Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

БАБИЧ Михайло Данилович

УДК 517.957:517.968.4

ТЕОРІЯ І АЛГОРИТМИ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ТА УТОЧНЕННЯ ІЗОЛЬОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ — 1993

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України.

Науковий консультант: академік, доктор фізико-математичних наук, професор МИХАЛЕВИЧ В. С.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ЛУЧКА А. Ю.,

доктор фізико-математичних наук, професор ГУДИВОК П. М.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЧИКРІЙ А. О.

Провідна організація: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача АН України.

Захист відбудеться «26» 03 1993 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «24» 02 1993 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

I

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми та історія питання. На сучасному етапі розвитку науки і техніки наукові дослідження багатьох складних явищ і об"єктів у фізиці, хімії, біології, економіці та інших областях діяльності людини реалізуються шляхом створення і дослідження їх математичних моделей. Серед таких моделей слід виділити моделі багатокритеріальної оптимізації, що розглянуті у монографії В.С.Михалевича, В.Л.Волковича, макроекономічні моделі В.М.Глушкова, задачі математичної фізики, що описані в книгах О.А.Самарського, А.М.Тихонова, Г.І.Марчука, В.І.Лебедева, дискретної оптимізації, які наведені в роботах І.В.Сергієнка, моделі надійності систем І.М.Коваленка та багато інших, що зустрічаються в роботах Ю.М.Єрмольєва, О.А.Летичевського, Ю.В.Капітонової, Ю.І.Самойленка, А.Ф.Верланя, В.К.Задираки, В.В.Іванова, А.О.Чикрія та інших учених.

Часто такими математичними моделями є різного роду нелінійні рівняння, починаючи від нормальних систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь і кінчаючи всілякими диференціальними, інтегральними, інтегродиференціальними та іншими функціональними або, в загальному випадку, операторними рівняннями, а також різні задачі оптимізації з нелінійними цільовими функціями і обмеженнями.

Все частіше ставиться задача про знаходження усіх розв"язків нелінійних рівнянь, які в багатьох випадках можуть виступати як апарат для глобального розв"язання задач оптимізації. Процес наближеного розв"язування таких рівнянь складається із двох етапів: відокремлення розв"язків, тобто знаходження таких областей єдиності розв"язків, у яких за допомогою певної процедури можна уточнювати ці розв"язки, і самого процесу уточнення. При наявності досить близького до шуканого розв"язку початкового наближення уточнення цього розв"язку в багатьох випадках може бути здійснене ітераційними методами, умови застосування і збіжності яких дають, як правило, достатні умови для існування розв"язку. Із багатьох робіт, присвячених цьому питанню, відмітимо глибокі дослідження С.Банаха, В.В.Немицького, А.М.Тихонова, Ж.Лере, Ю.Шаудера, Л.В.Канторовича, М.О.Красносельського, М.М.Вайнберга, Ф.Браудера.

При наближеному розв"язуванні нелінійних рівнянь часто застосовуються апроксимаційні методи, що зводять вихідні рівняння до рівнянь менш складної структури. До них належать: скінченно-різницеві, проекційні, проекційно-ітераційні та ін.

Різницеві методи широко використовуються в обчислювальній практиці, вони мають досить прості обчислювальні схеми, зручні при реалізації на ЕОМ. Із робіт, що їм присвячені, відмітимо роботи О.А.Самарського, Г.І.Марчука, М.М.Яненка, В.Л.Макарова, С.К.Годунова, В.С.Рябенького.

Надто широкий клас наближених методів становлять проекційні методи. На відміну від ітераційних проекційні методи у своїй основі містять принципово нову ідею, що полягає у заміні вихідного рівняння апроксимаційним, розв"язки якого приймаються за наближені розв"язки вихідного рівняння. Дослідженням різних аспектів проекційних методів, починаючи з їх побудови, критеріїв збіжності, швидкості збіжності, питань точності і стійкості, а також раціонального підбору координатних елементів, займалися багато вчених, у тому числі І.Г.Бубнов, Б.Г.Гальоркін, М.М.Крилов, М.Ф.Кравчук, М.В.Келдиш, С.Г.Міхлін, Л.В.Канторович, М.С.Красносельський, Г.М.Вайнікко, П.П.Забрейко, В.К.Дзядик та ін.

Інший клас наближених методів складають проекційно-ітераційні. Ці методи, що поєднують у собі елементи апроксимації та ітераційної процедури, беруть свій початок від методів усереднення функціональних поправок, запропонованого Ю.Д.Соколовим і розвинутого далі А.Ю.Лучкою, М.С.Курпелем та їх учнями. В результаті досліджень А.Ю.Лучки та М.С.Курпеля на базі ідей функціонального аналізу метод одержав належне узагальнення, що призвело до створення проекційно-ітераційних методів. В ідейному плані близьким до цих методів є КР - метод, розроблений В.І.Лебедєвим, що поєднує у собі комбінацію ітераційного і варіаційного методів.

Процес наближеного розв"язування на ЕОМ рівнянь /в тому числі і нелінійних/ супроводжують різного роду похибки. Щодо дослідження і оцінок усіх видів похибок є різні підходи. Всі вони викладені в роботах М.С.Бахвалова, В.В.Воеводіна, В.В.Іванова, М.П.Корнійчука, В.Л.Макарова, Б.М.Пшеничного, Ю.М.Даниліна, Л.В.Канторовича, М.О.Красносельського. І.М.Молчанова, С.Г.Міхліна, М.К.Гавуріна, В.К.Задираки, А.І.Березовського, П.М.Бесараба і автора цієї роботи.

Неможливо перерахувати усіх учених, що займалися і займаються тими чи іншими питаннями математичного моделювання і наближеного розв"язування рівнянь. Бібліографію їх робіт можна знайти у фундаментальних монографіях згаданих вище авторів.

Усі перелічені аспекти, що стосуються наближеного розв"язування рівнянь, справедливі для будь-яких рівнянь. Однак застосування їх до нелінійних рівнянь, що мають багато розв"язків, може вирiшити повну проблему їх знаходження тільки в тому випадку, коли ці розв"язки відокремлені. Слід зазначити, що ця проблема досліджена дуже слабо. Серед тих, хто нею займався, можна відмітити В.В.Немицького, О.Д.Горбунова, Б.А.Вертгейма, Е.О.Волкова В.Я.Скоробогатько.

Таким чином, аналіз нелінійних математичних моделей і наближених методів їх розв"язування доводить актуальність розробки і розвитку теорії і практики відокремлення ізольованих розв"язків.

Мета роботи - розробка теоретичних основ і створення практичного апарату для відокремлення і наближеного знаходження ізольованих розв"язків нелінійних рівнянь.

Методика дослідження. Для побудови методу відокремлення використовувалися методи функціонального аналізу, теорії апроксимації, загальної теорії наближених методів та обчислювальної математики. Основними об"єктами дослідження є нелінійні операторні, інтегральні рівняння та системи нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Однак автор вважав доцільним викласти теоретичні основи методу відокремлення в абстрактному вигляді в умовах гільбертового та евклідового просторів. При застосуванні до нелінійних інтегральних рівнянь автор намагався переформулювати основні положення теорії щодо даного класу рівнянь і факти, властиві тільки їм, ефективно використати при реалізації процесу відокремлення на конкретних прикладах.

Наукова новизна. Основними науковими результатами є такі:

1. Запропонований і реалізований підхід до розв"язання проблеми відокремлення ізольованих розв"язків деяких класів нелінійних рівнянь, що базується на відшуканні центра і радіуса замкненої кулі як області единості розв"язку.

2. Розроблені теоретичні основи відокремлення ізольованих розв"язків нелінійних операторних і функціональних рівнянь, що характеризуються теоремами існування і единості розв"язків взаємозв"язаних вихідного рівняння та послідовності апроксимаційних рівнянь, із яких випливає збіжність методу переходу до апроксимаційних рівнянь та існування радіуса кулі единості розв"язку, що характеризує апостеріорну оцінку похибки наближеного розв"язку. При фіксованому значенні параметра апроксимації розв"язки апроксимаційних рівнянь приймаються за центри куль, а радіуси знаходяться із достатніх умов теорем існування і единості, що відповідають методам мінімальних нев"язок та похибок.

3. Створений практичний апарат для відокремлення ізольованих

розв"язків. Він полягає у дискретизації неперервних задач і зведенні їх до систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, відшуканні оцінок величин, що характеризують достатні умови теорем існування, та розв"язанні системи нерівностей, область сумісності яких дає допустимий інтервал зміни радіуса кулі єдиності.

4. Для глобального розв"язування систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь розроблений і реалізований на ЕОМ $\mathcal{ES}$ - алгоритм, що дає змогу відокремлювати всі ізольовані розв"язки і апроксимувати їх з максимальною точністю, допустимою на ЕОМ.

5. Процес відокремлення ізольованих розв"язків реалізовано на конкретних прикладах систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю.

Достовірність результатів. Усі результати дисертації сформульовані у вигляді теорем і лем і повністю доведені. Теоретичні висновки підкріплені прикладами.

Теоретичне та практичне значення. Робота має теоретично-практичний характер. У ній запропоновано і обгрунтовано новий ефективний метод відокремлення ізольованих розв"язків певних класів нелінійних операторних та функціональних рівнянь, що полягає у відшуканні центра і радіуса замкненої кулі як області єдиності розв"язку. Доведені теореми і леми відображають теоретичні основи і практичні аспекти процесу відокремлення. Створений і реалізований на ЕОМ $\mathcal{ES}$ - алгоритм, що дає змогу відокремлювати всі ізольовані розв"язки систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, є основною складовою частиною методу відокремлення. Його ефективність, як і всього методу відокремлення, показана на прикладах систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь і нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю.

