерівностей

$$(I - 2E^{(i)})X \geqslant 0, \quad i = \overline{0,N-1}, \tag{28}$$

де I – одинична матриця.

Позначимо

$$A_k = (a_{nj}^{(k)}), \quad B_k = (b_n^{(k)}), \quad k = \overline{0,\ 1}. \tag{29}$$

В цьому випадку справедлива наступна лема.

Лема 1. Нехай для системи (16) при умовах (17) у вигляді обмежень (24), (25) множина $\mathfrak{X}$ повністю належить одному з ортантів E^m, що виділяється нерівностями (28) для деякого i (з відповідною цьому i матрицею $E^{(i)}$ з (28)). Тоді множина $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(i)}$ – розв'язок цієї системи – виділяється умовами (27) спільно з нерівностями

$$\begin{aligned} C_1(i)\cdot X - B_0 &\geqslant 0, \\ C_0(i)\cdot X - B_1 &\leqslant 0, \end{aligned} \tag{30}$$

де елементи матриць $C_k(i) = [c_{nj}^{(k)}(i)]$ $(k = 0;\ 1)$ визначаються таким чином:

чином:

$$c_{nj}^{(0)}(i) = a_{nj}^{(e_j^{(i)})}, \quad n = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,m},$$
$$c_{nj}^{(1)}(i) = a_{nj}^{(1-e_j^{(i)})}. \tag{31}$$

Співвідношення (31) означають, що матриці $C_0(i)$ і $C_1(i)$ складені з елементів матриць A_0 і A_1 таким чином, що при $e_j^{(i)} = 1$ j-й стовпець матриці $C_0(i)$ рівний j-му стовпцю A_1, а j-й стовпець $C_1(i)$ рівний j-му стовпцю A_0. Якщо ж $e_j^{(i)} = 0$, то j-й стовпець $C_0(i)$ рівний j-му стовпцю матриці A_0, а j-й стовпець $C_1(i)$ рівний j-му стовпцю A_1.

Зауважимо, що множина $\mathfrak{X}^{(i)}$, яка виділяється нерівностями (28) і (30) для деякого i, в силу лінійності цих нерівностей являє собою опуклий поліедр (або опуклий багатогранник при обмеженості цієї множини), що належить i-му ортанту простору E^m.

В загальному випадку можна використати представлення (26) для розв'язку $\mathfrak{X}$, припустивши, що кожна підмножина повністю належить одному з ортантів простору E^m, який характеризується матрицею $E^{(i)}$. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Нехай для системи (16) при умовах (1), множини $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ виділяються обмеженнями (24) і (25). Тоді множина $\mathfrak{X}$ - розв'язок системи лінійних рівнянь (16) - має вигляд (26) (з $N_0 = N$ із (27)), де підмножини $\mathfrak{X}^{(i)}$ виділяються спільно нерівностями (28) і (30).

Справедливість теореми безпосередньо випливає із твердження попередньої леми і розгляду послідовності із N ортантів. Таким чином, множина $\mathfrak{X}$ являє собою об'єднання опуклих поліедрів (або опуклих багатогранників у випадку обмеженості $\mathfrak{X}$), що належать різним ортантам простору E^m і можуть мати лише спільні точки (чи підмножини міри "нуль") на гіперплощинах, що розділяють ці ортанти. Природно, що деякі з підмножин $\mathfrak{X}^{(i)}$ можуть виявитися пустими, тобто система нерівностей (28) і (30) для деяких ортантів буде несумісною. Із зіставлення системи рівнянь (16) і системи нерівностей (30) (враховуючи (31)) випливає, що кожне рівняння з (16) при визначенні підмножин $\mathfrak{X}^{(i)}$ породжує для кожного ортанта дві лінійні нерівності в (30), причому всі ці пари нерівностей незалежні одна від одної. Ця властивість дозволяє будувати рекурентні процедури уточнення підмножин $\mathfrak{X}^{(i)}$ шляхом послідовного приєднання відповідних пар нерівностей і відкидання неінформативних серед них (тобто таких пар нерівностей, які не уточнюють $\mathfrak{X}^{(i)}$ в порівнянні з попередньою оцінкою). Для цього перепишемо систему рівнянь (16) у вигляді

$$\tilde{A}_n X = b_n, \quad n = \overline{1,r}, \tag{32}$$

де $\tilde{A}_n$ - n-й рядок матриці A. Кожному скалярному рівнянню з (32) відповідає така множина $\tilde{\mathfrak{X}}_n$, що для будь-якого $X \in \tilde{\mathfrak{X}}_n$ знайдуться такі $\tilde{A}_n \in \mathfrak{A}$ і $b \in \mathfrak{B}$, які задовольняють рівність (32) для виділеного n. Згідно з теоремою 1 кожна множина $\tilde{\mathfrak{X}}_n$ може бути представлена в вигляді

$$\tilde{\mathfrak{X}}_n = \bigcup_i \mathfrak{X}_n^{(i)}, \quad i = \overline{0,N-1}, \tag{33}$$

де $\mathfrak{X}_n^{(i)}$ - опукла підмножина, що повністю належить i-му ортанту простору E^m і виділяється в цьому ортанті скалярними нерівностями

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^{(n)}(i) \cdot X - b_n^{(0)} \geqslant 0, \\ \tilde{C}_0^{(n)}(i) \cdot X - b_n^{(1)} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Тут $\tilde{C}_1^{(n)}(i)$ і $\tilde{C}_0^{(n)}(i)$ - n-і рядки матриць $C_1(i)$ і $C_0(i)$.

В той же час згідно з незалежністю обмежень на різні елементи матриці A і вектора B отримаємо, що

$$\mathfrak{X} = \tilde{\mathfrak{X}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{X}}_2 \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{X}}_r. \tag{35}$$

Звідси випливає різницеве рівняння еволюції множин

$$\mathfrak{X}_{n+1} = \mathfrak{X}_n \cap \tilde{\mathfrak{X}}_{n+1}, \quad \mathfrak{X}_1 = \tilde{\mathfrak{X}}_1, \quad n = \overline{1,r-1}, \tag{36}$$

таке, що справедливо

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_r. \tag{37}$$

Із (33) і (36) отримаємо систему незалежних різницевих рівнянь

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_{n+1}^{(i)} = \mathfrak{X}_n^{(i)} \cap \tilde{\mathfrak{X}}_{n+1}^{(i)}, \quad i = \overline{0,N-1}, \quad n = \overline{1,r-1} \\ \mathfrak{X}_1^{(i)} = \tilde{\mathfrak{X}}_1^{(i)}, \end{cases} \tag{38}$$

що описують еволюцію вкладених опуклих поліедрів у кожному ортанті простору E^m окремо (за винятком тих ортантів, де ці множини виявляються пустими). При цьому методика реалізації операції перетину опуклих множин $\mathfrak{X}_n^{(i)}$ і $\tilde{\mathfrak{X}}_{n+1}^{(i)}$ в кожному рівнянні з (38) залишається аналогічною методиці, описаній в [2], бо у випадку обмеженості множин $\mathfrak{X}_n^{(i)}$ необхідно лише реалізовувати на кожному кроці перетин багатогранника із напівпросторами в (34) і "відкидання відтятих частин".

Відзначимо, що при наявності апріорної оцінки

$$\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_0, \tag{39}$$

де $\mathfrak{X}_0$ - відома множина, представлена у вигляді об'єднання опуклих поліедрів $\mathfrak{X}_0^{(i)}$, що належать відповідним ортантам

$$\mathfrak{X}_0 = \bigcup_{1} \mathfrak{X}_0^{(1)}, \quad 1 \quad \overline{0,N-1}, \tag{40}$$

така оцінка може бути конструктивно використана в описаній рекурентній процедурі. Для цього слід рівняння (38) поширити 1 на значення $n = 0$, замінивши початкову умову $\mathfrak{X}_1^{(1)} = \tilde{\mathfrak{X}}_1^{(1)}$ умовою (40).

