МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. Э. РАСУЛЗАДЕ

На правах рукописи

НАСИРОВА ТАМИЛЛА ИЛАЛ кызы

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЭКРАНА

01.01.05—Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Баку—1993

Работа выполнена в Бакинском государственном университете имени М. Э. Расулзаде.

Научный консультант:

акад. АН Украины **Скороход А. В.**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Шуренков В. М.,**

доктор физико-математических наук, профессор **Анисимов В. В.,**

доктор физико-математических наук, профессор **Братийчук Н. С.**

Ведущее предприятие-Институт кибернетики АН Украины

Защита диссертации состоится «09» марта 1993 г. в ______ час на заседании специализированного совета Д 01650.01 при Институте математики АН Украины.
Адрес: 252601, Киев-4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан «29» Января 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета, доктор физико-математических наук, профессор **ГУСАК Д. В.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию полумарковских процессов, построенных по суммам независимых случайных величин при наличии экрана в нуле. Типичным представителем таких процессов является процесс полумарковского блуждания, у которого через случайные времена происходят скачки случайного размера. В точке нуль имеется задерживающий экран. Попав в состояние "0", процесс находится там, пока не придет положительный скачок. Математическая теория таких процессов, а также методы решения задач, связанных с такими процессами, имеют важное значение для теории массового обслуживания, теории надежности и управления запасами.

Цель работы

I. Изучение распределений процессов полумарковского блуждания, процессов полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, суммарного процесса полумарковского блуждания, суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана.

2. Изучение основных граничных функционалов процессов полумарковского блуждания без экрана и с задерживающим экраном в нуле, суммарного процесса полумарковского блуждания без экрана и с задерживающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана.

3. Изучение асимптотического поведения процессов полумарковского блуждания без экрана и с задерживающим экраном в нуле, суммарного процесса полумарковского блуждания без экрана и с задержи-

вающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана, когда снос процесса не направлен вниз,

4. Доказательство эргодической теоремы для процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, для суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, для сложного процесса полумарковского процесса с отражающим экраном в нуле, для сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана.

5. Вычисление эргодического распределения процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле,суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле, сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана.

6. Доказательство предельных теорем для процессов полумарковского блуждания,для суммарного процесса полумарковского блуждания.

Научная новизна результатов

I. Приведение изучения процессов с экраном к изучению процесса без экрана.

2. Введение момента первого попадания процесса в точку нуль для изучения распределения процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле и его основных граничных функционалов.

3. Введение момента первого появления отрицательного скачка суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле для изучения распределения самого процесса и его основных граничных функционалов.

4. Доказательство эргодической теории для сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана, нахождение явного вида эргодического распределения для сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана.

5. Доказательство предельных теорем для процессов полумарковского блуждания, суммарного процесса полумарковского блуждания.

Практическая ценность работы следующая:

I. Полученные результаты позволяют найти следующие характеристики для одноканальных систем обслуживания, когда промежутки между двумя последовательными поступлениями требований и длины обслуживания имеют произвольные функции распределения, размер поступающей группы и размер обслуживаемой группы-произвольно распределенные случайные величины:

а) распределение длины очереди,

б) распределение максимальной длины очереди,

в) совместное распределение момента первого пересечения уровня и перескока через этот уровень,

г) распределение периода занятости системы,

д) совместное распределение супремума и значения длины очереди,

в) предельное распределение функционала от длины очереди в схеме серий.

2. Полученные результаты позволяют найти основные характеристики в теории надежности в случае системы резервирования с восстановлением, когда длительность жизни элемента и длительность ремонта элемента-произвольно распределенные независимые случайные величины, размер группы выходящих из строя элементов и размер группы восстанавливаемых элементов случайны.

3. Полученные результаты позволяют найти подобные характеристики в теории управления запасами в случае с задалживанием спроса и без задалживания спроса.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре кафедры "Теория вероятностей и математической статистики" Бакинского государственного университета им.М.Э.Расулзаде, на семинаре отдела "Вероятностно-статистические методы" ИК АН Азербайджанской республики, на семинаре кафедры "Теория вероятностей и математической статистики" Московского госуниверситета им.М.В.Ломоносова, на семинаре кафедры "Теория вероятностей и математической статистики" Ташкентского госуниверситета им.В.И.Ленина. Различные разделы диссертации докладывались на международных конференциях и симпозиумах (Вильнюс,1977,1981,Тбилиси 1982,Фергане1983,Киев 1991).