Апробація роботи та публікації

Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на різних наукових конференціях, симпозіумах, школах-семінарах, зокрема на Загальносоюзній конференції з динамічного управління /Свердловськ, 1979/, Загальносоюзній школі- семінарі "Паралельні обчислення і високопродуктивні системи" /Алушта, 1982/, Загальносоюзному семінарі "Питання оптимізації обчислень" /Алушта, 1987/, Загальносоюзній школі-семінарі "Розпаралелювання обробки інформації" /Львів, 1989/, республіканських конференціях "Обчислювальна математика в сучасному науково-технічному прогресі" /Канів, 1978, 1982/, республіканських науково-технічних конференціях "Інтегральні рівняння в прикладному моделюванні" /Київ, 1983, 1986/, школі-симпозіумі з якісної теорії диференціальних рівнянь /Дрогобич, 1978/, Регіональній конференції з методів математичного програмування і програмного забезпечення /Свердловськ, 1984/, симпозіумі "Методи розв"язування нелінійних рівнянь і задач оптимізації " /Таллінн, 1984/, школах-семінарах "Питання оптимізації обчислень" /Кацивелі, 1971, 1975, 1977, 1981, 1983, 1985, 1991; Одеса, 1979, 1989; Київ, 1976, 1978, 1980, 1982, 1984, 1986, 1988, 1990/, семінарах Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова АН України.

Основний зміст дисертації детально викладений у роботах / 1 - 34 /. Із робіт, написаних у співавторстві, до дисертації включені тільки ті результати, що одержані особисто автором. Виняток становлять числові приклади, де знаходження усіх ізольованих розв"язків за допомогою розробленого автором $\varepsilon\delta$ - алгоритму здійснювала Л.Б.Шевчук, що на його основі склала програму.

Структура й об"ем роботи. Дисертація складається із вступу, п"яти глав, висновків, списку цитованої літератури і містить 209 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ у дисертації містить огляд літератури щодо проблеми наближеного розв"язування рівнянь, наближених методів розв"язування нелінійних рівнянь, включаючи і задачу відокремлення ізольованих розв"язків, та опис результатів, що виносяться на захист.

Глава I. Математичне моделювання в наукових дослідженнях. У даній главі, що має вступний інформативний характер, наведені деякі задачі, математичними моделями яких /чи математичним апаратом розв"язування яких/ є системи нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь або нелінійні інтегральні рівняння із сталими границями типу Урисона і Гамерштейна. Глава складається із одного параграфа, в першій частині якого /п.1.1/ описані основні задачі оптимізації: безумовної, нелінійного програмування, глобальної та багатокритеріальної, що у випадку диференційовності функцій цілі і обмежень можуть бути зведені до задачі розв"язування систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. У п.1.2 наведені ще деякі класи задач /рівняння математичної фізики інтегральні рівняння/, що методами дискретизації /скінченних різниць, варіаційними та методом інтегральних рівнянь/ зводяться до задач розв"язування відповідних систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

Глава ІІ. Питання загальної теорії відокремлення і наближеного знаходження ізольованих розв"язків нелінійних операторних рівнянь в гільбертовому просторі.

Об"єктами дослідження у даній главі є нелінійні операторні рівняння. Складність розв"язування таких рівнянь полягає в тому, що вони можуть мати багато розв"язків з невідомим їх числом і місцем розташування в розглядуваній області. Процес їх розв"язування складається з двох етапів: відокремлення розв"язків, тобто відшуканяя таких областей, кожна з яких містить один розв"язок, і уточнення розв"язків, що за певних умов реалізується ітераційними методами, умови застосування і збіжності яких дають, як правило, достатні умови існування розв"язку.

Якщо задача уточнення розв"язків ітераційними методами розроблена досить фундаментально і має багату літературу, то задача їх відокремлення розроблена слабо.

В даній главі викладається суть методу відокремлення ізольованих розв"язків нелінійних операторних рівнянь, що базується на відшуканні центра і радіуса замкненої кулі як області єдиності розв"язку. Реалізується метод відокремлення так. Операторне рівняння апроксимується послідовністю наближених рівнянь, розв"язки яких приймаються за центри шуканих куль, а радіуси знаходяться із достатніх умов існування в кожній із них єдиного розв"язку рівняння. Одночасно ці розв"язки можуть правити за початкові наближення для ітераційних методів.

Розглянуто два варіанти побудови теорії відокремлення ізольованих розв"язків, що базуються на різних ітераційних методах і різних способах апроксимації операторів і просторів. Вони викладені відповідно у параграфах 2 і 3.

Отже, розглянемо нелінійне операторне рівняння

$$Tu = 0, \qquad /1/$$

де T - двічі диференційовний за Фреше оператор, що діє із області свого визначення $Q \subset H$ - гільбертовому простору, у той же простір H.

Припустимо, що в області Q рівняння /1/ має скінченну множину $\Omega = \{u_i^*\} (i=\overline{1,m_1})$ обмежених за нормою розв"язків. Ставиться задача: побудувати такі замкнені кулі, кожна з яких буде містити единий розв"язок із множини Ω , тобто відокремити ці розв"язки. Розв"язання цієї задачі передбачае знаходження такої множини елементів $v_1, v_2, \dots, v_{m_1}$ і дійсних чисел $r_1, r_2, \dots, r_{m_1}$, які будемо називати відповідно центрами та радіусами замкнених куль

$$\bar{S}(v_i, r_i) = \{u \in Q : \|u - v_i\| \le r_i\} \; (i = \overline{1, m_1}),$$

щоб на кожній із них виконувалися деякі достатні умови існування единого розв"язку рівняння /I/. Дійсно, якщо такі v_i і r_i будуть знайдені, то теорема існування кожного розв"язку u_i^* рівняння /I/ може бути визначена таким чином.

Застосуемо для розв"язання рівняння /I/ ітераційний метод мінімальних нев"язок

$$u^{k+1} = u^k - \frac{(Tu^k, T'(u^k)Tu^k)}{\|T'(u^k)Tu^k\|^2} Tu^k \quad (k = 0, 1, \dots). \qquad /2/$$

Щодо існування единого розв"язку рівняння /I/ та збіжності методу /2/ мае місце теорема.

Теорема 2.I. Нехай у кулі $\bar{S}(u^0, r)$, де u^0 - один із елементів v_i , а r - відповідне йому число r_i , виконуються умови:

$$\|Tu^0\| \le \delta_0; \quad \|T'(u)\| \le M(r), \quad \|T''(u)\| \le N(r); \qquad /3/$$

$$|(T'(u)h, h)| \ge m(r)\|h\|^2, \; m(r) > 0, \; h \in H, \qquad /4/$$

де δ_0, $M(r)$, $N(r)$, $m(r)$ - константи.

Нехай, крім того, мають місце нерівності

$$q(r) = \left[1 - \frac{m^2(r)}{M^2(r)}\right]^{1/2} + \frac{\delta_0 \cdot N(r)}{2m^2(r)} < 1, \qquad /5/$$

$$\frac{\delta_0}{m(r)[1 - q(r)]} \le r. \qquad /6/$$

Тоді рівняння /I/ мае в кулі $\bar{S}(u^0, r)$ единий розв"язок u^* , до якого збігаеться послідовність $\{u^k\}$, побудована згідно з /2/, причому швидкість збіжності характеризуеться нерівністю

$$\|u^* - u^k\| \le \frac{\delta_0}{m(r)[1 - q(r)]} [q(r)]^k. \qquad /7/$$

Звідси випливае, що якщо будуть знайдені такі пари (v_i, r_i), $i = \overline{1, m_1}$, для яких буде вірна теорема 2.I , то задача відокремлення розв"язків рівняння /1/ буде вирішена. В роботі запропонований один підхід до розв"язання цієї проблеми.

Розглянемо послідовність рівнянь

$$T_n u = 0 \qquad (n=1,2,\dots), \qquad /8/$$

що в певному розумінні є наближеними до рівняння /1/. Нелінійні оператори $T_n : Q_n \in H_n \to H$ вважаються двічі диференційовними з Фреше. Припускається, що $H_n = H$, $Q_n = Q$, а T_n має узагальнений смисл.

Умови близькості операторів T і T_n, а також їх похідних T', T_n', T'', T_n'' визначимо таким чином: будемо вважати, що на елементі $u \in S(v, r)$ виконані умови апроксимації операторів Tu, $T'(u)$, $T''(u)$ операторами $T_n u$, $T_n'(u)$, $T_n''(u)$, якщо існують такі функціонали $\eta_j(n,u) \to 0$ при $n \to \infty$ $(j=1,2,3)$, що виконуються нерівності

$$\| Tu - T_n u \| \le \eta_1(n,u), \qquad /9/$$

$$\| T'(u) - T_n'(u) \| \le \eta_2(n,u), \qquad /10/$$

$$\| T''(u) - T_n''(u) \| \le \eta_3(n,u). \qquad /11/$$

Позначимо $\Omega_n = \{u_{n_i}^*\}$ $(i=1,\overline{m_1})$ множину послідовностей розв"язків рівняння /8/ і дамо таке означення.

