АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ВОРОБЙОВА АЛЛА ІВАНІВНА

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ ДЕЯКИХ ХВИЛЬОВИХ І ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

01.01.03 - математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ - 1993

Роботу виконано в Інституті математики АН України та на кафедрі алгебри і геометрії Київського державного педагогічного інституту імені М.П.Драгоманова.

Науковий керівник : член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор ФУЩИЧ В.І.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор БАРАННИК А.Ф., кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник ЦИФРА І.М.

Провідна організація : Київський державний університет імені Т.Г.Шевченка.

Захист відбудеться "____" ______________ 199 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "___" ______________ 199 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Лучка А.Ю.

<u>Актуальність теми</u>. В останні десятиріччя інтенсивно розвиваються теоретико-алгебраїчні методи, які з успіхом застосовуються для дослідження рівнянь математичної фізики та побудови математичних моделей з заданими симетрійними властивостями. Особливу актуальність методи симетрійного аналізу набувають у зв'язку з розглядом тих багатовимірних нелінійних рівнянь, для розв'язування яких неможливо застосувати класичні методи математичної фізики.

Математичний апарат, який дозволяє ефективно розв'язувати задачі групової класифікації, почав інтенсивно розроблятися порівняно недавно /Г.Біркгоф, Л.Овсянніков, Н.Ібрагімов, Р.Андерсон, Дж.Блумен, П.Олвер та інші/. Останнім часом розвинено нові методи симетрійного аналізу, які дозволяють виявити додаткову симетрію диференціальних рівнянь в частинних похідних /ДРЧП/.

Дисертація присвячена дослідженню симетрії та побудові широких класів точних розв'язків деяких важливих, з точки зору прикладних застосувань, рівнянь математичної фізики, дослідженню їх умовної та Q -умовної симетрії. Такими рівняннями є, наприклад, рівняння гіперболічного типу. До останнього часу недостатньо вивчені симетрійні властивості основних рівнянь теорії фільтрації, особливо це стосується рівнянь нестаціонарної нелінійної фільтрації /П.Я.Полубаринова-Кочіна, В.М.Ентов/.

<u>Мета роботи</u>. Провести теоретико-алгебраїчний аналіз рівнянь гіперболічного типу другого порядку. Дослідити симетрійні властивості рівнянь теплопереносу, нестаціонарної фільтрації та побудувати їх точні розв'язки.

<u>Методика дослідження</u>. Для вивчення симетрійних власти-

востей диференціальних рівнянь в частинних похідних /ДРЧП/ використано: теорію груп Лі, теорію представлень і алгебр Лі, концепцію умовної симетрії. Застосовано також і інші методи теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна і практична цінність роботи.

1. Розв'язана задача групової класифікації ДРЧП другого порядку відносно розширеної групи Пуанкаре та її підгруп.
2. Проведений груповий аналіз нелінійного хвильового рівняння, яке є інваріантним відносно підалгебр конформної алгебри, які не містять операторів трансляції, а також досліджено Q -умовну симетрію отриманих рівнянь.
3. Досліджені групові властивості систем ейкональних рівнянь і систем нелінійних рівнянь четвертого порядку.
4. Для рівняння Клейна-Гордона-Фока /КГФ/ знайдено оператори умовної симетрії і отримані нові анзаци, які редукують це рівняння до звичайних диференціальних рівнянь /ЗДР/.
5. Оператори умовної симетрії використані для побудови анзаців нелінійних рівнянь теплопереносу.
6. За допомогою одержаних анзаців проведена редукція рівнянь теплопереносу до ЗДР, знайдені нові точні розв'язки.
7. Досліджена Q -умовна симетрія рівнянь нестаціонарної фільтрації, побудовані деякі точні розв'язки, зокрема розв'язки рівняння, яке описує рух термодинамічного ідеального газу.