Представлення розв'язку у вигляді (38) може виявитися корисним, якщо множина $\mathfrak{X}$ використовується як область визначеності при розв'язку оптимізаційних задач. Так, у роботі [13] був запропонований ітераційний алгоритм розв'язання одного із варіантів задачі лінійного програмування, що використовує геометричне представлення про формування багатогранних множин [6] і ідеї методу послідовного аналізу варіантів, а також застосовує для оптимізації метод "відкидання відтятих частин".

Класичною задачею прикладної математики є задача апроксимації, коли необхідно встановити функціональну залежність у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=1}^{S} 1_j \varphi_j(x), \tag{41}$$

де x - скалярний аргумент; $y(\cdot)$ скалярна функція; $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{S}$ - послідовність функцій, заданих аналітично чи на скінченній множині $\{X_n\}|_{n=0}^{M}$ значень аргумента; 1_j - невідомі числові параметри, що підлягають визначенню; S - число опорних функцій $\varphi_j(x)$ в (41); M - число дискретних значень аргумента.

В ролі вихідної апріорної інформації задані числові значення $\tilde{y}_n (n = \overline{1,M})$, про яких відомо, що

$$\tilde{y}_n = (1 + v_n)\, y(x_n) + z_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \dot{M}, \tag{42}$$

де z_n - невідома адитивна похибка визначення (вимірювань) значень функції $y(\cdot)$ для заданого x_n, а v_n - невідома мультиплікативна похибка цих же вимірів.

Використання моделі у вигляді (42) для визначення (вимірювання) значень функції $y(x)$ в дискретних точках x_n, тобто врахування неминучих при цьому похибок, одразу ж робить принципіально некоректною вимогу відшукати лише єдиний такий набір коефіцієнтів 1_j, який забезпечив би малу норму нев'язки між значеннями $y(x_n)$ і $\tilde{y}_n$. Так, наприклад, при неточних вимірах вимога високої точності поліноміальної апроксимації по скінченній вибірці даних (тобто зведення її до задачі інтерполяції) приведе до невиправдано високого степеня апроксимуючого полінома, причому залежного від кількості заданих числових значень функції (тим вищий степінь полінома, чим більша кількість числових даних).

В роботі [9] було запропоновано підхід, що використовує оцінки вигляду (6), (7), тобто вводиться припущення про те, що похибки v_n і z_n є стаціонарні невизначені процеси. Це дозволяє частину із S параметрів l_j прирівняти до нуля а решту оцінити з точки зору задоволення співвідношень (42), тобто знайти такі множинні оцінки для решти параметрів l_j, що узгоджуються з множинними оцінками (7) ($\mathfrak{V}_M$ і $\mathfrak{Z}_M$) похибок визначення (вимірювання) згідно з (42) значень функції $y(\cdot)$.

Нехай маємо вказану послідовність функцій $\varphi_j(x)$ ($j = \overline{1,S}$), обмежених на скінченній області $\tilde{\mathfrak{X}}$, якій належать дискретні значення аргумента. Поставимо їй у відповідність послідовність числових параметрів l_j ($j = \overline{1,S}$) і змінних дискретних параметрів δ_j ($j = \overline{1,S}$), що набувають тільки два значення: "нуль" і "одиниця". Позначимо через $\Phi_0(x)$ S-мірний функціональний вектор, компонентами якого є функції $\varphi_j(x)$, а через L і Δ – відповідні S-мірні вектори, складені із параметрів l_j і δ_j. Введемо функцію

$$\bar{y}(x, L, \Delta) = \sum_{j=1}^{S} \delta_j l_j \varphi_j(x), \tag{43}$$

яку будемо називати апроксимуючою функцією.

Підставляючи її в (42) замість $y(\cdot)$, отримаємо співвідношення

$$y_n = (1 + v_n) \sum_{j=1}^{S} \delta_j l_j \varphi_j(x_n) + z_n, \quad n = \overline{0,M}. \tag{44}$$

Природно, що внаслідок невизначеності значень v_n і z_n, неможливо вимагати виконання цих співвідношень для деякої певної послідовності значень δ_j і l_j (тобто некоректно намагатись отримати точкову оцінку невідомих параметрів апроксимуючої функції).

Припустимо, що вектор Δ якимось чином заданий. Тоді можна вважати, що співвідношення (44) спільно з (7) являють собою систему лінійних рівнянь відносно тих компонент вектора L, для яких відповідні $\delta_j = 1$, при наявності невизначеності в коефіцієнтах і вільних членах. Тоді можна використати формалізм знаходження розв'язку рівнянь типу (16), (17).

Означення 4. Під множинною оцінкою вектора числових параметрів L при певному значенні вектора дискретних параметрів Δ будемо розуміти таку множину $\mathfrak{L}(\Delta)$ в просторі E^S, що для будь-якого значення

$$L \in \mathfrak{L}(\Delta) \tag{45}$$

знайдуться відповідні

$$v_n \in V_M, \quad z_n \in Z_M, \quad \forall\, n = \overline{0,M}, \tag{46}$$

для яких задовольняються співвідношення (44).

Зауважимо, що для деякої послідовності значень $s_j = 1$ може виявитися, що ні для яких значень відповідних l_j не існує такої послідовності v_n і z_n $(n = \overline{0,M})$, для якої задовольняється (44).

Означення 5. Будемо називати допустимою апроксимуючою функцією (ДАФ) таку функцію вигляду (43) при певному значенні вектора дискретних параметрів Δ, що відповідна множина $\mathcal{L}(\Delta)$ (згідно з означенням 4) є непустою.

Для знаходження допустимих апроксимуючих функцій необхідно при кожному значенні вектора Δ встановити факт існування непустої множини $\mathcal{L}(\Delta)$ і знайти цю множину.

Нехай справедливе природне обмеження на мультиплікативну похибку

$$|v_n| < 1 \quad \forall\ n = \overline{0,M}. \tag{47}$$

Тоді співвідношення (44) можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{s} s_j\ \varphi_j(x_n)\cdot l_j = \eta_n,$$
$$\eta_n = (\tilde{y}_n - z_n)\cdot(1 + v_n)^{-1} \in \eta_M, \quad n = \overline{0,M}, \tag{48}$$

що являють собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих l_j (з $s_j = 1$) з невизначеною правою частиною.

При рівній кількості вимірів M і кількості невідомих параметрів l_j в (48) для невиродженої матриці коефіцієнтів (їх роль грають значення $\varphi_j(x_n)$) множина $\mathcal{L}(\Delta)$ завжди непуста і отримується лінійним перетворенням (після перемноження на зворотну матрицю) множини η_M. Проте із збільшенням числа вимірів можлива суперечність співвідношень (44) для деякого невдало вибраного Δ, що породить пусту множину $\mathcal{L}(\Delta)$, тобто процедура визначення множинної оцінки $\mathcal{L}(\Delta)$ послужить критерієм відбору допустимих апроксимуючих функцій.

Твердження 1. При розв'язку задачі апроксимації, коли похибки вимірювань значень невідомої функції (згідно з (42)) мають вигляд регулярних стаціонарних невизначених процесів (згідно з означенням 2), для отримання достовірних результатів відбору ДАФ (згідно з означенням 5) потрібно, щоб кількість вимірів суттєво перевищувала кількість невідомих параметрів, а інтервал часу вимірювання був більшим за максимальне значення інтервалу регулярності самих похибок.