Публикация. Основные результаты работы отражены в [3, 4, 6-13] . Основные результаты изданы в двух монографиях [14, 15]

Обьем работы. Диссертационная работа изложена в 236 страницах, включая 6 рисунков. Библиографический список насчитывает III наименований.

Содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения (глава I), 10 глав, заключения и списка литературы. Во введении дан краткий обзор исследований, относящихся к рассматриваемой в диссертационной работе проблеме. Здесь сформулированы тема и цель диссертационной работы, обосновывается ее актуальность, новизна и практическая ценность полученных результатов. Кратко изложено основное содержание работы по главам.

Прежде чем излагать результаты диссертационной работы по главам дадим определения исследуемых процессов.

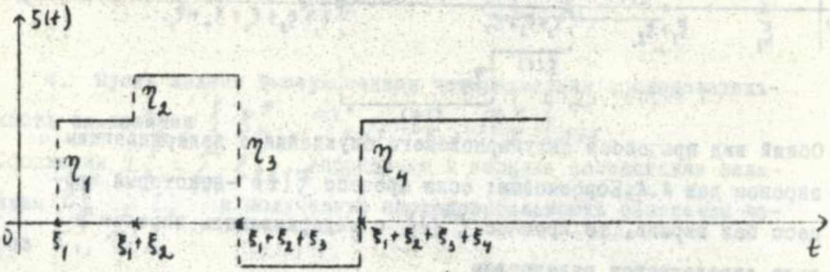
I. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин $\{\xi_k, \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\xi_k > 0$.

Определение I. Процесс

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k, \quad \text{если} \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \le t < \sum_{k=1}^{m} \xi_k \qquad (1)$$

называется процессом полумарковского блуждания.

Одна из его реализаций имеет вид:



Если через $\nu(t)$ обозначить число скачков процесса $\sum_{k<t+1} \xi_k$ на отрезке $[0, t]$, то равенство (I) можно записать следующим образом:

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \eta_k .$$

2. Пусть задана вышеуказанная последовательность пар случайных величин $\{\xi_k, \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 2. Процесс

$$\zeta^*(t) = \zeta_k, \quad \text{если} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \le t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k ,$$

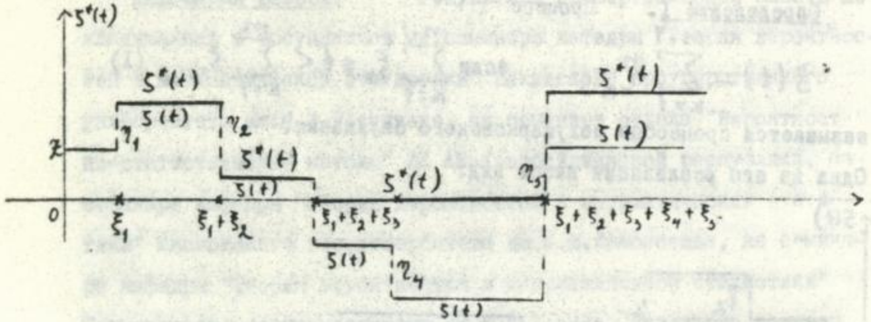
где

$$\zeta_k = \max(0, \zeta_{k-1} + \eta_k), \ k \ge 1,$$

$$\zeta_0 = z$$

называется процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле.

Одна из его реализаций имеет вид:



Общий вид процессов полумарковского блуждания с задерживающим экраном дан А.А.Боровковым: если процесс $\xi(t)$ -некоторый процесс без экрана, то процесс $\xi^*(t)$ с задерживающим экраном в нуле определяется равенством

$$\xi^*(t) = \xi(t) - \inf_{0\le s\le t}(0, \xi(s)).$$

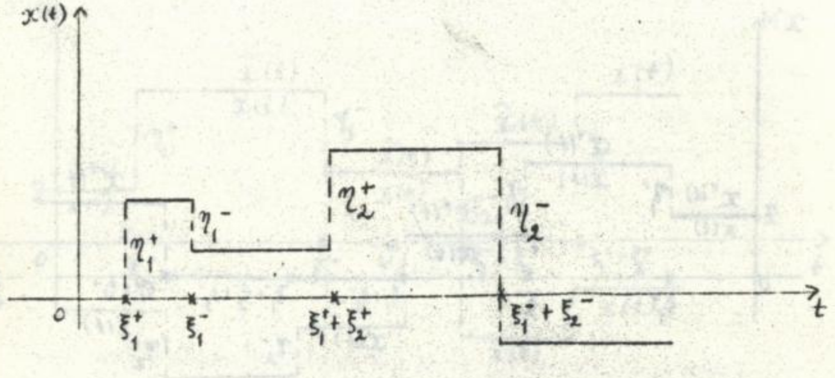
3. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ задана четырехмерная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k^+, \eta_k^+; \xi_k^-, \eta_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, где $\xi_k^+>0$, $\xi_k^->0$, $\eta_k^->0$ и $\eta_k^-<0$.

Построим процессы полумарковского блуждания

$$\mathcal{X}^{\pm}(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^{\pm}, \text{ если } \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^{\pm} \le t < \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{\pm}.$$

<u>Определение 3</u>. Процесс $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}^+(t) + \mathcal{X}^-(t)$ называется суммарным процессом полумарковского блуждания (СППб).

Одна из его реализаций имеет вид:



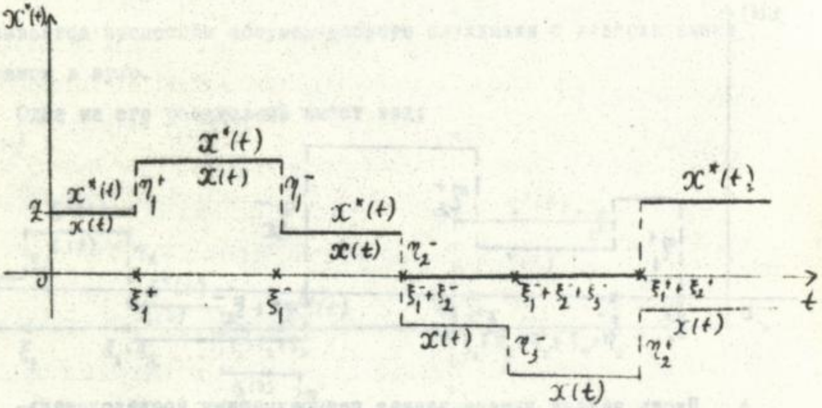
4. Пусть задана вышеуказанная четырехмерная последовательность сл.величин $\{\xi_K^+, \eta_K^+; \xi_K^-, \eta_K^-\}_{K=1}^{\infty}$.
Обозначим $\tau_K^\pm = \sum_{i=1}^{K} \xi_i^\pm$. Упорядочим в порядке возрастания величины τ_K^+, τ_K^- и полученную последовательность обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots$

Пусть

$$\eta_K = \begin{cases} \eta_i^+, & \text{если } \tau_K = \tau_i^+, \\ \eta_j^-, & \text{если } \tau_K = \tau_j^-. \end{cases}$$

<u>Определение 4</u>. Процесс $x^*(t) = \zeta_K$, если $\tau_K \le t < \tau_{K+1}$,
где $\zeta_K = max(0, \zeta_{K-1} + \eta_K)$, $\zeta_0 = z$,
называется суммарным процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле.

Одна из его реализаций имеет вид:



5. Опять пусть вышеуказанная четырехмерная последовательность случайных величин

$$\left\{ \xi_K^+,\ \eta_K^+;\ \xi_K^-,\ \eta_K^- \right\}_{K=1}^{\infty}.$$

Обозначим

$$\nu^{\pm}(t) = \min \left\{ K : \sum_{i=1}^{K+1} \xi_i^{\pm} > t \right\}.$$

Определение 5. Процесс

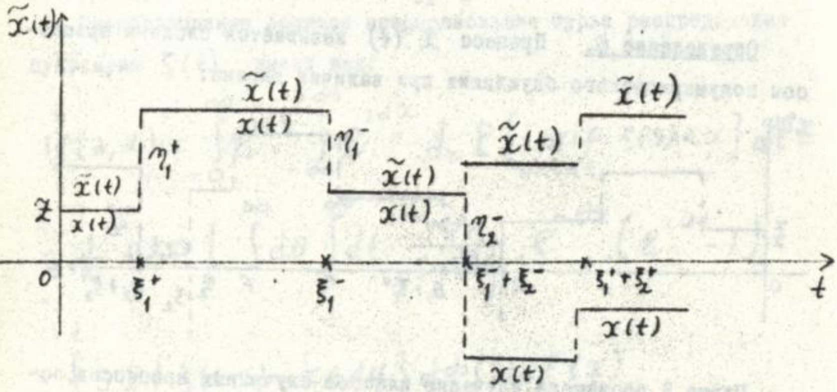
$$\tilde{x}(t) = \zeta'_{K-1} + \eta^+_{\nu^+(\tau^-_{K-1}+0)-1} + \dots + \eta^+_{\nu^+(t)}, \text{ если } \tau^-_{K-1} \le t < \tau^-_K,$$

где

$$\zeta'_K = \left| \zeta'_{K-1} + \eta^+_{\nu^+(\tau^-_{K-1}+0)} + \dots + \eta^+_{\nu^+(\tau^-_K)} - \eta^-_K \right|.$$

называется сложным процессом полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле.

Одна из его реализаций имеет вид:



6. Зададим последовательность независимых равномерно распределенных на $[0,1]$ величин $\{\Delta_K,\ K=1,2,\dots\}$ и неотрицательные измеримые функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ из R^2 в R_+. Пусть $x(0)=z\geq 0$. Обозначим через θ_1 первый момент, для которого $z+x(t)\leq 0$. Если $z=0$, то $\theta_1=0$. Положим $\zeta_1 = z + x(\theta_1)$,

$\xi_1^\circ = \varphi(\Delta_1, \zeta_1)$, $\eta_1^\circ = \psi(\Delta_1, \zeta_1)$.

Предположим, что для $i<K$ величины θ_i, ζ_i, ξ_i° и η_i° определены , $K\geq 2$. Тогда θ_K -первый момент, больший, чем $\theta_{K-1}+\xi_{K-1}^\circ$, для которого

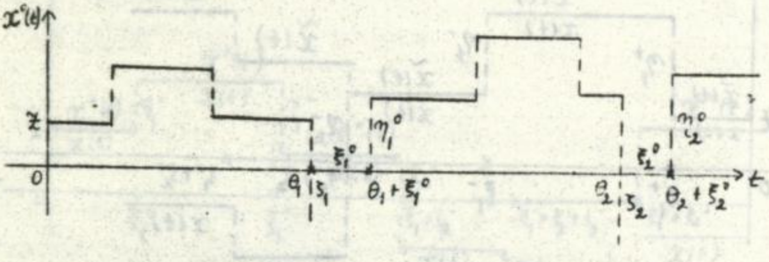
$$\eta_{K-1}^\circ + x(\theta_K) - x(\theta_{K-1}+\xi_{K-1}^\circ)\leq 0 ,$$

$$\zeta_{K-1}^\circ = \eta_{K-1}^\circ + x(\theta_K) - x(\theta_{K-1}+\xi_{K-1}^\circ),\ \xi_K^\circ = \varphi(\Delta_K,\zeta_K),\ \eta_K^\circ = \psi(\Delta_K,\zeta_K).$$

Полагаем

$$x^\circ(t) = \begin{cases} z + x(t), & \text{если } 0<t<\theta_1, \\ 0, & \text{если } \theta_1\leq t\leq \theta_1+\xi_1^\circ, \\ \eta_K^\circ + x(t) - x(\theta_K+\xi_K^\circ), & \text{если } \theta_K+\xi_K^\circ < t < \theta_{K+1}, \\ 0, & \text{если } \theta_K \leq t \leq \theta_K + \xi_K^\circ . \end{cases}$$

Определение 6. Процесс $x^\circ(t)$ называется сложным процессом полумарковского блуждания при наличии экрана.



Глава 3 посвящена изучению классов случайных процессов, построенных по суммам независимых случайных величин.

В § 3.1 дано определение процессов $\zeta(t)$ и $x(t)$.