Основні результати дисертації є новими. Вони можуть бути використані для розв'язування прикладних задач математичної фізики, електродинаміки та гідродинаміки.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики АН України та на звітно-наукових конференціях кафедр Київського державного педагогічного інституту імені М.П.Драгоманова і Миколаївського державного педагогічного інституту.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1 - 7].

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури, що містить 79 найменувань. Обсяг роботи - 115 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність розглядуваних задач, подано короткий огляд робіт за темою дисертації. Наведені необхідні означення та обгрунтовано методи, що використовуються в дисертації.

Перший розділ присвячено дослідженню теоретико-алгебраїчних властивостей та побудові багатопараметричних класів точних розв'язків рівнянь другого порядку гіперболічного типу.

В першому параграфі досліджено симетрію квазілінійного рівняння в частинних похідних другого порядку

$$\psi^{\mu\nu}(x, u, \underset{1}{u})\, u_{\mu\nu} = m \qquad /1/$$

відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D \rangle$, базисні оператори якої мають вигляд

$$P_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \qquad /2/$$

а оператор D , який відповідає масштабним перетворенням, задається за допомогою двох різних зображень

$$D_1 = x_\nu P^\nu + kU\frac{\partial}{\partial U},$$

$$D_2 = x_\nu P^\nu + i\varkappa\frac{\partial}{\partial U}, \quad \varkappa \neq 0, \qquad /3/$$

/тут і надалі за індексами, що повторюються, маємо на увазі підсумовування/.

<u>Теорема 1</u>. Рівняння /1/ інваріантне відносно алгебри Лі $A\tilde{P}(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1\rangle$ тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне рівнянням

а/ $$\varphi^1(u)\tau^{-1}\Box u + \varphi^2(u)\tau^{-2}u^\nu u^\mu u_{\mu\nu} = m,$$

$$k=0, \quad \tau = u_i u^i = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - \ldots - u_n^2;$$

б/ $$f^1(\tau)u\Box u + f^2(\tau)uu^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = m,$$

$$k=1, \quad \tau = u_i u^i, \quad i = \overline{0,n},$$

$$u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} g^{\nu\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu};$$

в/ $$u^{\frac{2-k}{k}}\Phi^1(w)\Box u + u^{\frac{4-3k}{k}}\Phi^2(w)u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = m,$$

де $w = \left(\frac{\tau u^{1/k}}{2(1-k)}\right), \quad k \neq 0,1, \quad \tau = u_i u^i, \quad i = \overline{0,n}.$

Теорема 2. Рівняння /I/ інваріантне відносно алгебри Лі $A\tilde{P}(1,n)=\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_2\rangle$ тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне рівнянню

$$\Phi^1(\theta)(u_\nu u^\nu)^{-1}+\Phi^2(\theta)(u_\nu u^\nu)^{-2}u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=m,$$

де

$$\theta=\sqrt{u_\nu u^\nu}\exp\frac{u}{\varkappa}, \quad \varkappa-const, \ \varkappa\neq 0.$$

В цьому ж параграфі побудовані рівняння вигляду /I/, які є інваріантними відносно однопараметричних підгруп групи Пуанкаре P $(1, 3)$ /або, що рівносильно, відносно одновимірних підалгебр алгебри AP $(1; 3)$/.

§ 2 присвячений груповій класифікації нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u + F(x, u, \underset{1}{u})=0 \qquad /4/$$

де $u=u(x), \ x=(x_0\equiv t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$

$$\underset{1}{u}=(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu},$$

$F(x, u, \underset{1}{u})$ - деяка гладка функція від x, u, $\underset{1}{u}$.

Теорема 3. Для того, щоб нелінійне хвильове рівняння /4/ було інваріантне відносно алгебри $A_1=\langle J_{\mu\nu}, D\rangle$, необхідно і досить, щоб воно мало наступний вигляд :

$$\Box u = u^{\frac{n+2}{n-2}}\Phi(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$
$$n\geq 3$$

де

$$\tau_1 = \frac{(x_\mu x^\mu)^{\frac{2-n}{4}}}{U}, \quad \tau_2 = \frac{x_\mu U_\mu}{U}, \quad \tau_3 = \frac{(U_\mu U^\mu)^{\frac{n-2}{2+n}}}{U}.$$

В третьому параграфі досліджено лівську і Q -умовну симетрію рівняння

$$\Box U + U^{\frac{n+2}{n-2}} \varphi\left(\frac{(x_\nu x^\nu)^{\frac{2-n}{2}}}{U}\right) = 0. \qquad /5/$$

Тут φ - довільна гладка функція.