<u>Означення 2.1.</u> Послідовність розв"язків $u_n^* \in \Omega_n$ рівняння /8/ будемо називати відповідною розв"язку $u^* \in \Omega$ рівняння /1/, а метод переходу до рівнянь /8/ - збіжним, якщо при $n \to \infty$ $\|u^* - u_n^*\| \to 0$.

На основі теореми 2.1. сформулюємо теорему про існування розв"язку послідовності рівнянь /8/ і збіжність методу переходу до неї.

<u>Теорема 2.2.</u> Нехай u^* - один із розв"язків рівняння /1/ і для всіх $u \in S(u^*, r) = \{u \in Q : \|u - u^*\| \le r\}$ виконуються умови /9/ - /11/, а для оператора $T''(u)$ має місце нерівність

$$\| T''(u) \| \le N(r, u^*). \qquad /12/$$

Нехай, крім того, для оператора $T'(u^*)$ виконуються умови:

$$\|T'(u^*)\| \le M, \quad |(T'(u^*)h, h)| \ge m\|h\|^2, \ m>0, \ h \in H \qquad /13/$$

Нарешті, нехай існує така область $d(r) \subset (0,\infty)$, що $m - N(r, u^*)r > 0$ для кожного $r \in d(r)$.

Тоді справедливі такі твердження:

1. Для операторів T_n, T_n', T_n'' в кулі $\bar{S}(u^*, r)$ мають місце оцінки

$$\| T_n u^* \| \le \eta_1(n, u^*), \tag{14}$$

$$\| T_n'(u) \| \le M + N(r, u^*)r + \eta_2(n, r, u^*) = M_n(n, r, u^*); \tag{15}$$

$$|(T_n'(u)h, h)| \ge [m - N(r, u^*)r - \eta_2(n, r, u^*)] \cdot \|h\|^2 = m_n(n, r, u^*)\|h\|^2; \tag{16}$$

$$\| T_n''(u) \| \le N(r, u^*) + \eta_3(n, r, u^*) = N_n(n, r, u^*). \tag{17}$$

2. Для будь-якого $r \in d(r)$ знайдеться таке $n_0(r)$, що при $n \ge n_0(r)$ в нерівності /16/ $m_n(n, r, u^*) > 0$ і виконуються умови:

$$q_n(r) = \left[1 - \frac{m_n^2(n, r, u^*)}{M_n^2(n, r, u^*)}\right]^{1/2} + \frac{N_n(n, r, u^*)\eta_1(n, u^*)}{2 m_n^2(n, r, u^*)} < 1, \tag{18}$$

$$\frac{\eta_1(n, u^*)}{m_n(n, r, u^*)[1 - q_n(r)]} \le r. \tag{19}$$

3. При кожному із зазначених $n \ge n_0(r)$ рівняння /8/ має в кулі $\bar{S}(u^0, r)$ єдиний розв"язок u_n^*, відповідний розв"язку u^*, до якого починаючи із $u_n^0 = u^*$ збігається послідовність $\{u_n^k\}$ побудована згідно з /2/ для рівняння /8/, причому має місце оцінка, що характеризує швидкість збіжності

$$\| u_n^* - u_n^k \| \le \frac{\eta_1(n, u^*)}{m_n(n, r, u^*)[1 - q_n(r)]} [q_n(r)]^k. \tag{20}$$

4. Кожна послідовність розв"язків $\{u_n^*\}$ при $n \to \infty$ прямує за нормою до розв"язку u^*, причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$\| u^* - u_n^* \| \le \frac{\eta_1(n, u^*)}{m_n(n, r, u^*)[1 - q_n(r)]}. \tag{21}$$

Остання нерівність доводить збіжність апроксимаційного методу переходу до рівняння /8/, що є достатньою основою для практичної реалізації / при фіксованих n / процесу розв"язування рівняння /8/. Припустимо, що при фіксованому n ми знайшли розв"язки u^*_{ni} $(i=\overline{1,m_1})$ рівняння /8/. Ці розв"язки надалі приймемо за центри шуканих куль $\bar S(v=u^*_{ni}, r)$ і зауважимо, що одержання апостеріорної оцінки похибки наближеного розв"язку v рівносильно доведенню існування принаймні одного розв"язку u^* рівняння /1/ в кулі $\bar S(v, r)$.

Для нелінійних рівнянь, що мають не один розв"язок, задача полягає в тому, щоб для кожного розв"язку v знайти такі значення радіуса r, щоб у кулі $\bar S(v, r)$ виконувалися достатні умови існування єдиного розв"язку рівняння /1/. У цьому випадку величини $\mathcal{M}(r), m(r), \mathcal{N}(r)$ виявляються нелінійними функціями, аналітичний вираз яких не завжди вдається одержати. Тому природним є підхід, коли ці функції виражаються через аналогічні величини, що обмежують в кулі $\bar S(v, r)$ оператор $T_n u$, його похідну $T'_n(u)$, а також $T''_n(u)$, і функціонали $\eta_j(n, u)$ $(j=1,2,3)$, що характеризують у кулі $\bar S(v, r)$ їх близькість до операторів Tu, $T'(u), T''(u)$ згідно з /9/ - /11/. Має місце лема.

Лема 2.1. Нехай для усіх $u\in \bar S(v, r)$, де v - один із розв"язків u^*_{ni}, виконані умови /9/ - /11/, а для оператора $T''_n(u)$ має місце нерівність

$$\|T''_n(u)\| \le \mathcal{N}_n(r, v). \qquad /22/$$

Нехай, крім того, для оператора $T'_n(v)$ виконані умови:

$$\|T'_n(v)\| \le \mathcal{M}_n, \quad |(T'_n(v)h, h)| \geq m_n \|h\|^2, \; m_n > 0, \; h\in H. \qquad /23/$$

Тоді у кулі $\bar S(v, r)$ справедливі оцінки:

$$\|Tv\| \le \eta_1(n, v) \qquad /24/$$

$$\|T'(u)\| \le \mathcal{M}_n + \mathcal{N}_n(r, v)r + \eta_2(n, r, v) = \mathcal{M}(n, r, v), \qquad /25/$$

$$|(T'(u)h, h)| \geq [m_n - \mathcal{N}_n(r, v)r - \eta_2(n, r, v)]\|h\|^2 = m(n, r, v)\|h\|^2 \qquad /26/$$

$$\|T''(u)\| \le \mathcal{N}_n(r, v) + \eta_3(n, r, v) = \mathcal{N}(n, r, v). \qquad /27/$$

При фіксованих n і v праві частини /25/ - /27/ перетворюються в нелінійні функції $M(r)$, $m(r)$ і $N(r)$, а це означає, що нелінійними функціями радіуса r стають і ліві частини нерівностей /5/ і /6/. В умовах леми 2.1 існування розв"язку /5/,/6/ гарантує існування кулі $\bar{S}(v,r)$ единого розв"язку рівняння /1/, що відповідає даному v.

Сформулюємо основну теорему існування единого розв"язку рівняння /1/ у припущенні, що структура оператора $T_n u$ гарантує поліноміальну структуру відносно r функціоналів η_0, η_1, M, m, N.

Теорема 2.3. Нехай при будь-якому фіксованому $n \geq n_0$ рівняння /8/ має одне і те саме число розв"язків, що дорівнює m_1 і при цьому виконується нерівність

$$m_n - \eta_1(n, 0, v) > 0.$$

Тоді в умовах леми 2.1 справедливі такі твердження:

1. Існує таке $n \geq n_0$, починаючи з якого кожному розв"язку v відповідає свій інтервал $(r_1, r_2) \subset [0, \bar{R})$, де $\bar{R}$ - найменший додатній корінь функції $m(r)$, що для всіх $r \in (r_1, r_2)$ система нерівностей /5/, /6/, в яких M, m, N визначені згідно з /25/ - /27/, буде сумісною.

2. Рівняння /1/ має в кулі $\bar{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$ единий розв"язок u^*, що відповідає даному v, до якого /починаючи із $u^0 = v$ / збігається послідовність $\{u^k\}$, побудована згідно з /2/, причому має місце оцінка /7/, в якій $\delta_0 = \eta_1(n, v)$.

3. Апостеріорна оцінка похибки, що характеризує близькість розв"язків u^* і $u^0_{ni} = v$ рівнянь /1/ і /8/, визначається нерівністю

$$\| u^* - v \| \leq \frac{\eta_1(n, v)}{m(r)[1-q(r)]} . \qquad /28/$$

Перебираючи всі розв"язки $u^*_{ni} \subset \Omega_n$ рівняння /8/, одержимо множину систем нерівностей /5/, /6/. Розв"язок кожної з них визначає інтервал зміни радіуса r кулі існування единого розв"язку u^* рівняння /1/, що відповідає розв"язкові u^*_{ni} рівняння /8/, тобто реалізується процес відокремлення усіх розв"язків рівняння /1/.

У § 3 розглянуто ще один варіант відокремлення розв"язків рівняння /1/ за умови застосування ітераційного методу мінімальних похибок у випадку побудови апроксимаційних рівнянь проекційними методами, для операторів T і T_n, що діють у різних просторах. На апроксимаційні оператори T_n не накладаються обмеження щодо структури, а це означає, що функціонали η_2, η_3 і мажоранти $\mathcal{M}, m, \mathcal{N}$ можуть бути довільної структури із загальними властивостями.