Останнє означає, що коли, наприклад, процеси v_n і z_n являють собою суми гармонік з невідомими амплітудами, частотами і фазами, то при наявності апріорної інформації про деяку нижню частоту, якій кратні (з достатньою точністю) частоти "значущих" гармонік, то інтервал часу вимірювань повинен бути не менший (бажано більший), ніж період цієї нижньої частоти.

Очевидно, що допустимих апроксимуючих функцій в загальному випадку буде досить багато. Необхідно сформулювати критерії вибору оптимальної ДАФ і алгоритм її знаходження.

Введемо М-мірний вектор $E(L, \Delta)$, складений із відхилень значень деякої ДАФ вигляду (43) від виміряних значень функції $y(\cdot)$:

$$e_n(x_n, L, \Delta) = \bar{y}(x_n, L, \Delta) - \tilde{y}_n. \qquad (49)$$

На множині $\mathfrak{T}$ введемо деяку норму від вектора відхилень $\rho[E(L,\Delta)]$. Тоді величина

$$I_1(\Delta) = \min_{L\in \mathfrak{L}(\Delta)} \{\rho(\cdot)\} \qquad (50)$$

характеризує точність можливого і оптимального в класичному розумінні наближення значень ДАФ до виміряних значень. Відмінність критерію (50) від загальноприйнятого підходу полягає лише в тому, що мінімум знаходиться для допустимих апроксимуючих функцій, для яких раніше знайдена непуста множина $\mathfrak{L}(\Delta)$. Принципіально новим є запропонований в [9] критерій $I_2(\Delta)$, що характеризує міру невизначеності невідомих значень ДАФ з вибраною її структурою, тобто "ширину трубки", в якій знаходиться істинна функціональна залежність. Позначимо через $\overset{*}{L}$ аргумент розв'язку задачі мінімізації в (50) і введемо М-мірний вектор $\tilde{E}(L, \Delta)$, складений з відхилень значень ДАФ від значень $\bar{y}(x_n, \overset{*}{L}, \Delta)$:

$$\tilde{e}_n(x_n, L, \Delta) = \bar{y}(x_n, L, \Delta) - \bar{y}(x_n, \overset{*}{L}, \Delta). \qquad (51)$$

Тоді величина $I_2(\Delta)$ може бути визначена як

$$I_2(\Delta) = \max_{L\in \mathfrak{L}(\Delta)} \{\rho[\tilde{E}(L, \Delta)]\}, \qquad (52)$$

де норма $\rho(\cdot)$ визначається, як і в (50).

Очевидно, що величину вектора Δ (з компонентами "нуль" або "одиниця") слід вибирати так, щоб забезпечити найменші значення критеріїв $I_1(\cdot)$ і $I_2(\cdot)$, тобто гарантувати не тільки добре наближення до відомих виміряних значень функції $y(\cdot)$, але і добре наближення до невідомих істинних її значень (що відрізняються від відомих за рахунок похибок вимірювань). Це означає, що потрібно розв'язати задачу векторної оптимізації з компонентами $I_1(\cdot)$ і $I_2(\cdot)$ векторного критерію. Скористаємось стандартним прийомом зведення задачі векторної оптимізації до скалярної. Тоді розв'язок задачі апроксимації в умовах невизначеності буде

$$\begin{cases} \overset{*}{\Delta} = \arg\min\limits_{\Delta} \{I(\Delta) = \gamma I_1(\Delta) + (1-\gamma) I_2(\Delta)\}, \\ \overset{*}{L} = \arg \min\limits_{L \in \mathcal{P}(\overset{*}{\Delta})} \{\rho[E(L,\Delta)), \end{cases} \qquad (53)$$

де $0 < \gamma < 1$ - деякий числовий параметр, що вибирається з умов компромісу між вимогами досягнення максимально можливої точності наближення до виміряних значень і мінімальної міри невизначеності для знайденої структури ДАФ.

Для дослідження властивостей розв'язку (53) розділимо всю множину д пустимих апроксимуючих функцій на деякі підкласи.

Означення 6. Підкласом однокореневих допустимих апроксимуючих функцій будемо називати таку підмножину допустимих апроксимуючих функцій, серед яких є одна коренева ДАФ з деяким $\Delta = \overset{o}{\Delta}$, а в решті ДАФ у векторах Δ містяться компоненти рівні "одиниці" для тих j, для яких $\overset{o}{\delta}_j = 1$, а також деякі інші $\delta_j = 1$.

Іншими словами, коренева ДАФ містить мінімальну кількість членів апроксимуючої функціональної залежності, а інші ДАФ із виділеного підкласу отримуються шляхом доповнення в (43) додаткових членів з $\delta_j = 1$. Очевидно, що всі такі апроксимуючі функції також будуть допустимі, бо установивши для вказаних j, для яких додатково було прийнято $\delta_j = 1$, відповідні $l_j = 0$, отримаємо кореневу ДАФ. Позначимо множину векторів Δ для виділеного підкласу через $\mathfrak{D}$.

Згідно з введеним означенням 6 маємо

$$\mathcal{P}(\overset{o}{\Delta}) \subseteq \mathcal{P}(\Delta) \quad \forall\ \Delta \in \mathfrak{D}, \qquad (54)$$

звідки випливає справедливість наступної теореми [9].

Теорема 2. Для підкласу однокореневих допустимих апроксимуючих функцій коренева ДАФ забезпечує мінімальне значення критерію $I_2(\Delta)$ і максимальне значення критерію $I_1(\Delta)$, тобто

$$I_2(\overset{o}{\Delta}) \leq I_2(\Delta) \quad і \quad I_1(\Delta) \leq I_1(\overset{o}{\Delta}) \quad \forall\ \Delta \in \mathfrak{D}. \qquad (55)$$

Це означає, що розв'язок (53) для виділеного класу функцій $\varphi_j(x)$ ($j = 1,S$) буде деяким компромісом між збільшенням $I_2(\Delta)$ і зменшенням $I_1(\ )$ при збільшенні кількості членів апроксимуючої функціональної залежності в порівнянні з цією кількістю для деякої кореневої ДАФ. Звідси випливає алгоритм знаходження розв'язку (53). На початку шукаються допустимі апроксимуючі функції з мінімальною кількістю членів функціонального ряду (починаючи з одного і поступово збільшуючи кількість, поки не отримаємо ДАФ). При цьому слід виділити тільки "незалежні" ДАФ, в тому сенсі, що з цієї функції не може бути отримана така ж інша шляхом "обнулення" частини параметрів. "Незалежні" ДАФ приймаються за кореневі ДАФ і для кожного підкласу шукається розв'язок задачі (53) шляхом поступового розширення кількості членів кожного підкласу однокореневих ДАФ. Отримані розв'язки порівнюються за величиною $I(\Delta)$ і в ролі глобального розв'язку (53) на всьому класі допустимих апроксимуючих функцій вибирається той, який забезпечує мінімум величини $I(\Delta)$ (згідно з (53)).

Теоретичні дослідження методів ідентифікації і керування в умовах нестохастичної невизначеності для деяких класів об'єктів. Розв'язання задачі керування об'єктом в умовах нестохастичності невизначеності розбивається на наступні етапи:

1) попередня ідентифікація (пасивна чи активна) для визначення структури об'єкта і уточнення множинних оцінок його параметрів;

2) синтез оптимального стабілізуючого керування з використанням апріорних гарантованих множинних оцінок збурень і параметрів;

3) синтез алгоритмів адаптивного керування, що суміщають власне процес керування і процедуру ідентифікації, в загальному випадку, як результат розв'язку задачі векторної оптимізації.