В § 4 встановлено умови, за яких шість ейкональних рівнянь

$$\frac{\partial E_a}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial x^\mu} = \lambda_1, \quad a = 1,2,3,$$
$$\frac{\partial H_a}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial H_a}{\partial x^\mu} = \lambda_2, \quad \mu = 0,1,2,3,$$

для векторів $\vec{E}(E_1, E_2, E_3)$, $\vec{H}(H_1, H_2, H_3)$, $E_a = E_a(x_0, \vec{x})$, $H_a = H_a(x_0, \vec{x})$ є інваріантними відносно групи Пуанкаре P $(1, n)$ і конформної групи C $(1; n)$.

Проведено груповий аналіз наступних систем рівнянь:

$$\lambda_1 \Box \vec{E} + \lambda_2 \Box\Box \vec{E}(x_0, x) = 0,$$
$$\lambda_1 \Box \vec{H} + \lambda_2 \Box\Box \vec{H}(x_0, x) = 0, \qquad /6/$$

$$\frac{\partial W^1}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial W^1}{\partial x^\mu} = 0,$$
$$\frac{\partial W^2}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial W^2}{\partial x^\mu} = 0, \qquad /7/$$

де $W^1 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2$, $W^2 = (\vec{E}, \vec{H})$ - інваріанти електромагнітного поля.

Зокрема, доведено, що при $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = 1$, максимальною групою інваріантності рівняння /5/, за умови

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial F_b}{\partial x^\mu} = 0, \quad a \neq b, \qquad /6/$$

де $\vec{F} = (F_1 = E_1,\ F_2 = E_2,\ F_3 = E_3,\ F_4 = H_1,\ F_5 = H_2,\ F_6 = H_3)$

$(a, b = \overline{1,6},\ \mu = \overline{0,3})$, є 67-параметрична група Лі C (1.9) з базисними елементами, які задовольняють комутаційні співвідношення конформної алгебри AC (1.9).

У другому розділі досліджено умовну симетрію рівняння КГФ і нелінійних рівнянь теплопереносу.

<u>Теорема 4</u>. Рівняння КГФ

$$g^{\mu\nu} U_{\mu\nu} = -m^2 U, \quad m - const, \qquad /9/$$

умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = x_a \partial_a + \frac{r}{v} \partial_0 + (1 - \lambda r) U \partial_U \qquad /10/$$

при умові $J_{ab} U = 0$, $J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a$, $\overline{a, b = 1,3}$.

В § 6 досліджена симетрія, проведена редукція і отримані точні розв'язки хвильових рівнянь з додатковими умовами типу

$$L_a U = 0,$$

де

$$L_1 = x_\mu P_\mu + \alpha U P_U, \quad L_2 = J_{\mu\nu} J_{\mu\nu}. \qquad /11/$$

В § 7 розглянуто нелінійне рівняння теплопереносу

$$u_0 + u_{aa} = \frac{1}{r}\Phi(w, ur), \qquad /12/$$

де

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $w = r \pm v x_0$, v - довільний параметр.

За допомогою анзацу

$$u = \frac{1}{r}\varphi(w), \quad w = r + v x_0,$$

який породжується оператором

$$Q = x_a \partial_a - \frac{r}{v}\partial_0 - u\partial_u , \qquad /13/$$

рівняння /12/ редукується до ЗДР.

Зауважимо, що оператор Q /13/ не належить до алгебри симетрії /у розумінні Лі/ рівняння /12/.