Отже, нехай потрібно розв"язати операторне рівняння

$$Tu = u - \bar{T}u = 0, \qquad /29/$$

де T – нелінійний оператор, визначений і неперервний на відкритій, непустій, обмеженій множині Ω – банахового простору E, замикання якої є $\bar{\Omega}$.

Позначимо $\{E_n\}$ послідовність замкнених підпросторів E, а їх перетин із множиною Ω позначимо Ω_n, тобто $\Omega_n = \Omega \cap E_n$, $\bar{\Omega}_n$ – замикання Ω_n.

Далі будемо вважати, що оператор $T_n : \bar{\Omega}_n \to E_n$ – наближений у певному розумінні до оператора T і породжує послідовність апроксимаційних рівнянь

$$T_n u_n = u_n - \bar{T}_n u_n = 0. \qquad /30/$$

Кожне із рівнянь /30/ трактується як наближене до /29/, а його розв"язки при кожному n оголошуються наближеними розв"язками /29/.

Слід зауважити, що в даній постановці задачі різниця T і T_n не може бути характеристикою близькості рівнянь /29/ і /30/, тому що оператори T і T_n діють у різних просторах. У зв"язку з цим розглядається послідовність лінійних проекційних операторів P_n, кожний з яких проектує на відповідне E_n. Якщо P_n необмежені, то припускається, що оператори $P_n T$ – неперервні на Ω і $T(\Omega) \subset \mathcal{D}(P_n)$ – області визначення оператора P_n. В цьому випадку степінь близькості рівнянь /29/ і /30/ характеризується величиною "малості" норм операторів

$$S_n = T_n - P_n T, \quad \mathcal{U}_n = T - P_n T, \qquad /31/$$

де

$$S_n : E_n \to E_n, \quad \mathcal{U}_n : E \to E.$$

У припущенні, що простори E і E_n - гільбертові, оператори T і P_nT - двічі диференційовні за Фреше в Ω, а оператори T_n - в Ω_n, для теоретичного обгрунтування процесу відокремлення розв"язків використано метод мінімальних похибок, що для рівняння /29/ має вигляд

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|Tu^k\|^2}{\|G_n^* T u^k\|^2} \cdot G_n^* T u^k \quad (k = 0, 1, \dots), \qquad /32/$$

де $G_k^* = [T'(u^k)]^*$. Має місце теорема.

Теорема 3.1. Нехай у кулі $\bar{S}(v, r) = \{u \in \Omega : \|u - v\| \leq r\}$, де $v = u^0$ - початковому наближенню /32/, оператори Tu, $T'(u)$, $T''(u)$ задовольняють умовам /3/, /4/ і при цьому мають місце нерівності

$$\gamma = \delta_0 N(r) / m^2(r) < 1, \qquad /33/$$

$$2\delta_0 / m(r) \leq r. \qquad /34/$$

тоді рівняння /29/ має в кулі $\bar{S}(v, r)$ єдиний розв"язок u^*, до якого монотонно і сильно збігається послідовність $\{u^k\}$, побудована згідно з /32/, причому має місце оцінка похибки

$$\|u^* - u^k\| \leq \frac{\delta_0}{m(r)} \left[1 - \frac{m^2(r)}{M^2(r)}(1 - \gamma)\right]^{\frac{k}{2}}. \qquad /35/$$

Таким чином, як і в попередньому випадку, задача відокремлення ізольованих розв"язків зводиться до задачі знаходження таких пар (v_i, r_i), які зумовлять справедливість теореми 3.1.

Для цього випадку доведено теореми, аналогічні попереднім, із яких випливає збіжність методу переходу до послідовності рівнянь /30/, існування інтервалів радіусів куль єдиності ізольованих розв"язків рівняння /29/ та оцінки апостеріорної похибки кожного розв"язку рівняння /30/.

Глава III. Наближені методи відокремлення та побудови ізольованих розв"язків деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь. Вона присвячена застосуванню методу відокремлення ізольованих розв"язків до нелінійних інтегральних рівнянь /НІР/. Розглядаються питання побудови послідовності апроксимаційних рівнянь за допомогою методів вироджених ядер та механічних квадратур і зведення неперервних задач до дискретних, тобто до систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Досліджуються практичні аспекти виконання достатніх умов теорем існування і одержання апостеріорної оцінки похибки, що рівнозначно відокремленню розв"язку.

У § 4 розглядаються НІР

$$Tu(x) = u(x) - \int_0^1 K(x,y,u(y))dy - f(x) = 0. \qquad /36/$$

і послідовність наближених до /36/ рівнянь

$$T_n u(x) = u(x) - \int_0^1 K_n(x,y,u(y))dy - f_n(x) = 0 \quad n = 1,2,\dots, \qquad /37/$$

де $u(x)$ - шукана функція $K(x,y,u(y)) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) \in C(\bar{\Omega})$, $K_n(x,y,u(y)) \in C(\bar{\Omega})$, $f_n(x) \in C(\bar{\Omega})$ - задані функції.
$\bar{\Omega} = \{(x,y,u):\ 0 \le x,\ y \le 1,\ \|u(x)\| \le d < \infty\}$

Вважається, що розв"язки $u^*(x)$ рівняння /36/ і $u_n^i(x)$ $(i=\overline{1,l})$ послідовності рівнянь /37/ задовольняють означенню 2.1.

У припущенні, що

$$K(x,y,u(y)) = \bar{K}(x,y)\bar{f}(y,u(y)) \qquad /38/$$

рівняння /36/ набуває вигляду

$$T'u(x) = u(x) - \int_0^1 \bar{K}(x,y)\bar{f}(y,u(y))dy - f(x) = 0. \qquad /39/$$

Надалі вважається, що

$$\bar{f}(y,u(y)) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(y) u^j(y), \quad m \ge 2 \quad y \in [0,1] \qquad /40/$$

$$\bar{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)\psi_i(y), \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i(x)$$

$$K_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)\psi_i(y), \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i(x), \qquad /41/$$

де $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$ - системи лінійно незалежних функцій. Тоді апроксимаційна до /39/ послідовність рівнянь має вигляд

$$T_n' u_n(x) = u_n(x) - \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)\psi_i(y) \sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_n^j(y)dy - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i(x) = 0. \qquad /42/$$

Оскільки результати теоретичних досліджень § 2 повністю переносяться на /36/, /37/ або ж /39/, /42/, то вважається, що метод переходу до /37/, /39/ збігається. Це дає змогу розв"язувати /42/ при фіксованих n.

Розв"язок рівняння /42/ шукається у вигляді

$$u_n^*(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad /43/$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ - неозначені коефіцієнти. Підставивши /43/ у /42/, одержимо для знаходження $a_1, a_2, \dots, a_n$ систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

$$a_k = \alpha_k \int_0^1 \psi_k(y) \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(y) \left[\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu(y)\right]^j dy + \beta_k \qquad /44/$$

$$k = \overline{1,n}.$$

Таким чином, задача розв"язування НІР /42/ звелася до розв"язування системи /44/. Розв"язки /43/ приймаються за центри куль і використовуються для знаходження їх радіусів.

Надалі припускається, що в області Ω функції $K(x, y, u(y))$ і $K_n(x, y, u(y))$ $(n=1,2..)$ – двічі неперервно диференційовні по змінній $u = u(x)$. Звідси випливає, що нелінійні оператори Tu і $T_n u$ $(n=1,2,\dots)$, визначені згідно з /36/, /37/ і такі, що діють із $\bar{\Omega}$ в $C[0,1]$, є двічі диференційовними за Фреше по змінній $u=u(x)$ на будь-якому елементі $w = w(x) \in C[0,1]$, $\|w\| \le d < \infty$, причому їх диференціали мають вигляд

$$T'(w)h = h(x) - \int_0^1 K'(x,y,w(y))h(y)dy, \qquad /45/$$

$$T'_n(w)h = h(x) - \int_0^1 K'_n(x,y,w(y))h(y)dy, \qquad /46/$$

$$T''(w)hh_1 = -\int_0^1 K''(x,y,w(y))h(y)h_1(y)dy, \qquad /47/$$

$$T''_n(w)hh_1 = -\int_0^1 K''_n(x,y,w(y))h(y)h_1(y)dy. \qquad /48/$$

Для реалізації процесу відокремлення ізольованих розв"язків рівняння /36/ за допомогою методу мінімальних нев"язок за гільбертів простір H виберемо простір функції $L_2[0,1]$, якому належать всі неперервні на $[0,1]$ функції. В усіх подальших обчисленнях використовується норма, що відповідає простору $L_2[0,1]$. Із врахуванням цього умови близькості операторів T, T_n і їх похідних визначимо умовами /9/ - /11/.