Розглянемо спочатку клас статичних об'єктів із скалярним виходом, що описуються рівнянням вигляду (1) для $m = 1$, $k = 1$ при відсутності X_n в правій частині, тобто

$$X_{n+1} = \varphi(U_n, L, f_n, n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{56}$$

коли вимірювання виходу здійснюється пристроєм, функціонування якого описується рівністю (2), тобто

$$\tilde{y}_n = (1 + v_n)x_n + z_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Задача структурної ідентифікації, природно, формулюється як знаходження функціональної залежності у вигляді

$$\varphi(\cdot) = \sum_{j=1}^{s} l_j\, \varphi_j(U_n, n) + f_n, \tag{58}$$

де l_j - компоненти вектора невідомих параметрів L, а $\varphi_j(\cdot)$ - деякі "опорні" функції, задані аналітично або обчислені таблично для допустимих значень керування

$$U_n \in \Omega, \tag{59}$$

де Ω - задана обмежена множина. Опис (58), (57) дозволяє застосувати для розв'язку цієї задачі результати, викладені раніше при розв'язанні задачі апроксимації [9]. А саме, при виборі певної послідовності опорних функцій $\varphi_j(\cdot)$ і на основі $(M + 1)$-го вимірів отримаємо співвідношення

$$\sum_{j=1}^{s} \delta_j \varphi_j(U_n, n) \cdot l_j = \tilde{\eta}_n, \qquad (60)$$
$$\tilde{\eta}_n = (\tilde{y}_{n+1} - z_{n+1})(1 + v_{n+1})^{-1} - f_n, \quad n = \overline{0, M},$$

де δ_j - компоненти вектора Δ, рівні "нуль" і "одиниця" (відповідно до вибору послідовності $\varphi_j(\cdot)$).

При припущеннях у вигляді (46), (47) відносно характеру збурень v_n, z_n і f_n, будемо роглядати співвідношення (60) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих l_j (з $\delta_j = 1$) з невизначеною правою частиною. Це означає, що в цьому випадку справедливі аналогічні означення і твердження, що і для задачі апроксимації, а також відповідний алгоритм її розв'язання. В процесі розв'язання задачі структурної ідентифікації одночасно розв'язується задача параметричної ідентифікації, тобто для обраної структури визначаються множинні оцінки невідомих параметрів [1], [2]:

$$L \in \varrho_M, \qquad (61)$$

де множина ϱ_M є розв'язком системи рівнянь (60).

Лема 2. Нехай в системі рівнянь (60) (при вибраному векторі Δ) матриця коефіцієнтів лівої частини $\tilde{A} = (\varphi_j(U_n))$ є квадратною і невиродженою, а $\tilde{\eta}_n$ - стаціонарний невизначений процес. Тоді розв'язок системи рівнянь (60) (множина ϱ_M) є опуклою багатогранною множиною в просторі F^s_1, що отримується лінійним перетворенням опуклої множини (багатогранника, що виділяється нерівностями вигляду (6) для $\tilde{\eta}_n$) з матрицею цього перетворення $\tilde{A}^{-1}$.

Справедливість леми достатньо очевидна [12]. При цьому, згідно з послідовністю вимірювань, для опису процедури ідентифікації доцільно використати різницеве рівняння еволюції множин

$$\varrho_{n+1} = \varrho_n \cap \tilde{\varrho}_{n+1}, \quad \varrho_0 = \varrho^{(0)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (62)$$

де $\varrho^{(0)}$ - апріорна оцінка вектора параметрів, а $\tilde{\varrho}_{n+1}$ - апостеріорна оцінка, що отримується в результаті виміру величини y_{n+1} з умови виконання співвідношень (56), (57). Рекурентне співвідношення (62) є по суті рівнянням нелінійного (в силу нелінійності операції перетину множин - $\cap$) фільтра з пам'яттю. Доцільно відмітити, що на відміну від традиційних методів розв'язання задач ідентифікації, що дозволяють отримувати лише наближені точкові оцінки параметрів, оцінки вигляду (62) є гарантованими в тому сенсі, що істинні значення параметрів об'єкта, які оцінюються в процесі реалізації цієї процедури ідентифікації, належать множинам $\wp_n$ [14]. В той же час при довільно вибраних керуваннях і наявності неконтрольованих збурень отримувані оцінки можуть виявитися достатньо "грубими", тобто малоефективними. Тому доцільно при вибраній структурі об'єкта реалізувати режим активної ідентифікації, вибираючи при цьому керування з умови отримання максимальної інформації про об'єкт.

В [15] для лінійних статичних об'єктів вигляду

$$x_{n+1} = L^T U_n + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{63}$$

і при припущеннях про точне вимірювання x_n розв'язувалась задача визначення оптимального (в деякому сенсі) плану проведення експериментів для уточнення оцінок параметрів. В ролі критерію якості рекурентної процедури ідентифікації використовувався діаметр множини $\wp_n$ [16], а керування визначалось як розв'язок задачі

$$\min_{U_n \in \mathfrak{U}} \; \max_{X_{n+1} \in \mathfrak{X}_{n+1}} d\,[\wp_{n+1}(X_{n+1}, U_n)], \tag{64}$$

де $d[\cdot]$ - діаметр спрогнозованої множини $\wp_{n+1}$, $\mathfrak{X}_{n+1}$ - множина значень вимірювань, якій буде належати черговий вимір X_{n+1}, значення якого залежать від вибраного керування U_n, реалізованого значення збурень f_n і істинного значення вектора параметрів $L \in \wp_n$.

Досліджувались властивості оптимального керування при деяких припущеннях про властивості збурень і вигляд множини $\mathfrak{U}$. Запропоновано субоптимальний алгоритм керування процесом ідентифікації, який дозволяє суттєво зменшити обчислювальні затрати на його реалізацію. А саме, вектор U_n вибирається колінеарним напряму діаметра множини $\wp_n$ і максимальним за модулем на множині $\mathfrak{U}$. Доведена теорема про збіжність цього алгоритму і отримана оцінка швидкості збіжності при певних умовах [15].

В [12], [18] розв'язувалась задача синтезу керування в умовах невизначеності статичними об'єктами вигляду

$$X_{n+1} = \bar{L}^T \cdot \Gamma_n + l_{m+1} u_n + f_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{65}$$

де Γ_n - вектор відомих (вимірюваних) функцій часу, $L^T = (\bar{L}^T, l_{m+1})$ - $(m + 1)$-мірний вектор невідомих параметрів, для яких задана апріорна оцінка у вигляді (3), причому

$$l_{m+1} > 0, \tag{66}$$

величина x_n вимірюється точно, а збурення f_n задовольняє обмеженню

$$|f_n| \leqslant \delta = \mathrm{const} \quad \forall\, n \geqslant 0. \tag{67}$$

Структуру керування приймемо у вигляді

$$U_n = U_{n-1} + \tilde{U}_n. \tag{68}$$

Остаточно отримаємо модель замкнутої системи

$$X_{n+1} = X_n + \bar{L}^T \cdot \tilde{\Gamma}_n + l_{m+1} \cdot \tilde{U}_n + \tilde{f}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{69}$$

де

$$\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n - \Gamma_{n-1}, \quad \tilde{f}_n = f_n - f_{n-1}. \tag{70}$$

Приймемо, що метою керування є мінімізація цільової функції (функції локальних втрат) вигляду

$$\omega_n = X^2_{n+1}, \tag{71}$$

тобто будемо розв'язувати задачу оптимальної стабілізації системи (69), а отже і (65). Оптимальне стабілізуюче керування шукається з розв'язку задачі

$$\min_{\tilde{U}_n} \; \max_{L \in \varrho_0} \; \max_{f_n \in [-\delta;\delta]} \; (x^2_{n+1}). \tag{72}$$