<u>Теорема 5</u>. Рівняння /12/ умовно інваріантне відносно оператора Q /13/ за умови, що

$$J_{ab} u = 0, \quad a, b = 1,2,3.$$

В цьому ж параграфі досліджена також симетрія нелінійного рівняння теплопереносу вигляду

$$H(u)u_0 + \Delta u = F(u). \qquad /14/$$

знайдені оператори умовної симетрії рівняння /14/.

<u>Теорема 6</u>. Нелінійне рівняння теплопереносу /14/ умовно інваріантне відносно операторів $\langle AO(n), Q \rangle$, якщо:

1/ $H(u) = \lambda_1 u^{\frac{2}{2-n}} + \lambda_2$, $F(u) = \lambda_3 u^{\frac{4-n}{2-n}}$,

$$Q = \lambda_2 \vec{x}^2 \partial_0 + (4-n)x_a\partial_a + (4-n)(2-n)u\partial_u$$

$$\lambda_2 \neq 0, \quad n \neq 2,4;$$

2/ $H(U)=\lambda_1 \exp U+\lambda_2$, $F(U)=\lambda_2 \exp U$, $n=2$,

$$Q_2=\lambda_2 \vec{x}^2 \partial_0+2x_a \partial_a+4\partial_u, \quad \lambda_2 \neq 0;$$

3/ $H(U)=\dfrac{\lambda_1}{U}$, $F(U)=\lambda_2$, $n=4$,

$$Q=\vec{x}^2 \partial_0+x_a \partial_a-2U\partial_u,$$

4/

$$Q(U)=\frac{1}{4}, \quad F(U)=\frac{1}{U}(\lambda_1 U+\lambda_2),$$

$$Q=\partial_0+\frac{n}{\vec{x}^2}Ux_a\partial_a+(\lambda_1 U+\lambda_2)\partial_u,$$

5/

$$\Phi(U)=1, \quad F(U)=\lambda U\ln U,$$

$$Q_5=x_a\partial_a+\frac{\lambda_2}{2}\vec{x}^2 U\partial_u,$$

6/

$$\Phi(U)=1, \quad F(U)=B(U),$$

$$Q_6=x_a\partial_a+B(U)\partial_u, \quad B\ddot{B}=2(\dot{B}+n)$$

Редукція рівнянь теплопереносу, яка здійснюється за допомогою побудованих анзаців, дозволяє будувати нові точні розв'язки цих рівнянь.

У третьому розділі вивчені симетрійні властивості і побудовані нові класи точних розв'язків нелінійного рівняння нестаціонарної фільтрації

$$H(U)U_0+U_{11}+\frac{N}{x_1}U_1=F(U), \qquad /15/$$

$$U=U(x_0,x_1),$$

де

$$U_0=\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad U_1=\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad U_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad N\text{-const}.$$

В § 8 досліджена умовна симетрія рівняння /15/ для $N \neq 0$.

<u>Теорема 7</u>. Рівняння /15/ Q -умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u \qquad /16/$$

тоді і тільки тоді, коли функції A, B, C задовольняють наступні системи рівнянь:

I. $A \neq 0$ /не зменшуючи загальності покладемо $A = 1$/

$$B_{uu} = 0, \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + HBB_u) - \frac{N}{x_1}B_u,$$

$$3B_uF = 2(C_{1u} + HB_uC) - (HB_0 - B_{11} - \frac{N}{x_1}B_1 + \frac{N}{x_1^2}B + 2HBB_1 + \dot{H}BC), \qquad /17/$$

$$C\dot{F} - (C_u - 2B_1F) = HC_0 + C_{11} + \frac{N}{x_1}C_1 + 2HCB_1 + \dot{H}C^2.$$

II. $A = 0$, $B = 1$.

$$C\dot{F} - (C_u + \frac{\dot{H}}{H}C)F = HC_0 + C_{11} + \frac{N}{x_1}C_1 - \frac{N}{x_1^2}C + 2CC_{1u} + C^2C_{uu} - C\frac{\dot{H}}{H}(CC_u + C_1 + \frac{N}{x_1}C). \qquad /18/$$