В § 3.2 изложен метод решения уравнения типа свертки на полуоси.

В 3.3 найдены преобразования Лапласа распределения процесса $\zeta(t)$ и распределений его основных граничных функционалов.

Преобразование Лапласа преобразования Фурье распределения имеет следующий вид:

$$\tilde{\tilde{R}}(\lambda,\alpha)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d_x P\{\zeta(t)<x\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-\tilde{\varphi}(\lambda)}{1-\tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda,\alpha)},$$

где

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,P\{\xi_1\in dt\},$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,P\{\xi_1\in dt,\eta_1\in dx\}$$

Преобразование Лапласа преобразования Фурье распределения супремума $\zeta(t)$ имеет вид:

$$\tilde{\tilde{Q}}(\lambda,\alpha)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}d_x P\{\sup_{0\le s\le t}\zeta(s)<x\}dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\exp\{\int_\lambda^\infty d\theta\int_0^\infty dt\cdot\frac{\theta}{1-\varphi(\theta)}e^{-\theta t}(e^{iu\alpha}-1)\times$$

$$\times\int_0^t s P\{\zeta(t-s)-x\in du\}d\varphi(s)dF(x),$$

где $\varphi(t)=P\{\xi_1<t\},\ t>0,\ F(x)=P\{\eta_1<x\},\ x\in(-\infty,+\infty)$.

Преобразование Лапласа совместного распределения момента τ_x и величины перескока γ_x процесса $\zeta(t)$ имеет вид:

$$\tilde{N}(\lambda,y,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_t P\{\tau_x<t,\ \gamma_x>y\}=$$

$$=\frac{\lambda}{1-\varphi(\lambda)}\int_0^x\int_{-\infty}^x\alpha(\lambda,y+\beta-u)d_u q_-(\lambda,u)d\tilde{\tilde{Q}}(\lambda,\beta),$$

где

$$\alpha(\lambda,du)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P\{\xi_1\in dt,\ \eta_1\in du\},$$

$$q_-(\lambda,x)=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_t P\{\sup_{0\le s\le t}[-\zeta(s)]<-x\}$$

Найдено преобразование Лапласа совместного распределения инфимума, супремума и значения процесса

$$\tilde{H}(\lambda; a, b; a_1, b_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{ \inf_{0\le s\le t} \xi(s) > a, \sup_{0\le s\le t} \xi(s) < b,$$

$$\xi(t) \in (a_1, b_1)\} dt = \tau_\lambda(a_1, b_1) -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda^+(b, dy) \left[\tau_\lambda((a_1 - b - y, b_1 - b - y)) - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\lambda^+ (a - b - y,\right.$$

$$dz)\, \tau_\lambda((a_1 - a - x, b_1 - a - x))\Big] - \int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda^-(a, dy) \Big[\tau_\lambda((a_1 - a - y,$$

$$\left. b_1 - a - y)) - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\lambda^- (b - a - y, dx)\, \tau_\lambda((a_1 - b - x, b_1 - b - x))\right],$$

где

$$G_\lambda^\pm(b, A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\lambda^\pm(b, dy_0)\, \Gamma_\lambda^\pm(a - b - y_0, dy_1) \ldots$$

$$\ldots \Gamma_\lambda^\pm(b - a - y_{k-1}, A),$$

$$\Gamma_\lambda^\pm(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \Gamma^\pm(x, dt, B),$$

$$\Gamma^+(x, A, B) = P\{ \tau_x(\xi) \in A,\ \gamma_x(\xi) \in B \},$$

$$\Gamma^-(x, A, B) = P\{ \tau_x(-\xi) \in A,\ \gamma_x(-\xi) \in B \},$$

$$\tau_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{ \xi(t) \in A \} dt,$$

A, B — борелевские множества.

В § 3.4 найдены преобразования Лапласа распределения процесса $x(t)$ и распределений его основных граничных функционалов.