<u>Теорема 3.</u> Оптимальне керування для задачі (72) і об'єкта (65) має вигляд (68), де $\tilde{U}_n$ є коренем, і притому єдиним, рівняння

$$\tilde{\varphi}(\tilde{U}_n) = 0, \tag{73}$$

де

$$\tilde{\varphi}(\tilde{U}_n) = \max_{L \in \varrho_0}(x_n + \bar{L}^T \tilde{\Gamma}_n + l_{m+1} \tilde{U}_n) + \min_{L \in \varrho_0}(x_n + \bar{L}^T \tilde{\Gamma}_n + l_{m+1} \tilde{U}_n). \tag{74}$$

Із (73) і (74) для випадку відомих параметрів випливає очевидний оптимальний розв'язок для $\tilde{U}_n$, при якому перетворюється в нуль права частина (69), крім члена $\tilde{f}_n$. Коли ж для кожної компоненти l_j є незалежні інтервальні оцінки, тобто множина ϱ_0 є гіперпаралелепіпедом, то оптимальне $\tilde{U}_n$ ідентичне відповідному для випадку відомих значень параметрів, які рівні середнім точкам заданих інтервалів-оцінок. В загальному випадку оптимальне $\tilde{U}_n$ знаходиться чисельно із розв'язку рівняння (73) за допомогою ітераційної процедури, яка значно спрощується тим фактом, що функція $\tilde{\varphi}(\tilde{U}_n)$ є строго монотонно зростаючою [2]. Головні труднощі тут пов'язані з необхідністю розв'язання на кожному кроці ітерації задачі лінійного програмування (згідно з (74)) [13].

Зауважимо, що структура керування у вигляді (68) вибрана згідно з методикою, запропонованою в [6] для випадку, коли адитивне збурення можна представити як розв'язок деякого лінійного різницевого рівняння з відомими коефіцієнтами, але з невідомими початковими умовами. Запропонований підхід до вибору структури стабілізуючого зворотного зв'язку [17] є подальшим узагальненням і розвитком давно і добре відомого в теорії автоматичного керування способу побудови систем керування з так званим астатизмом k-го порядку.

Для підвищення якості керування необхідно в процесі його реалізації одночасно уточнювати множинні оцінки на основі вимірювань, тобто реалізувати процедуру ідентифікації (62). Зауважимо, що для об'єкта (65) множина $\tilde{\Omega}_{n+1}$ являє собою гіперсмугу в просторі параметрів, "ширина" якої прямо пропорційна величині δ в (67). При цьому може бути реалізований найбільш простий режим адаптивного керування, коли на кожному кроці після виміру і отримування уточненої оцінки вектора параметрів Ω_n оцінка з (62) використовується в (74) замість Ω_0 (а фактично замість Ω_{n-1}). Проте в деяких випадках вимірювання може виявитись неінформативним в тому сенсі, що покращення оцінки не відбулося, і маємо

$$\Omega_n = \Omega_{n-1}. \tag{75}$$

<u>Твердження 2</u> [2]. Якщо для об'єкта (65) при керуванні (68), (73), (74), починаючи з деякого n = N, виконується нерівність

$$|X_{n+1}| \leqslant \delta \quad \forall\, n \geqslant N, \tag{76}$$

то процес ідентифікації зупиниться на деякій непокращуваній оцінці, що задовольняє (75).

При адаптивному керуванні об'єктами з невідомими параметрами одночасно існують дві мети: власне керування (наприклад, оптимальна стабілізація) і уточнення оцінок параметрів об'єкта (ідентифікація). Тому в загальному випадку якість адаптивного керування може бути об'єктивно оцінена лише за допомогою векторного критерію якості [2], [18]:

$$\omega_{\Sigma}^{(n)} = \begin{Vmatrix} \omega_n \\ \check{\omega}_n \end{Vmatrix}, \tag{77}$$

де ω_n - скалярна функція, що оцінює власне динамічні якості системи, а $\check{\omega}_n$ - скалярна функція, що оцінює якість розв'язання задачі ідентифікації (при цьому оцінки максимізуються по невизначених факторах).

Задачу векторної оптимізації можна замінити задачею скалярної оптимізації вигляду

$$\min_{U_n \in \Omega} \{\tilde{\omega}^{(n)}_{\Sigma} = \alpha\omega_n + (1 - \alpha)\,\breve{\omega}_n, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}. \tag{78}$$

В залежності від значення α будемо розрізняти три режими роботи синтезованої системи керування [2]:

1) $\alpha = 1$ - режим оптимальної стабілізації (керування знаходиться з умови мінімізації тільки функції локальних втрат);

2) $\alpha = 0$ - режим активної ідентифікації (керування знаходиться з умови мінімізації тільки функції $\breve{\omega}_n$);

3) $0 < \alpha < 1$ - режим дуального керування, в якому на основі досягнутого компромісу одночасно здійснюється забезпечення інтересів стабілізації і адаптації.

Можливий і інший підхід до встановлення компромісу інтересів, коли оптимальне керування знаходиться з умови мінімізації однієї з компонент критерію (77), а із аналізу іншої компоненти визначаються лише додаткові обмеження на керування при розв'язанні цієї задачі мінімізації.

Означення 7. Система, що складається з об'єкта (1), вимірювального пристрою (2) і керуючого пристрою, що синтезує керування з допустимої області вигляду (12) на основі вимірювань, інформації про збурення у вигляді оцінок (7) і оцінок вектора параметрів об'єкта вигляду (3), що уточнюються у відповідності з рекурентною процедурою ідентифікації вигляду (62), називається слабо адаптивною по відношенню до критерію (77), якщо існує такий момент часу $n = n_1$, що виконуються нерівності

$$\omega_n < \omega_0, \quad \breve{\omega}_n < \breve{\omega}_0 \quad \forall\, n \geqslant n_1. \tag{79}$$

Означення 8. Адаптивною будемо називати таку слабо адаптивну систему, для якої у відсутності неконтрольованих збурень виконується умова

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega_n = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \breve{\omega}_n = 0. \tag{80}$$

Означення 9. Сильно адаптивною будемо називати таку адаптивну систему, для якої друга із умов (80) виконується і при наявності неконтрольованих збурень.

Викладений підхід використовувався для синтезу адаптивного керування різними класами об'єктів [16]-[21]. В роботах [19], [20] розглядались лінійні динамічні об'єкти, зокрема нестійкі і немінімально-фазові, а в роботі [17] і такі, що містять чисте запізнювання.

Нові результати для них аналогічні отриманим для статичних об'єктів (отримані аналоги теореми 3 про оптимальне керування, а також твердження про властивості замкнутої адаптивної системи керування). В роботах [16], [21] розглядалась задача адаптивного керування екстремальним об'єктом, що складається з лінійної стаціонарної динамічної частини з відомими параметрами і вимірювача значень квадратичної функції локальних втрат з невідомими параметрами (в загальному випадку нестаціонарними, але з обмеженою швидкістю їх зміни).

В [22] були введені математичні моделі об'єктів у вигляді матричних різницевих рівнянь, аналогічних по формі (1), але з відповідними матрицею стану об'єкту X_n і матрицею керування U_n. Наприклад, до цього класу належать матричні ітераційні алгоритми розв'язання дискретних матричних рівнянь Ляпунова, Ріккаті і їх узагальнень [23] (зауважимо, що узагальнення рівняння Ріккаті було вперше отримане в [5], [4]). До них також відносяться матричні алгоритми керування спектральними характеристиками випадкових процесів [24] [28]. В [2] наведено метод синтезу адаптивних матричних ітераційних алгоритмів керування такими об'єктами для випадку, коли відомі множинні оцінки елементів матриць їх параметрів.