<u>Теорема 8</u>. Рівняння /15/ Q -умовно інваріантне відносно оператора /16/ у випадку $H(u) = 1$, $A = 1$, $B \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне рівнянню

$$u_0 + u_{11} + \frac{3}{2x_1}u_1 = \lambda u^3,$$

а оператор /16/ має вигляд

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}(\sqrt{2\lambda}\,u + \frac{1}{x_1})\partial_1 + \frac{3}{4}u(2\lambda u^2 - \frac{1}{x_1^2})\partial_u.$$

<u>Теорема 9</u>. Рівняння

$$\frac{1}{u}u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1}u = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 - const,$$

Q -умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = \partial_0 + (N+1)\frac{u}{x_1}\partial_1 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u .$$

Теорема IO. Рівняння /I5/ Q -умовно інваріантне відносно операторів

$$Q_1 = \partial_0 + \frac{3-N}{\lambda_1 x_1}\partial_1 + \frac{(3-N)(1-N)}{\lambda_2 x_1^2} u\partial_u ,$$

$$Q_2 = \partial_0 + \frac{1}{x_1}\partial_1 - 2\frac{u}{x_1^2}\partial_u ,$$

$$Q_3 = \partial_0 + \frac{2}{\lambda_1 x_1}\partial_1 + \frac{}{\lambda_2 x_1^2}\partial_u ,$$

якщо функції $F(u)$ і $H(u)$ мають вигляд

для $Q_1 :\ H(u) = \lambda_1 u^{\frac{2}{1-N}} + \lambda_2 ,\ F(u) = \lambda_3 u^{\frac{3-N}{1-N}},\ N \neq 1, 3,\ \lambda_2 = 0;$

для $Q_2 :\ H(u) = \frac{\lambda_1}{u},\ F(u) = \lambda_2 ,\ N \neq 3,\ \lambda_1, \lambda_2 - const;$

для $Q_3 :\ H(u) = \lambda_1 e^u + \lambda_2 ,\ F(u) = \lambda_3 e^u ,\ N = 1,\ \lambda_2 \neq 0.$

В § 9 за операторами Q -умовної симетрії, які отримані в § 8, побудовані анзаци, що редукують /I5/ до звичайних диференціальних рівнянь.

У висновках коротко сформульовані результати дисертаційної роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

I. Воробьева А.И. Групповой анализ некоторых систем нелинейных уравнений электродинамики //Асимптотические методы решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений:-Киев:

КПИ, I987. - С. 20 - 23.

2. Воробьева А.И. О пуанкаре-инвариантных квазилинейных уравнениях второго порядка // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, I987. - С. 66 - 69.
3. Воробьева А.И. Квазилинейные уравнения второго порядка, инвариантные относительно однопараметрических подгрупп группы Пуанкаре Р (I. 3) // Методы исследований алгебраических и топологических структур. - Киев: КПИ, I989. - С. - 22 - 26.
4. Егорченко И.А., Воробьева А.И. Точные решения волнового уравнения с дополнительными условиями // Симметрия и решения уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, I989. - С. 2I - 25.
5. Єгорченко І.А., Воробйова А.І. Умовна інваріантність і точні розв'язки рівняння Клейна-Гордона-Фока // Доп. АН України. - I992. - № I. - С. I9 - 22.
6. Єгорченко І.А., Воробйова А.І. Умовна інваріантність і точні розв'язки одного рівняння теплопровідності // Доп. АН України. - I992.- № 3. - С. 20 - 22.
7. Фущич В.І., Серов М.І., Воробйова А.І. Умовна симетрія і точні розв'язки рівнянь нестаціонарної фільтрації // Доп. АН України. - I992. - № 6 , - С. 20 - 24.

Підп. до друку 16.02.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 0,93. Умов. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,7.
Тираж 100 прим. Зам. 86. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3