Наведемо числові значення величин, що для даного випадку характеризують оцінки /9/ - /11 і /22/ - /23/. Позначимо:

$$m_1 = \min_{0\le x,y\le 1} K'_n(x,y,u^0(y)); \quad m_2 = \min_{0\le x\le 1} \int_0^1 K'_n(x,y,u^0(y))dy,$$

$$M_1 = \max_{0\le x,y\le 1} K'_n(x,y,u^0(y)), \qquad /49/$$

$$M_2 = \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 K'_n(x,y,u^0(y))dy, \quad M_3 = \left\{\int_0^1\int_0^1 [K'_n(x,y,u^0(y))]^2 dxdy\right\}^{1/2}.$$

Нехай мають місце умови

$$\|\bar{K}(x,y) - \bar{K}_n(x,y)\| \le c_1 \cdot \psi(n), \qquad /50/$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} v^j(y) \right\| \le C_2, \qquad /51/$$

де C_1, C_2 – сталі, $\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тоді для елемента v, що є одним із розв"язків рівняння /42/, величини $M_n, N_n, m_n, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ згідно з лемами 4.2; 4.4; 4.5; 4.6; 4.7; 4.8 визначаються так:

$$\mathcal{M}_n = \begin{cases} (1+2m_1+M_3^2)^{1/2}, & \text{якщо } K_n'(x,y,u^0(y))<0, \\ (1+M_3^2)^{1/2}, & \text{якщо } K_n'(x,y,u^0(y))\geq 0. \end{cases} \qquad /52/$$

$$\eta_3(n,r,v) = c_1 \cdot \Psi(n) \sum_{j=1}^{m-2} \frac{1}{k!} \| Q_{m-2}^k(v) \| \cdot \theta_k \cdot r^k, \qquad /53/$$

$$\mathcal{N}_n = \| \bar{K}_n \| \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{c!} \| Q_{m-2}^k(v) \| \cdot r^k, \qquad /54/$$

де $Q_{m-2}^k(v)\ (k=1,\dots,m-2)$ - похідні полінома

$$Q_{m-2}(v) = \sum_{j=2}^{m} (j-1) \cdot j \cdot \gamma_j \cdot v^{j-2};$$

$$m_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } K_n'(x,y,v(y)) \leq 0 \\ 1 - M_1, & \text{якщо } K_n'(x,y,v(y)) \geq 0,\ 0 \leq M_1 < 1, \\ 1 - M_2, & \text{якщо } K_n'(x,y,v(y)) \geq 0,\ 0 \leq M_2 < 1, \\ 1 - M_3, & \text{якщо } m_2 = 0.\ M_2 > 1,\ M_3 < 1, \\ m_2 - 1, & \text{якщо } K_n'(x,y,v(y)) > 0,\ m_2 > 1, \\ 3/4\, m_2 - 1, & \text{якщо } 4/3 < m_2 < \infty, \\ & h(x) \text{ - вгнута функція}, \\ \theta m_2 - 1, & \text{якщо } \theta^{-1} < m_2 < \infty, \\ \left.\begin{matrix} \theta_2 - 1 \\ 1 - \theta_1 \end{matrix}\right\}, & h(x) \text{ - поліном } n\text{-го степеня}, \\ & \text{якщо } m_2 = 0,\ M_2 > 1,\ M_3 < 1, \\ & h(x) = Tv(x) \text{ - нев"язка-поліном}, \end{cases} \qquad /55/$$

де m_1, m_2, M_1, M_2, M_3 визначені згідно з /49/, а θ і θ_p визначаються із нерівності Фавара

$$\left(\int_0^1 h(x)\,dx\right)^p \geq \theta_p \int_0^1 [h(x)]^p\,dx \qquad /56/$$

причому при $p = 2$ $\theta = \theta_2^{-1}$.

$$\eta_1(n,v) = c_1 \cdot c_2\, \Psi(n), \qquad /57/$$

$$\eta_2(n,r,v) = c_1 \cdot \Psi(n) \sum_{k=0}^{m-1} \| Q_{m-1}^k(v) \| \cdot \theta_k \cdot r^k, \qquad /58/$$

де $Q_{m-1}^k(v)\ (k=1,\dots,m-1)$ - похідні полінома

$$Q_{m-1}(v) = \sum_{j=1}^{m} j \cdot \gamma_j \cdot v^{j-1}.$$

Таким чином, одержано всі компоненти необхідні для формулювання достатніх умов існування ізольованих розв"язків рівнянь /36/.

/39/ і відшукання радіусів куль єдиності усіх розв"язків цих рівнянь.

Теорема 4.4. Нехай оператори Tu і $T_n u$, представлені формулами /36/, /37/ або /39/,/42/, двічі неперервно диференційовні за Фреше в кулі $\bar{S}(v,r)$, де $v = u^0(x)$ – записаний у вигляді /43/ наближений розв"язок рівняння /36/, причому $T'(v), T_n'(v), T''(v), T_n''(v)$ визначені згідно з /45/ – /48/.

Нехай на елементі $v(x)$ для оператора $T'(v)$ справедливі оцінки /23/, де M_n та m_n визначені згідно з /52/, /55/. Нехай, зрештою, виконуються умови /50/ і /51/.

Тоді справедливі такі твердження:

1. Умови близькості операторів Tu, $T_n u$, $T'(u)$, $T_n'(u)$, $T''(u)$, $T_n''(u)$ у кулі $\bar{S}(v,r)$ при будь-якому n характеризуються нерівностями /9/ – /11/ із функціоналами η_1, η_2, ξ_3, що представлені відповідно співвідношеннями /57/, /58/ і /53/.

2. Для операторів $T'(u), T''(u)$ у кулі $\bar{S}(v,r)$ мають місце оцінки /25/ – /27/, де M_n, m_n, N_n визначені згідно з /52/, /55/ та /54/.

3. При $m_n - \eta_2(n,0,v) > 0$ існує таке $\bar{n} > 0$, що при $n \geq \bar{n}$ кожному розв"язку $v(x)$ рівняння /42/, знайденому у вигляді /43/, відповідатиме інтервал $(r_1, r_2) \subset (0, R')$, де R' – найменший додатній корінь функції $m(\bar{n},r,v)$, що при всіх $r \in (r_1, r_2)$ система нерівностей /5/,/6/, де $M(r), m(r), N(r)$ визначені згідно з /25/ – /27/, а $\delta_0 = \eta_2(n,v)$, буде сумісна.

4. Рівняння /39/ у кулі $\bar{S}(v,r)$, де $r \in (r_1, r_2)$, має єдиний розв"язок $u^*(x)$, що відповідає наближеному розв"язку $v(x)$, до якого збігається починаючи з $u^0(x) = v(x)$ послідовність $\{u^k(x)\}$, побудована згідно з /2/ для оператора /39/, причому справедлива оцінка /7/ з $\delta_0 = \eta_2(n,v)$.

5. Близькість відповідних розв"язків $u^*(x)$ та $v(x)$ рівнянь /39/,/42/, що характеризує апостеріорну оцінку похибки розв"язку $v(x)$, визначається нерівністю /28/.

Підставляючи замість $v(x)$ усі розв"язки $u^*_{ni}(x)$ $(i=\overline{1,l})$ і знаходячи відповідні їм інтервали для радіусів r_i, можна відокремити усі розв"язки рівняння /36/.

У п"ятому параграфі цієї глави йдеться про відокремлення ізольованих розв"язків НІУ /36/ за умов використання для цього апроксимаційного методу механічних квадратур та ітераційного методу мінімальних похибок.

Наведені вище теореми дають теоретичне обгрунтування і практичні рекомедації щодо відокремлення ізольованих розв"язків функціональних рівнянь. В результаті задача розв"язування вказаних функціональних рівнянь зводиться апроксимаційними методами до задачі знаходження усіх ізольованих розв"язків систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Спосіб розв"язування таких рівнянь розглядається в наступній главі.

Глава IУ. Відокремлення та наближене знаходження усіх ізольованих розв"язків систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. У даній главі викладено εS - алгоритм відокремлення і уточнення всіх ізольованих розв"язків систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. У єдиному шостому параграфі глави , сформульовані його теоретичні основи і практичні аспекти. Розглянуто питання оптимізації обчислень при реалізації εS - алгоритма на багатопроцесорній ЕОМ та питання точності.

εS - алгоритм побудований на основі методу ε - сітки. Цей метод, що застосовується для розв"язування нелінійного операторного рівняння з цілком неперервним оператором на опуклому компакті, полягає в такому: перетворюючи за допомогою оператора послідовність ε_k - сіток компакта і задовольняючи певним умовам, можна відокремити ізольовані розв"язки, що належать компакту, і наблизитися до них як завгодно близько.

Отже, розглядається система нелінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} u_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ u_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ - - - - - - - - \\ u_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{cases} \qquad /59/$$

де функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ визначені і неперервні в обмеженій області G n - вимірного дійсного простору E_n із метрикою ρ .

Якщо ввести позначення вектора $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ і вектор-функції $F(\bar{u}) = (f_1(\bar{u}), f_2(\bar{u}), \dots, f(\bar{u}))$, то система /59/ запишеться в еквівалентній формі

$$\bar{u} = F(\bar{u}). \qquad /60/$$

Ставиться задача знайти всі ізольовані розв"язки системи /59/ або /60/ на n - вимірному замкненому кубові

$\bar{R} = \{\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) : a \le u_i \le b,\ i = \overline{1,n},\ -\infty < a, b < \infty\}$.

Означення 6.1. Збіжна послідовність $u^1, u^2, \dots, u^s, \dots$ точок простору X називається розв"язувальною для оператора F , якщо

$\rho(u^k, F(u^k)) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 6.1. Для існування в області $\bar{R}$ хоча б одного розв"язку рівняння /60/ необхідно і достатньо існування для $F(\bar{u})$ хоча б однієї розв"язувальної послідовності $\{\bar{u}^k\}$.