Преобразование Фурье распределения процесса $x(t)$ имеет вид:

$$A(t,\alpha) = Me^{i\alpha x(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_+^{(k)}(\alpha) P\{\nu^+(t)=k\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} f_-^{(k)}(\alpha) P\{\nu^-(t)=k\},$$

где

$$\nu^{\pm}(t) = \inf\{k: \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i^{\pm} > t\}, \quad f^{\pm}(\alpha) = Me^{i\alpha\eta_1}.$$

Преобразование Лапласа распределения процесса $x(t)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{Q}(\lambda, x/z,h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P\{\sup_{0\le s\le t} x(s) < x / x(0)=z, \xi_1^+ = h\} dt =$$

$$= \tilde{B}_0(\lambda, x/z,h) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x}(n)\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}(n)\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\lambda, x, dy_1, du_1/z,h)\dots$$

$$\dots \tilde{B}(\lambda, x, dy_n, du_n/y_{n-1}, u_{n-1})\tilde{B}_0(\lambda, x/y_n, u_n),$$

где

$$\tilde{B}_0(\lambda, x/z,h) =$$

$$= \varepsilon(x-z)\int_0^h e^{-\lambda t}[1-\Phi_-(t)]dt + \int_h^{\infty} e^{-\lambda t}[1-\Phi_-(t)] \times$$

$$\times \int_0^\infty P\{ x^+(t-h) < x - z - \delta \} \, d f_+(\delta),$$

$$\tilde{B}(\lambda, x, y, u / z, h) = \varepsilon(x-z) f_-(y-z) \int_{h-u}^{h} e^{-\lambda t} p_-(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{x-z} f_-(y-\beta-z)\, d_\beta \sum_{k=1}^{\infty} f_+^{*(k-1)}(\beta) \int_h^\infty e^{-\lambda t} p_-(t) \times$$

$$\int_0^{t-h} [\phi_+(t-h-\tau+u) - \phi_+(t-h-\tau)]\, d\phi_+^{*(k-2)}(\tau).$$

Найдено преобразование Лапласа совместного распределения момента первого пересечения некоторого уровня x и перескока через этот уровень процессом $x(t)$, в котором коэффициент $\tilde{B}_0(\lambda, x, y / z, h)$ заменяется функцией

$$\tilde{C}_0(\lambda, x, y / z, h) =$$

$$= \int_0^\infty [1-\phi_-(t)][\varepsilon(h-t)\varepsilon(x+y-z) + \varepsilon(t-h) \int_0^\infty P\{ x^+(t-h) >$$

$$> x + y - z \} \, d f_+(\beta).$$

Найдено выражение преобразования Лапласа совместного распределения инфимума, супремума и значения процесса $\xi(t)$, в котором коэффициент $\tilde{B}_0(\lambda, x, y / z, h)$ заменяется через

$$\tilde{\mathfrak{D}}_0(\lambda, a, b, x, y/z, h) = \varepsilon(x-z)\int_0^h e^{-\lambda t}[1-\Phi_-(t)]dt +$$

$$+\int_h^\infty e^{-\lambda t}[1-\Phi_-(t)]\int_0^\infty P\{x^+(t-h)<y-z-\beta\}dF_+(\beta),$$

а коэффициент $\tilde{B}(\lambda, x, y/z, h)$ заменяется через

$$\tilde{\mathfrak{D}}(\lambda, a, x, y, u/z, h) = \varepsilon(x-z)F_-(y-z)\int_{h-u}^h e^{-\lambda t} p_-(t)dt +$$

$$+\int_{a-z}^{x-z} F_-(y-z-\beta)\, d_\beta \sum_{k=1}^\infty F_+^{*(k-1)}(\beta)\int_h^\infty e^{-\lambda t} p_-(t) \times$$

$$\int_0^{t-h}[\Phi_+(t-h-\tau+u)-\Phi_+(t-h-\tau)]\,d\Phi_+^{*(k-2)}(\tau)\,dt.$$

Глава 4 посвящена изучению классов случайных процессов с задерживающим экраном, построенных по суммам независимых случайных величин.

В § 4.1 даны определения процессов $\zeta^*(t)$ и $x^*(t)$.

В § 4.2 даны интерпретации процессов $\zeta^*(t)$ и $x^*(t)$ в теории массового обслуживания, теории надежности и теории управления запасами.

В § 4.3 найдены преобразования Лапласа распределения процесса $\zeta^*(t)$ и распределений супремума $\zeta^*(t)$ совместного распределения первого момента $\tau_x(\zeta^*)$ пересечения некоторого уровня x и перескока через этот уровень $\gamma_x(\zeta^*)$, совместного распределения супремума и значения процесса. В частности, соответствующие результаты получены для процесса $\zeta^*(t)$, когда он имеет единичные скачки вверх и вниз.