Задача оптимальної стабілізації на основі функції локальних втрат (або в порівнянні з еталонною моделлю [19]) узагальнювалась на випадок оцінки якості динаміки системи за допомогою сумарного функціоналу [34].

Проблеми дискретного керування за допомогою засобів цифрової техніки неперервним рухом динамічного об'єкта. Як вже зазначалося раніше, розгляд математичної моделі об'єктів у вигляді (1) зумовлений застосуванням обчислювальної техніки для реалізації систем керування, коли вимірювання і зміна керування здійснюються в дискретні моменти часу [17], [29]-[33]. Якщо для лінійних систем із зосередженими параметрами ця побудова здійснюється відносно просто [29]-[31], зокрема і при наявності в об'єкті чистого запізнення [17], то для систем з розподіленими параметрами все значно ускладнюється [32].

Розглянемо той клас об'єктів з розподіленими параметрами, рух яких при $t > t_n$ ($t_n = nT$ - момент часу початку n-го такту керування, T - тривалість такту керування) описується інтегральним рівнянням вигляду

$$x(R, t) = \int_{R_1}^{R_N} \tilde{a}(R, \rho, t - t_n)\, x(\rho, t_n)\, d\rho + \tilde{\lambda}(R, t) +$$
$$+ \int_{t_n}^{t} \int_{R_1}^{R_N} \tilde{b}(R, \rho, t - \tau)\, u(\rho, \tau)\, d\rho d\tau, \quad R \in [R_1, R_N], \tag{81}$$

де $x(R, t)$ - скалярна двомірна функція, що характеризує стан об'єкта; $u(R, t)$ - розподілене скалярне керування; $\tilde{\lambda}(R, t)$ - розподілене зовнішне неконтрольоване збурення; $\tilde{a}(R, \rho, t - t_n)$ і $\tilde{b}(R, \rho, t - \tau)$ - скалярні ядра інтегральних перетворень; R_1 і R_N - деякі числа. В рівнянні (81) функція $x(\rho, t_n)$ ($\rho \in [R_1, R_N]$) характеризує стан об'єкта в момент часу t_n ($x(R, 0) = x^{(0)}(R)$ - початковий стан об'єкта), а $x(R, t)$ ($t > t_n$, $R \in [R_1, R_N]$) - подальший стан об'єкта в процесі руху. Зауважимо, що це рівняння є адекватною математичною моделлю динаміки різноманітних об'єктів керування з розподіленими параметрами, зокрема при керуванні, наприклад, тепловими і дифузійними процесами. Воно може бути формально представлене у вигляді змішаного двомірного інтегрального рівняння Вольтерра-Фредгольма, з обмеженою областю зміни просторового аргументу R і необмеженою областю зміни часового аргументу t, якщо використати під знаком подвійного інтеграла ядро, що міститиме дельта-функцію вигляду $\delta(\tau - t_n)$.

Припустимо, що цифрове розподілене керування має вигляд

$$u(R, t) = u_n \cdot \bar{u}(R) \text{ при } t \in (t_n, t_{n+1}], \ t_n = nT, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{82}$$

де $\bar{u}(R)$ - деяка задана скалярна функція просторового аргументу, що може містити в загальному випадку дельта-функції, але така, що існує обмежена функція

$$\check{b}(R) = \int_0^T \int_{R_1}^{R_N} \tilde{b}(R, \rho, T - \tau)\, \bar{u}(\rho)\, d\rho d\tau, \tag{83}$$

а u_n - власне дискретне керування, постійне на інтервалі дискретності за часом $(t_n, t_{n+1}]$. Тоді отримаємо із (81), що при $t_n = t_{n+1}$

$$x(R, t_{n+1}) = \int_{R_1}^{R_N} \tilde{a}(R, \rho, T)\, x(\rho, t_n)\, d\rho + \check{b}(R)\, u_n + \tilde{\lambda}(R, t_{n+1}).$$

Позначимо

$$x_n(R) = x(R, t_n), \quad \lambda_n(R) = \tilde{\lambda}(R, t_{n+1}). \tag{84}$$

Тоді отримаємо інтегрорізницеве рівняння, що є точною математичною моделлю процесу керування об'єктом з розподіленими параметрами (81):

$$x_{n+1}(R) = \int\limits_{R_1}^{R_N} \tilde{a}(R, \rho, T)\, x_n(\rho)\, d\rho + \check{b}(R)\, u_n + \lambda_n(R), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$R \in [R_1, R_N], \; x_0(\rho) = x^{(0)}(\rho), \quad \rho \in [R_1, R_N]. \tag{85}$$

З (85) видно, що знання початкового стану об'єкта $x^{(0)}(\rho)$ і збурення $\lambda_n(R)$ дозволяє для заданих $\tilde{a}(\cdot)$ і $\check{b}(\cdot)$ розрахувати подальший рух об'єкта, залежно від значень дискретного керування u_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Це означає, що можна ставити задачу знаходження такої послідовності керувань u_n, щоб перевести об'єкт з відомого початкового стану $x(R, t_n) = x^{(1)}(R)$ в інший стан $x^{(2)}(R)$ з заданою точністю. В [32] доведено твердження про умови керованості такого об'єкта, аналогічні твердженню про керованість цифрових замкнутих систем для випадку об'єктів з зосередженими параметрами.

Будемо вважати, що в об'єкта (81) є скалярний вихід $y(t)$, який вимірюється в дискретні моменти часу $t = t_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), і зв'язок між цим виходом і функцією стану об'єкту задається інтегральним співвідношенням

$$y(t_n) = \int\limits_{R_1}^{R_N} \tilde{c}(\rho)\, x(\rho, t_n)\, d\rho + \psi(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{86}$$

де $\tilde{c}(\rho)$ - ядро даного співвідношення, що в загальному випадку містить дельта-функції, а $\psi(t_n)$ - скалярні похибки вимірювань. Тоді, при відсутності шумів ($\psi(t_n) = 0$ і $\lambda(R, t) = 0$), можна ставити задачу про відновлення з достатньою точністю функції стану системи $x(R, t_n)$ ($R \in [R_1, R_2]$) по виміряних в дискретні моменти часу значеннях скалярного виходу $y(t_n)$ і відомих керуваннях u_n на вході.

В [32] були встановлені умови розв'язання даної задачі, аналогічні твердженню про спостережуваність цифрових замкнутих систем з зосередженими параметрами.

Точна математична модель системи у вигляді інтегрорізницевого рівняння (85), що описує рух об'єкта (81) (в дискретні моменти часу) під дією керування (82), спільно з інтегральним співвідношенням (86), що описує формування скалярного виходу об'єкта з розподіленими параметрами, є досить складна і її важко безпосередньо використовувати для розв'язку конкретних задач керування. Тому доцільно використати наближені апроксимаційні моделі, що дозволяють отримати опис у вигляді системи звичайних різницевих рівнянь.

Для цього спершу використаємо методику представлення розв'язку у вигляді функціонального ряду. Справедлива наступна теорема [32].

Теорема 4. Нехай параметри об'єкта (81), його початковий стан, діючі на нього збурення і просторова структура цифрового розподіленого керування такі, що справедливі співвідношення

$$\left\{\begin{aligned} & \tilde{x}_0(R) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{i,0}\varphi_i(R), \quad R \in [R_1, R_N], \quad m = \text{const}, \\ & \int_{R_1}^{R_N} \tilde{a}(R, \rho, T)\varphi_j(\rho)d\rho = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij}\varphi_i(R), \quad j = \overline{1,m}, \quad R \in [R_1, R_N], \\ & \tilde{b}(R) = \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i\varphi_i(R), \quad R \in [R_1, R_N], \\ & \tilde{\lambda}_n(R) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_{i,n}\varphi_i(R), \quad R \in [R_1, R_N], \end{aligned}\right. \tag{87}$$

де $\tilde{x}_{i,0}$, $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ $(i, j = \overline{1,m})$ – деякі константи; $\tilde{\lambda}_{i,n}$ $(i = \overline{1,m})$ – деякі функції дискретного часу, а $\varphi_i(R)$ $(i = \overline{1,m}, R \in [R_1, R_N])$ – деяка послідовність функцій.