Відомо, що вектор-функція $F(\bar{u})$ неперервна на обмеженій, замкненій множині $\bar{R}$, рівномірно неперервна на ній. Це означає, що для будь-якого $\gamma > 0$ знайдеться таке число $\varepsilon(\gamma) \le \gamma$, що для довільної пари точок $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{R}$ з умови $\rho(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \le \varepsilon(\gamma)$ буде випливати нерівність

$$\rho(F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2)) \le \gamma.$$

Позначимо $\mathcal{L}_{\varepsilon(\gamma)}$ скінченну $\varepsilon(\gamma)$-сітку на $\bar{R}$, що відображається вектор-функцією F у скінченну γ-сітку $\mathcal{L}_\gamma \subset \bar{R}$. Припустимо, що $\bar{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$ - вектор-розв"язок системи /59/ або /60/, тобто $\bar{u}^0 = F(\bar{u}^0)$. Нехай $N_{\varepsilon(\gamma)}$ - $\varepsilon(\gamma)$- зірка навколо точки $\bar{u}^0$, тобто множина точок $\bar{u} \in \mathcal{L}_{\varepsilon(\gamma)}$- сітки, для яких $\rho(\bar{u}^0; \bar{u}) \le \varepsilon(\gamma)$. Нехай $N_\gamma = F(N_{\varepsilon(\gamma)})$, $\tilde{\bar{u}}' = F(\bar{u}')$, де $\bar{u}' \in N_{\varepsilon(\gamma)}$. Тоді

$$\rho(\tilde{\bar{u}}'; \bar{u}') \le \rho(\tilde{\bar{u}}, \bar{u}^0) + \rho(\bar{u}^0; \bar{u}') \le \rho(F(\bar{u}'), F(\bar{u}^0)) + \rho(\bar{u}^0; \bar{u}') \le \gamma + \varepsilon(\gamma).$$

Ця нерівність, що випливає із рівномірної неперервності вектор-функції F на $\bar{R}$, є основною при побудові εS -алгоритму. Із неї випливає, що кожному розв"язку $\bar{u}^0$ рівняння /60/ можна поставити /неоднозначно/ у відповідність послідовність точок $\{\bar{u}_{\bar{u}^0}^{(k)}\}$ таку, що $\bar{u}_{\bar{u}^0}^{(k)} \in \varepsilon_k(\gamma_k)$-сітці, $F(\bar{u}_{\bar{u}^0}^{(k)}) \in \gamma_k$ -сітці в $\bar{R}$ і має місце нерівність

$$\rho\left(\bar{u}_{\bar{u}^0}^{(k)}, F\left(\bar{u}_{\bar{u}^0}^{(k)}\right)\right) \le \gamma_k + \varepsilon_k(\gamma_k) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отже, нехай дано рівняння /60/ і апріорі невідома кількість його розв"язків та місця їх розташування в області $\bar{R}$.

Припустимо, що сітки $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k в області $\bar{R}$ побудовані. Елементи цих сіток відповідно позначимо $\bar{u}_i^{(k)}$ і $\tilde{\bar{u}}_i^{(k)}$, $i = \overline{1,S}$ $(S < \infty)$. Утворимо пари $\Delta_i^{(k)} = (\bar{u}_i^{(k)}, \tilde{\bar{u}}_i^{(k)})$, такі, що
$\tilde{\bar{u}}_1^{(k)} = F(\bar{u}_1^{(k)})$, $\tilde{\bar{u}}_2^{(k)} = F(\bar{u}_2^{(k)})$, ..., $\tilde{\bar{u}}_S^{(k)} = F(\bar{u}_S^{(k)})$.
При кожному k із даного масива відбираємо ті пари, які задовольняють нерівності

$$\rho(\bar{u}_i^{(k)}, F(\bar{u}_i^{(k)})) \le \gamma_k + \varepsilon_k(\gamma_k). \quad /61/$$

Якщо при якому-небудь k таких пар не буде, то це означає, що в області $\bar{R}$ розв"язків немає. Із пар, що задовольняють умові /61/, утворимо ланцюжки за таким правилом. Нехай на k і $k+1$

кроках знайдені відповідно пари
$\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \dots, \Delta_{S_k}^{(k)}$; $\Delta_1^{(k+1)}, \Delta_2^{(k+1)}, \dots, \Delta_{S_{k+1}}^{(k+1)}$.
Тоді парі $\Delta_i^{(k)}$ $(i=\overline{1,S_k})$ відноситься пара $\Delta_j^{(k+1)}$ $(j=\overline{1,S_{k+1}})$, для якої будуть виконуватися умови

$$\rho(\bar{u}_i^{(k)}, \bar{u}_j^{(k+1)}) \le \varepsilon_k(\gamma_k) + \varepsilon_{k+1}(\gamma_{k+1}), \qquad /62/$$

$$\rho(\tilde{\bar{u}}_i^{(k)}, \tilde{\bar{u}}_j^{(k+1)}) \le \gamma_k + \gamma_{k+1}. \qquad /63/$$

Продовжуючи цей процес, можна побудувати множини ланцюжків, кожній із яких буде відповідати своя послідовність $\{\bar{u}_i^{(k)}\}$ а кожному розв"язку - своя множина таких послідовностей. Таким чином, буде здійснюватися відокремлення ізольованих розв"язків системи /60/.

Подальше відокремлення ізольованих розв"язків з метою зіставлення кожному з них единої розв"язувальної послідовності здійснюється за допомогою ітераційних методів, за умови можливого їх застосування, що перевіряється експериментально, або за допомогою достатніх умов теорем існування і збіжності.

Таким чином, суть εS -алгоритма в застосуванні до системи /60/ полягає у генеруванні $\varepsilon_k(\gamma_k)$ -сіток на $\bar{R}$, перетворенні їх елементів за допомогою оператора $F(\bar{u})$ у γ -сітку і перевірці умов /61/ - /63/.

Головними складовими частинами εS -алгоритма, що відбивають його практичні аспекти, е такі:

1. Аналіз та зведення рівняння до вигляду, зручного для застосування εS -алгоритма, в результаті чого здійснюються такі еквівалентні перетворення рівняння, які забезпечать відображення векторфункцією $F(\bar{u})$ області $\bar{R}$ в себе [18].

2. Алгоритм-підпрограма генерування $\varepsilon_k(\gamma_k)$ -сітки в $\bar{R}$.

3. Алгоритм-підпрограма обчислення $F(\bar{u})$ на $\varepsilon_k(\gamma_k)$ -сітці та генерування γ_k -сітки.

4. Алгоритм-підпрограма перевірки умови /61/, що е одночасно і критерієм зупинки процесу реалізації на ЕОМ εS -алгоритма.

5. Алгоритм-підпрограма перевірки умов /62/,/63/. Наведемо основні етапи εS -алгоритма.

1. Задання або визначення параметрів /центру та розмірів/ області $\bar{R}$ розв"язків системи /59/ та характеристики точності розв"язків δ за нормою нев"язки $\bar{u} - F(\bar{u})$, що за умови $\|\bar{u} - F(\bar{u})\| \le \delta^2$ е критерієм зупинки εS -алгоритма або переходу до ітераційного уточнення.

2. Побудова мажорант $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k.

3. Генерування $\varepsilon_k(\gamma_k)$ -сітки, її відображення за допомогою $F(\bar{u})$ у γ_k -сітку та записування точок $\Delta_i^{(k)}$, що задовольняють умові /61/, у масив M_1.

4. За точками масиву M_1 генерування $\varepsilon_{k+1}(\gamma_{k+1})$-сітки та записування точок, що задовольняють умові /61/, у масив M_2.

5. Зіставлення кожній парі $\Delta_i^{(k)} \in M_1$ $(i=\overline{1,s_k})$ таких пар $\Delta_j^{(k+1)}$ $(j=\overline{1,s_{k+1}})$, які разом будуть задовольняти умовам /62/, /63/. Відібрані пари записуються у масиві M_1, звільняючи масив M_2 для генерування елементів нової сітки.

6. Перевірка умови $\|\bar{u} - F(\bar{u})\| \leq \delta$ на предмет зупинки εS -алгоритма або проведення подальших обчислень з підключенням ітераційного процесу.

Щодо величин $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k має місце теорема.

Теорема 6.2. Для будь-якої підобласті $\bar{R}_i^{(k)}$, що містить принаймні один розв"язок системи /60/ і для центра $\bar{u}_i^{(k)}$ якої справедлива умова $F(\bar{u}_i^{(k)}) \in \bar{R}_i^{(k)}$, послідовності $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k визначаються так:

1. Якщо для $\bar{u},\bar{v} \in E_n$ $\rho(\bar{u},\bar{v}) = \max\limits_{1\le i\le n}|u_i - v_i|$, то
$$\varepsilon_k(\gamma_k) = d\cdot 2^{-k},\quad \gamma_k = 2\varepsilon_k(\gamma_k) = d\cdot 2^{-(k-1)};$$
2. Якщо для $\bar{u},\bar{v} \in E_n$, $\rho(\bar{u},\bar{v}) = [\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - v_i)^2]^{1/2}$, то
$$\varepsilon_k(\gamma_k) = d\sqrt{n}\cdot 2^{-k},\quad \gamma_k = 2\varepsilon_k(\gamma_k) = d\sqrt{n}\cdot 2^{-(k-1)}.$$

В роботі розглядається питання про розпаралелювання обчислень при реалізації εS -алгоритма на багатопроцесорних ЕОМ. Обговорюється питання про ітераційне уточнення за допомогою методу Ньютона одержаних наближених розв"язків, а також про обчислювальну похибку, що супроводжує процес відокремлення розв"язків.

Глава У. Числова реалізація процесу відокремлення і наближеного знаходження усіх ізольованих розв"язків деяких класів функціональних рівнянь. Ця глава містить результати числового експерименту щодо розв"язування системи нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю.