Преобразование Лапласа распределения $\zeta^*(t)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{R}(\lambda, x/z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\zeta^*(t) < z / \zeta(0) = z\} dt =$$

$$= \bar{f}(\lambda, z-x) - \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda, -x-u) \bar{\Gamma}_\lambda(z, du) + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\varphi(\lambda) M_z e^{-\lambda \tau_0}}{1 - P\{\eta_1 \leq 0\} \varphi(\lambda)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda) P\{\eta_1 > 0\}} + \left[\int_0^\infty \bar{f}(\lambda, v-x) dF(x) - \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{f}(\lambda, -x-u) \times \right.\right.$$

$$\left. \times \bar{\Gamma}_\lambda(v, du) dF(v) + \frac{[1-\varphi(\lambda)] M e^{-\lambda \tau_0}}{\lambda P\{\eta_1 \geq 0\} [1 - \varphi(\lambda) P\{\eta_1 \geq 0\}]} \right] \times$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{\varphi(\lambda) M_z e^{-\lambda \tau_0}}{1 - \varphi(\lambda) P\{\eta_1 \geq 0\}} \right]^{-1} \right\},$$

где

$$\bar{f}(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\bar{\zeta}(t) < x\} dt,$$

$$\bar{\Gamma}_\lambda(z, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\bar{\tau}_z \in dt, \bar{\gamma}_z \in A\},$$

$\bar{\zeta}(t)$ -процесс,построенный по парам $\{\xi_k, -\eta_k\}$, $\bar{\tau}_z$, $\bar{\gamma}_z$ - первый момент пересения уровня z процессом $\bar{\zeta}(t)$ и перескок через этот уровень соответственно.

Аналогичные выражения получены для преобразований Лапласа $\sup_{0 \leq s \leq t} \zeta^*(s)$,совместного распределения первого момента пересечения некоторого уровня x и перескока через этот уровень процессом $\zeta^*(t)$, совместного распределения супремума и значения процесса. В частности, соответствующие результаты получены для полумарковского блуждания с единичными скачками вверх и вниз.

В § 4.4 найдены преобразования Лапласа распределений суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном и его основных граничных функционалов.

Итак,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t)} P\{x^*(t)<x \,/\, x(0)=z,\ \xi_1^+=h\}\,dt = \tilde{A}_0(\lambda, x/z,h) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty (n) \int_0^\infty \int_0^\infty (n) \int_0^\infty \tilde{A}(\lambda, dy_1, du_1/z,h)\, \tilde{A}(\lambda, dy_2, du_2/y_1,u_1) \cdots$$

$$\ldots \tilde{A}(\lambda, dy_n, du_n/y_{n-1},u_{n-1})\, \tilde{A}_0(\lambda, x/y_n,u_n),$$

где

$$\tilde{A}(\lambda, x, y/z,h) = P_-(t)\Big[\varepsilon(h-z)\varepsilon(x)F_-(x-z)\varepsilon(t+u-h) +$$

$$+\varepsilon(t-h)\varepsilon(x)\int_{-\infty}^{0}\sum_{k=1}^{\infty} F_+^{*(k)}(x-z+\beta)\int_0^{t-h}\big[\Phi_+(t+u-\tau-h) -$$

$$-\Phi_+(t-\tau-h)\big]\,d\Phi_+^{*(k-1)}(\tau)\,dF_-(\beta)\,dt,$$

$$\tilde{B}(\lambda, x, y, u/z,h) = P_-(t)\Big[\varepsilon(h-t)\varepsilon(x-z)\varepsilon(y)F_-(y-z)\times$$

$$\times\varepsilon(t+u-h) + \varepsilon(t-h)\varepsilon(y)\int_0^{x-z} F_-(y-z-\beta)\,d\sum_{k=1}^{\infty} F_+^{*(k)}(\beta)\times$$

$$\times \int_0^{t-h} \left[\Phi_+(t-\tau-h+u) - \Phi_+(t-\tau-h) \right] d\Phi_+^{*(k)}(\tau)\, dt$$

Аналогичные выражения получены для преобразований Лапласа процесса $x^*(t)$, когда один из процессов $x^+(t)$, $x^-(t)$ является обобщенным процессом Пуассона со скачками одного знака.