Тоді функція стану об'єкта (81) при цифровому керуванні (82) в довільний дискретний момент часу $t = t_n$ може бути представлена у вигляді

$$x_n(R) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{i,n}\varphi_i(R), \tag{88}$$

де $\tilde{x}_{i,n}$ $(i = \overline{1,m})$ – функції лише дискретного часу, що задовольняють системі звичайних різницевих рівнянь

$$\tilde{x}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{ij}\tilde{x}_{j,n} + \bar{b}_i u_n + \tilde{\lambda}_{i,n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{1,m}, \tag{89}$$

а скалярний вимірюваний вихід, що формується згідно з співвідношенням (12), набуває вигляду

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} \bar{c}_i\tilde{x}_{i,n} + \psi_n, \tag{90}$$

де

$$\bar{c}_i = \int_{R_1}^{R_N} \tilde{c}(\rho)\varphi_i(\rho)\, d\rho. \tag{91}$$

Зауважимо, що, як випливає з другого співвідношення в (87), функції $\varphi_i(R)$ є в загальному випадку лінійними комбінаціями власних функцій ядра $\tilde{a}(R, \rho, T)$. Тому для застосування цієї методики необхідно, щоб ці власні функції складали таку послідовність, що побудований на її основі функціональний ряд міг за допомогою вибору коефіцієнтів цього ряду бути добрим наближенням довільної функції з деякого класу на інтервалі $[R_1, R_N]$. В більшості випадків умови (87) виконуються для скінченних m лише наближено, а тому модель (89), (90) є наближеною апроксимаційною і синтез на її основі є втіленням відомого принципу керування першими "модами" об'єкта з розподіленими параметрами.

Другий метод отримання апроксимаційної моделі використовує заміну в (85) інтеграла скінченною сумою

$$\int_{R_1}^{R_N} \tilde{a}(R_i, \rho, T)\, x_n(\rho)\, d\rho \simeq \sum_{j=1}^{N} \check{a}_{ij} x_n(R_j), \quad i = \overline{1,N}, \tag{92}$$

де $R_i (i = \overline{1,N})$ - фіксовані точки на інтервалі $[R_1, R_N]$ (тобто вузли інтерполяції), $\check{a}_{ij}$ - коефіцієнти, залежні від $\tilde{a}(R_i, \rho, T)$ і вигляду формули, що застосовується для наближеного обчислення визначеного інтеграла (формул прямокутників чи трапецій, Сімпсона або ін.); $(N - 1)$ - число підінтервалів, на які розбивається інтервал $[R_1, R_N]$ (в загальному випадку ці проміжки можуть бути нерівними, зокрема на основі апріорної інформації про ступінь нерівномірності за простором функції стану даний інтервал може бути поділений на декілька підінтервалів, в кожному з яких використовується свій крок інтегрування). При цьому аналогічно здійснюються заміни в (86):

$$\int_{R_1}^{R_N} \tilde{c}(\rho)\, x_n(\rho)\, d\rho \simeq \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i x_n(R_i), \tag{93}$$

а отже,

$$y_n \simeq \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i x_n(R_i) + \varphi_n, \tag{94}$$

де $\tilde{c}_i$ - коефіцієнти, що залежать від $\tilde{c}(\rho)$ і вигляду формул, що застосовуються для наближеного інтегрування. Вважається, що в (92) і (93) використовуються одні і ті ж вузли інтерполяції $R_i (i = \overline{1,N})$.

Позначивши

$$\check{x}_{i,n} = x_n(R_i), \quad \check{b}_i = b(R_i), \quad \check{\lambda}_{i,n} = \tilde{\lambda}_n(R_i), \tag{95}$$

перейдемо до системи різницевих рівнянь, що являють собою апроксимаційну модель руху системи [32].

<u>Теорема 5.</u> Нехай для деякого класу функцій $x_n(R)$ $(R \in [R_1, R_N])$, ядер інтегральних співвідношень $\tilde{a}(R, \rho, T)$ в (85) і $\tilde{c}(\rho)$ в (86) при конкретному виборі вузлів інтерполяції $R_i \in [R_1, R_N]$ $(i = \overline{1,N})$ і вигляді формули, що застосовується для наближеного обчислення визначе-

них інтегралів в (92) і (93) (тобто при певних значеннях коефіцієнтів $\breve{a}_{ij}$ і $\tilde{c}_{ij}(i,j = \overline{1,N})$), співвідношення (92) і (93) виконуються з достатньою точністю, рівномірно на виділеному класі функцій $x_n(R)$.

Тоді, якщо початковий стан і параметри об'єкта керування, збурення і множина допустимих керувань (що використовуються при синтезі в подальшому) такі, що розв'язки інтегрорізницевого рівняння (85) належать даному класу функцій, то перехід системи від n-го до (n+1)-го стану з точністю того ж порядку описується системою різницевих рівнянь вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} \breve{x}_{i,n+1} &= \sum_{j=1}^{N} \breve{a}_{ij}\breve{x}_{j,n} + \breve{b}_i u_n + \breve{\lambda}_{i,n}, \quad i = \overline{1,N}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \dots, \\ y_n &= \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i \breve{x}_{i,n} + \psi_n, \quad \breve{x}_{i,0} = x^{(0)}(R_i), \quad R_i \in [R_1, R_N], \end{aligned} \right. \qquad (96)$$

де фазові координати $\breve{x}_{i,n}$, введені згідно з (95), утворюють N-мірний вектор стану системи.

Важливою проблемою при синтезі цифрового керування є вибір оптимальної частоти квантування за часом. В [29] на прикладі задачі лінійно-квадратичного синтезу досліджувалась залежність якості керування від тривалості такту керування - T, було здійснено граничний перехід - T → 0 (при цьому дискретне матричне рівняння Ріккаті перетворилось в звичайне матричне рівняння Ріккаті). Показано, що крім вимоги мінімізації затрат енергетичних ресурсів на здійснення процесу керування, суттєвим є також і вимога мінімізації "інформаційних" витрат на керування, пов'язаних із збільшенням навантаження на обчислювальну техніку (що реалізує алгоритм керування) при зменшенні T.

В роботі [30] була викладена методика розв'язку проблеми структурних обмежень, коли не всі компоненти вектора стану вихідної моделі об'єкта доступні для безпосереднього вимірювання і, отже, не всі можуть використовуватись для формування керування. Було запропоновано при складанні математичної моделі у вигляді різницевих рівнянь вибирати такий вигляд фазового простору, щоб вектор стану був складений лише із значень вимірюваних координат в різні моменти часу, тобто виміряних як у розглядуваний момент часу, так і в попередні моменти. Раніше виміряні значення координат при цьому можуть зберігатись в запам'ятовуючому пристрої.

ВИСНОВКИ

Таким чином, започатковано і сформовано новий науковий напрямок в теорії адаптивних систем керування і прикладній математиці, а також отримані важливі прикладні результати для задач керування за допомогою цифрової техніки різноманітними класами об'єктів. При цьому можна виділити такі основні результати.