У процесі числового експерименту розв"язувалися системи вигляду /59/ із $n=2,3,4,5,6$, що мали від одного до 9 розв"язків, системи із трансцендентними доданками, число розв"язків яких визначалося розмірами заданої області , а також системи рівнянь, число розв"язків яких змінювалося залежно від числових значень параметрів, що входили в систему. Наведемо деякі з них.

Приклад 1. Система рівнянь [14]

$$\begin{cases} u_1 = 0{,}75\,u_1 + 0{,}25 \sin 8u_2, \\ u_2 = u_2 - u_1 u_2 + 0{,}125 \end{cases}$$

розв"язувалась в області $0 \le u_1 \le 1;\ 0 \le u_2 \le 65{,}2$. Із точністю 10^{-7} за нев"язкою були знайдені всі розв"язки, частину із яких наводимо:

u_1	u_2	u_1	u_2
0,89753945	0,13926964	0,0176784	7,0707984
0,3[illegible]067167	0,34657559	0,0167579	7,4591877
....	....	....	....
....	....	....	....
0,01873068	6,67854292	0,0019175	65,1882872

Приклад 2. При вивченні властивостей динамічних моделей, запропонованих В.М.Глушковим, виникла задача відшукання розв"язків системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = a_1 u_4 (1-u_4) - a_2 u_3, \\ u_2 = a_1 u_1 (1-u_1) - a_2 u_4, \\ u_3 = a_1 u_2 (1-u_2) - a_2 u_1, \\ u_4 = a_1 u_3 (1-u_3) - a_2 u_2 \end{cases}$$

при різних значеннях параметрів a_1 і a_2 в області $0 \le x_i \le 1;\ i=\overline{1,4}$.

1. При $a_2 = 0{,}01$, $a_1 = (1+\sqrt{6})(1-a_2)$ система має 4 розв"язки

u_1	u_2	u_3	u_4
0,0	0,0	0,0	0,0
0,45677587	0,83897860	0,45677587	0,83897860
0,70424553	0,70424553	0,70424553	0,70424553
0,83897861	0,45677586	0,83897860	0,45677585

2. При $a_2 = 0{,}01$, $a_1 = (1+\sqrt{6})(1+a_2)$ система має 8 розв"язків

u_1	u_2	u_3	u_4
0,0	0,0	0,0	0,0
0,41851631	0,83927871	0,46576937	0,85852106
0,43996035	0,84993785	0,43995998	0,84993785
....	....	....	....
0,85852103	0,41851637	0,83927874	0,46576929

При $a_2 = 0{,}01$, $a_1 = 4(1+a_2)$ система має 16 розв"язків

u_1	u_2	u_3	u_4
0,0	0,0	0,0	0,0
0,03384469	0,12208721	0,43267682	0,99046848
0,04705429	0,17128676	0,57299700	0,98675927
....	....	....	....
0,80184268	0,65913858	0,92376962	0,27810468
....	....	....	....
0,99046819	0,03381469	0,12208721	0,43267682

Проводилося багато експериментів щодо розв"язування систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, що виникають в результаті дискретизації неперервних задач, зокрема при розв"язуванні нелінійних інтегральних рівнянь методом вироджених ядер та методом механічних квадратур. Деякі з них ми наведемо нижче.

Для практичної реалізації процесу відокремлення ізольованих розв"язків нелінійних інтегральних рівнянь розроблено відповідний алгоритм. Наведемо головні його етапи.

1. Вибирається розмірність n апроксимуючого підпростору і визначається наближена схема.

2. Конструюється послідовність апроксимаційних рівнянь, у даному випадку це системи нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

3. Одержана система зводиться до вигляду, зручного для застосування $\mathcal{E}\mathcal{S}$ -алгоритма, за допомогою якого знаходяться усі ізольовані розв"язки в заданій області.

4. За даними фіксованими n і знайденими відповідними їм розв"язками v обчислюються і виражаються через шуканий радіус r /кулі єдиності/ величини η_2, η_3, M, m, N.

5. На основі цих величин складається система нерівностей /5/, /6/ або ж /33/,/34/, з яких утворюються скалярні рівняння відносно r, корені яких знаходяться $\mathcal{E}\mathcal{S}$ -алгоритмом.

6. Перевіряється сумісність системи нерівностей /5/,/6/ або /33/,/34/. Якщо область сумісності пуста, то збільшується n і процес повторюється.

7. Якщо ж для кожного v, що відповідає тому чи іншому n, область сумісності не пуста, то задача відокремлення розв"язків вважається реалізованою. Як результат видається для кожного v свій інтервал значень радіуса r кулі єдиності розв"язку $u^*(x)$ вихідного рівняння і числова величина апостеріорної оцінки похибки.

Наведений алгоритм функціонує в автоматизованому режимі. Найбільш трудомісткі процеси щодо знаходження усіх ізольованих розв"язків указаних вище систем і скалярних рівнянь, а також генерування таких систем реалізуються в автоматичному режимі за допомогою спеціально створеного алгоритмічного і програмного забезпечення. Наведемо приклад реалізації вказаного алгоритма.

Ставилася задача відокремити усі ізольовані розв"язки нелінійного інтегрального рівняння із додатнім у квадраті $0 \le x, y \le 1$ ядром

$$u(x) = \frac{1}{8}\int_0^1 (x+3)e^{-xy}u^3(y)\,dy + e^{-x}\left(1+\frac{1}{8e^3}\right) - \frac{1}{8},$$

що має одним із своїх точних розв"язків функцію e^{-x}, тобто $u^*(x) = e^{-x}$ [15].

Заміна в цьому рівнянні функцій e^{-xy}, e^{-x} відповідно n -м і $(n+1)$ -м відрізками їх розкладу в ряди Маклорена приводить до апроксимаційного рівняння

$$u_n(x) = \frac{1}{8}\int_0^1 (x+3)\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^k y^k}{k!}\right] u_n^3(y)\,dy + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\left(1+\frac{1}{8e^3}\right) - \frac{1}{8},$$

розв"язок якого записується у вигляді полінома

$$u_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n .$$

Були згенеровані і за допомогою $\varepsilon\varsigma$ -алгоритма вирішені системи при n = 3,4,5,6,7,8. У кожному випадку одержано три розв"язки. Так, при n = 6 система і розв"язки мали вигляд

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2880}(-3\beta_0 + 4p), \\ a_1 = \frac{1}{960}(5\beta_1 - 3\beta_0 - 8p), \\ a_2 = \frac{1}{192}(3\beta_2 - 4\beta_1 + 8p), \\ a_3 = -\frac{1}{48}(3\beta_3 - 3\beta_2 - 8p), \\ a_4 = \frac{1}{16}(3\beta_3 - 2\beta_4 + 8p), \\ a_5 = \frac{1}{8}(\beta_5 - 3\beta_4 - 8p), \\ a_6 = \frac{1}{8}(3\beta_5 + 8p - 1). \end{cases}$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{13} \frac{\alpha_j}{25-i-j}, \quad i = \overline{0,5},$$

$$p = 1 + \frac{1}{8e^3} = 1{,}0062234.$$

$\alpha_j = \alpha_j(a_0, a_1, \ldots, a_6)$ - коефіцієнти розкладу полінома $(a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6)^3$.

$a_0^{(1)} = 0{,}001383$	$a_0^{(2)} = 0{,}001226$	$a_0^{(3)} = 0{,}002714$
$a_1^{(1)} = -0{,}00833$	$a_1^{(2)} = -0{,}007829$	$a_1^{(3)} = -0{,}012324$
$a_2^{(1)} = 0{,}041666$	$a_2^{(2)} = 0{,}039460$	$a_2^{(3)} = 0{,}057605$
$a_3^{(1)} = -0{,}166667$	$a_3^{(2)} = -0{,}159860$	$a_3^{(3)} = -0{,}206225$
$a_4^{(1)} = 0{,}500000$	$a_4^{(2)} = 0{,}490510$	$a_4^{(3)} = 0{,}497173$
$a_5^{(1)} = -1{,}000002$	$a_5^{(2)} = -1{,}030485$	$a_5^{(3)} = -0{,}507036$
$a_6^{(1)} = 1{,}000010$	$a_6^{(2)} = 1{,}593255$	$a_6^{(3)} = -1{,}794393$

Результати обчислення величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \mu_n, m_n, \mu, m, N$ поміщені в таблиці.

Допустимі області зміни радіусів куль единості розв"язків мають вигляд

$$0{,}00856 \le r(u_5^{(1)}) \le 0{,}1525$$

$$0{,}00461 \le r(u_6^{(2)}) \le 0{,}109$$

$$0{,}00357 \le r(u_5^{(3)}) \le 0{,}332$$

Таблиця результатІв обчислення характеристик рІвняння

u_n^i	u_5^2	u_6^2	u_5^3
η_1	0,0004045	0,0000802	0,00I936
$\eta_2(t)$	0.00369II t^2 + 0.0048528 t + 0.00I5950	0.0005676 t^2 + 0.00I38887 t + 0.0008494	0.00369II t^2 + 0.0I4I859 t + 0.0I3668I
$\eta_3(t)$	0.0022258 t + 0.00I4632	0.00II352 t + 0.00I3887	0.0022258 t + 0.004288I
$N(t)$	2.0993320 t + I,3800I60	2.098I229 t + 2.5666889	2.0993320 t + 4.0397753
M_n	I.I585055	2.0725672	3.8288I53
$M(t)$	2.I007973 t^2 + I.3834059 t + I.I60I005	2.0975553 t^2 + 2.5666882 t + 2.0734I66	2.I007973 t^2 + 4.049678I t + 3.8424834
m_n	0.5I3863I	0.5495837	2.4600350
$m(t)$	-2.I007973 t^2 - I.3834059 t + 0.5I2268I	-2.0975553 t^2 - 2.5666882 t + 0,5440594	-2.I007973 t^2 - 4.049678I t + 2.4463669

Аналогічний числовий експеримент було проведено при наближеному розв"язанні методами вироджених ядер та механічних квадратур НІР

$$u(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \sin xy\, u^3(y)dy + \frac{1}{4}\sin x .$$

У випадку методу вироджених ядер відокремлення розв"язків здійснювалося при $n = 2$. Наближені розв"язки у цьому випадку мають вигляд

$$u_1^*(x) = 0,2505\,x - 0,04173\,x^3 ,$$
$$u_2^*(x) = 4,97142\,x - 0,58962\,x^3 ,$$
$$u_3^*(x) = -5,19371\,x + 0,59084\,x^3 .$$

Інтервали (r_1, r_2) зміни радіуса r мають вигляд

$$0,00085 \le r(v_1) \le 1,2$$
$$0,027 \le r(v_2) \le 1,0$$
$$0,0235 \le r(v_3) \le 1,85$$

Нарешті, були проведені чисельні експерименти щодо розв"язування задач глобальної оптимізації. Наведемо один із прикладів цієї серії.

Знайти мінімум функції $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ у кубі $-2 \le u_1, u_2, u_3 \le 2$.

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = u_1^4 + u_2^4 - u_3^3 + 2u_1^3 u_2 - 9u_1 u_2 + 7u_2 u_3 + \\ + 3u_3^2 + \frac{13}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{23}{4}u_3 + \frac{1}{8}$$

Відповідна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 4u_1^3 + 6u_1^2 u_2 - 9u_2 + \dfrac{13}{4} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 4u_2^3 + 2u_1^3 - 9u_1 + 7u_3 + \dfrac{1}{4} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_3} = -3u_3^2 + 7u_2 + 6u_3 - \dfrac{23}{4} = 0 \end{cases}$$

Шукане значення мінімуму функції $\varphi^* = -37,7235$ у точці /-1,1255; -1,75244; 2/.

Числові експерименти щодо знаходження розв"язків систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь проводилися сумісно з Д.Б.Шевчук, якій автор за це щиро вдячний.

Усі інші обчислення, необхідні для знаходження інтервалів радіусів куль, здійснювались автором.

На закінчення висловлюю щиру подяку моєму науковому консультанту академіку В.С.Михалевичу за постійну увагу до роботи і обговорення результатів.

Основні результати дисертації викладені у таких роботах.

1. Бабич М.Д., Иванов В.В. Оценка полной погрешности при решении нелинейных операторных уравнений методом простой итерации // ЖВМ и МФ.- 1967.- 7, № 5.- С. 988 - 1000.

2. Бабич М.Д., Иванов В.В. Исследование полной погрешности в задачах минимизации при наличии ограничений // УМЖ.- 1969.- 21, № 1.- С. 3 - 14.

3. Бабич М.Д. Оценка полной погрешности при минимизации квадратичного функционала в шаре // УМЖ.- 1970.- 22, № 3.- С. 300 - 312.

4. Бабич М.Д. К оценке некоторых псевдоопераций // Математическое обеспечение ЭВМ.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1971.- С. 261 - 270.

5. Бабич М.Д. Анализ точности некоторых итерационных процессов // Оптимизация вычислений.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1975.- С. 57- 60.

6. Бабич М.Д. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений // Вопросы оптимизации вычислений.- Киев : О-во "Знание" УССР, 1976.- С. 17 - 19.

7. Бабич М.Д. Исследование вопроса точности в модульном программировании // Оптимизация вычислений и технология программирования.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1978.- С. 14 - 21.

8. Бабич М.Д., Грицак Л.И. О построении реального итерационного процесса решения интегральных уравнений на ЭВМ // Оптимизация вычислений.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1979.- С. 72 - 79.

9. Оптимизация вычислений /Решение некоторых классов уравнений/ /М.Д.Бабич, П.Н.Бесараб, И.Д.Добра, В.В.Иванов.- Киев, 1979.- 54с.- / Препр./ АН УССР. Ин-т кибернетики; 79-54/.

10. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. О приближенном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений //Оптимизация вычислений и численный анализ.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1980.- С. 23 - 30.

11. Бабич М.Д., Иванов В.В., Сергиенко И.В. О некоторых проблемах развития специального математического обеспечения в сетях вычислительных центров.- Киев, 1980.- 45 с.-/Препр./АН УССР. Ин-т кибернетики; 79-54/.

12. Бабич М.Д., Иванов В.В., Шевчук Л.Б. О некоторых принципах создания информационно- оптимизационной системы специального математического обеспечения //УСиМ.- 1981.- № 2.- С. 82 - 88.

13. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. Об оптимизации вычислений при численном решении систем нелинейных уравнений //Методы прикладного программирования.- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1981.- С. 30 - 36.

14. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений //Кибернетика.- 1982.- № 2.- С. 74 - 79.

15. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. О численном решении систем нелинейных уравнений на многопроцессорных ЭВМ //Тр. 5-й Всесоюз. шк-семинара "Параллельные вычисления и высокопроизводительные системы".- Киев, 1982.- С. 55 - 58.

16. Бабич М.Д. Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений //Тр. 3-го респ. симпоз. по дифференциальным и интегральным уравнениям.- Одесса, 1982.- С. 108 - 109.

17. Бабич М.Д., Дульская В.А., Шевчук Л.Б. Об оптимизации вычислений при приближенном решении некоторых нелинейных задач //Тез. докл. 3-й респ. конф. "Вычислительная математика в научно- техническом прогрессе".- Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1982.- С. 189 - 190.

18. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. Об опыте глобального приближенного решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений //Эффективная организация вычислений и численные методы.- Киев : Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1983.- С.79 - 86.

19. Бабич М.Д. Об одном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений //Тр. респ. конф. "Интегральные уравнения в прикладном моделировании".- Киев, 1983.- С.19 - 20.

20. Бабич М.Д.О распараллеливании вычислений при решении систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений //"Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации": Докл. и сообщ. 3-го симпоз.-Таллинн, 1984.- С.176 - 177.

21. Бабич М.Д. О теоремах существования при приближенном решении нелинейных операторных уравнений // Оптимизация алгоритмов программного обеспечения.- Киев : Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1985.- С.12 - 15.

22. Бабич М.Д., Шевчук Л.Б. О численном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений // Оптимизация численных методов решения задач на ЭВМ.- Киев : Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1986.- С.4 - 6.

23. Бабич М.Д. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений и апостериорных оценках погрешности //Тр. респ. конф. "Интегральные уравнения в прикладном моделировании".- Киев, 1986.- С. 15 -16.

24. Бабич М.Д. Аппроксимационно-итерационный метод решения не-

линейных операторных и функциональных уравнений в пространстве Гильберта и теоремы существования / Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР. — Киев, 1986. — Деп. в ВИНИТИ 28.12.86, №8970-В86.

25. Бабич М. Д. Об отделении решений нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Вопросы оптимизации вычислений: Тез. докл. Всесоюз. семинара, Алушта, 6—8 окт. 1987 г. — Киев : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1987. — С. 17—18.

26. Бабич М. Д., Корниенко Г. М., Шевчук Л. Б. О тестировании программного обеспечения решения одного класса экстремальных задач // Тез. докл. 5-й науч. конф. «Методы математического программирования и программное обеспечение». — Свердловск : УрО АН СССР, 1987. — С. 13—14

27. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. О приближенной схеме решения одного класса нелинейных интегральных уравнений // Пакеты прикладных программ и численные методы. — Киев : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1988. — С. 61—65.

28. Бабич М. Д. Распараллеливание вычислений при приближенном решении систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений // Тр. Всесоюз. шк.-семинара «Распараллеливание обработки информации. — Львов. 1989. — С. 169—170.

29. О тестировании алгоритмов решения задач вычислительной математики / М. Д. Бабич, А. И. Березовский, П. Н. Бесараб, В. К. Задирака // Тез. докл. 6-й науч конф. «Методы математического программирования и программное обеспечение». — Свердловск : УрО АН СССР, 1989. — С. 12—13.

30. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. О приближенном решении некоторых классов экстремальных задач // Численные методы и технология разработки ППП. — Киев : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1990. — С. 56—61.

31. Бабич М. Д. О приближенном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений. — Киев, 1991. — 34 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 91-15).

32 Бабич М. Д. Об одном аппроксимационно-итерационном методе решения нелинейных операторных уравнений // Кибернетика. — 1991. — №1. — С. 21—28.

33. Бабич М. Д. Об отделении и приближенном нахождении изолированных решений нелинейных интегральных уравнений. — Киев, 1992. — 27 с. — (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 92-31).

34. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений методом механических квадратур / Разработка математического и программного обеспечения ППП и решение задач дискретной оптимизации. — Киев : Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины. — 1992. — С. 47—51.

Підп. до друку 30.12.92. Формат 60×84/16. Папір кн.-журн. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб. 1,75. Обл.-вид. арк. 2,0. Тираж 100. Зам. 260.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40