1. Розроблено новий підхід до постановки і розв'язання задач теорії керування і прикладної математики, що грунтується на теоретико-множинних моделях невизначеності. Вперше (в 1979 р. в співавторстві з В.М.Кунцевичем) запропоновано і використано множинні оцінки параметрів об'єкта і збурень для розв'язку задач ідентифікації і керування.

2. Введено формалізоване означення поняття невизначеного процесу, що використовує множинні оцінки його значень в різні моменти часу. При цьому використані стійкі характеристики невизначеного процесу, аналогічні такій характеристиці випадкового процесу, як кореляційна функція.

3. Введено означення розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь як множини в просторі змінних, коли для коефіцієнтів і правої частини системи задані лише апріорні оцінки у вигляді множин в просторі параметрів. Розроблено конструктивний алгоритм знаходження цього розв'язку.

4. Розв'язана в новій постановці класична задача прикладної математики - задача апроксимації числових даних функціональним рядом.

5. На основі запропонованого формалізму розроблена методика структурної ідентифікації об'єктів керування (тобто вибір кількості і складу членів функціонального ряду в задачі апроксимації).

6. Розроблені методи параметричної ідентифікації і адаптивного керування з використанням множинних оцінок невизначених факторів. На основі запропонованих методів розроблена методика побудови алгоритмів керування, які дозволяють отримувати гарантовані результати навіть при найгірших екстремальних обставинах.

7. Побудовані ефективні алгоритми ідентифікації і керування в умовах невизначеності для статичних і лінійних динамічних об'єктів, а також об'єктів екстремального керування.

8. Введені математичні моделі об'єктів у вигляді матричних різницевих рівнянь, де фігурують матриця стану і матриця керування. Для такого класу об'єктів розроблені методи синтезу матричних алгоритмів

керування.

9. Побудовані математичні моделі дискретного керування динамічними об'єктами з чистим запізненням і з розподіленими параметрами, досліджена їх керованість і спостережуваність, розроблені методики побудови спрощених апроксимуючих математичних моделей замкнутих систем такого типу.

10. Запропонована методика вибору величини тривалості такту цифрового керування і розв'язання проблеми структурних обмежень на вимірювання вектора стану динамічного об'єкта.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах.

1. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Об оптимальном и адаптивном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности //Автоматика и телемеханика. - 1979. - № 1. - С.79-88.
2. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход - Киев: Наук. думка, 1985. -245 с.
3. Kuntzevich V.M., Lychak M.M. Guaranteed Estimates Adaptation and Robustness in Control Systems. - Berlin: Sprin. - Verl., - 1922. - 209 p. - (Lecture Notes in Controle and Information Sciences, № 169).
4. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Об одной игровой задаче управления и синтезе субоптимальных дискретных систем управления нелинейными объектами одного класса //Автоматика и телемеханика. - 1975. - № 11. - С.45-51.
5. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез дискретных систем управления при постоянно действующих ограниченных по модулю возмущениях // Автоматика и телемеханика. - 1977. - № 9. - С.58-67.
6. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. - М.: Наука, 1977. - 400 с.
7. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Об оптимальном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности //Автоматика. - 1978. - № 4. - С.35-45.
8. Лычак М.М. Обобщенная дисперсионная функция случайных возмущений и множественные оценки значений шумов //Автоматика. - 1987. - № 1. - С.31-36.
9. Лычак М.М. О решении задачи структурной параметрической идентификации (дискретной аппроксимации) в условиях неопределенности //Автоматика. - 1990. - № 6. - С.72-77.
10. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Разностные уравнения эволюции множеств

и устойчивости их решения //Докл. АН СССР. - 1982. - 269, № 3. - С.547-549.

11. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Элементы теории эволюции множеств и устойчивости этих процессов //Кибернетика. - 1983. - № 1. - С.105-111.
12. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никитенко А.С. Решение системы линейных уравнений при наличии неопределенности в ее обеих частях //Кибернетика. - 1988. - № 4. - С.47-52.
13. Лычак М.М. Итерационный алгоритм решения задачи линейного программирования //Автоматика. - 1990. - № 1. - С.42-54.
14. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации //Автоматика. - 1982. - № 4. - С.49-59.
15. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никитенко А.С. Активная идентификация параметров линейного статического объекта (игровая задача планирования эксперимента) //Автоматика и телемеханика. - 1987. - № 9.- С.68-76.
16. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Игровые системы адаптивного управления //Кибернетика и вычисл. техника. - 1982. - Вып.56. - С.3-13.
17. Лычак М.М. Цифровое управление линейным динамическим объектом с запаздыванием // Там же. - 1990. - Вып.87. - С.39-46.
18. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Адаптивное управление статическими объектами с неизвестными и переменными во времени параметрами // Там же. - 1981. - Вып.53. - С.31-39.
19. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Адаптивное управление линейными неустойчивыми и неминимально-фазовыми объектами //Автоматика и телемеханика. - 1985. - № 2. - С.108-117.
20. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимального управления динамическими объектами с неизвестными параметрами //Автоматика.- 1980. - № 2. - С.22-32.
21. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Экстремальное управление объектами с нестационарными параметрами //Кибернетика и вычисл. техника. - 1986. - Вып.71. - С.28-33.
22. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Анализ и синтез систем управления, описываемых одним классом разностных матричных уравнений //Автоматика и телемеханика. - 1980. - № 7. - С.78-86.
23. Кунцевич В.М., Лычак М.М. О решении дискретных матричных уравне-

ний Ляпунова, Риккати и их обобщений //Кибернетика. - 1980. - № 3. - С.13-18.

24. А.с. 763847 СССР, МКИ G 05 В 11/00. Цифровой регулятор / В.М.Кунцевич, М.М.Лычак. - Опубл. 15.09.80, Бюл. № 34.
25. Лычак М.М., Зелык Я.И., Борисенко А.И. Матричный алгоритм управления при наличии ограничений на управляющие воздействия //Кибернетика и вычисл. техника. - 1985. - Вып.67. - С.46-47.
26. Сходимость матричного стохастического алгоритма управления статическим объектом при ограничениях на управления /А.И.Борисенко, Я.И.Зелык, В.М.Кунцевич, М.М.Лычак //Автоматика. - 1985. - № 2. - С.43-51.
27. АСУ акустическими испытаниями /А.И.Борисенко, Я.И.Зелык, В.М.Кунцевич, М.М.Лычак //Управляющие системы и машины. - 1987. - № 4. - С.115-119.
28. Матричные алгоритмы управления и идентификации в системе воспроизведения спектральных характеристик случайных процессов /А.И.Борисенко, Я.И.Зелык, М.М.Лычак, А.И.Савенков, В.Й.Яковлев //Автоматика. - 1991. - № 1. - С.3-8.
29. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимального управления, реализуемого на ЦВМ, и выбор оптимальной частоты квантования по времени //Автоматика и телемеханика. - 1980. - № 5. - С.57-64.
30. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Сукенник А.А. Об одной математической модели дискретных систем управления, снимающей проблему структурных ограничений //Кибернетика и вычисл. техника. - 1980. - Вып.49 - С.19-23.
31. Лычак М.М. Математические модели процесса цифрового управления динамическим объектом //Там же. - 1989. - Вып.83. - С.14-22.
32. Лычак М.М. Цифровое управление объектами с распределенными параметрами //Автоматика. - 1989. - № 4. - С.3-10.
33. Бровдий Н.К., Лычак М.М., Платова Е.Л. Математическое описание управляемого процесса нагрева //Кибернетика и вычисл. техника. 1989. - Вып.83. - С.86-90.
34. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) //Автоматика.- 1987.- № 5. - С.16-26.

Підп. до друку 16.02.93. Формат 60×84/16. Папір кн.-журн. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,98. Обл.-вид. арк. 2,0. Тираж 100. Зам. 252.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40