Глава 5 посвящена изучению асимптотического поведения процессов $\zeta(t)$, $x(t)$, $\zeta^*(t)$, $x^*(t)$, когда они зависят от одного параметра.

В § 5.I изучено асимптотическое поведение процессов $\zeta(t)$ и $x(t)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5.I.I. Пусть существуют $M\xi_1 = a_1$, $M\eta_1 = a_2$, $D\xi_1 = b_1$, $D\eta_1 = b_2$. Положим

$$\zeta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1}{a_1^3}}} \left[\zeta(tT) - \frac{a_2}{a_1} tT \right]$$

Тогда распределение $\zeta_T(t)$ слабо сходится при $T \to \infty$ к распределению винеровского процесса $W(t)$, $t \in [0,1]$. Подобная теория доказана для процесса

$$x_T(t) = \frac{1}{\sqrt{cT}} \left[x(tT) - atT \right],$$

где

$$a = \frac{M\eta_1^+}{M\xi_1^+} - \frac{M\eta_1^-}{M\xi_1^-}, \quad c = \frac{(M\xi_1^+)^2 D\eta_1^+ + (M\eta_1^+)^2 D\xi_1^+}{(M\xi_1^+)^3} + \frac{(M\xi_1^-)^2 D\eta_1^- + (M\eta_1^-)^2 D\xi_1^-}{(M\xi_1^-)^3},$$

если существуют вторые моменты случайных величин $\xi_1^\pm$, $\eta_1^\pm$.

В § 5.2 доказаны теоремы об асимптотическом поведении процессов $x^*(t)$ и

$$x^*_T(t)=\frac{1}{\sqrt{cT}}\left[x^*(tT)-atT\right],\ t\in[0,1].$$

Теорема 5.2.I. Пусть существуют вторые моменты случайных величин $\xi_1^{\pm}$, $\eta_1^{\pm}$ и $a>0$. Тогда $x^*(t)$ асимптотически нормально со средним at и дисперсией ct.

В условиях теоремы 5.2.I распределение $x^*_T(t)$, $t\in[0,1]$, слабо сходится к распределению винеровского процесса $W(t)$, $t\in[0,1]$. Представляет интерес и случай, когда $a=0$.

Теорема 5.2.2. Пусть существуют вторые моменты случайных величин $\xi_1^{\pm}$, $\eta_1^{\pm}$ и $a=0$. Тогда распределение процесса

$$x^*_T(t)=\frac{1}{\sqrt{cT}}\,x^*(tT)$$

слабо сходится к распределению $|W(t)|$, $t\in[0,1]$, где $W(t)$ - винеровский процесс.

Для доказательств этих теорем понадобилось доказательство асимптотически нормальности процесса $\zeta(t)$, проверка условия компактности мер в $\mathcal{D}_{[0,1]}$. Кроме того, доказано, что $\zeta_T(t)$ имеет асимптотические независимые приращения, причем

$$\zeta_T(t+h)-\zeta_T(t) \text{ и } \zeta_T(h)$$

асимптотически совпадают.

Глава 6 посвящена доказательству эргодической теоремы для процесса $x^*(t)$ и найден явный вид эргодического распределения.

В § 6.I доказана эргодическая теорема для процесса $x^*(t)$.

Теорема 6.I.I. Пусть выполнены условия:

I) $\xi_1^{\pm}$ имеют неарифметические распределения и конечные математические ожидания,

2) существуют конечные математические ожидания $M\eta_1^{\pm}$,

3) $$\frac{M\eta_1^+}{M\xi_1^+} - \frac{M\eta_1^-}{M\xi_1^-} < 0 .$$

То тогда $x^*(t)$ эргодичен.

Для доказательства этой теоремы потребовалось доказательство нескольких лемм.

В § 6.2 вычислено эргодическое распределение процесса $x^*(t)$

Глава 7 посвящена предельным теоремам для последовательности процессов $\zeta_n(t)$, $x_n(t)$, построенных по схеме серий случайных величин

$$\{\xi_K^{(n)}, \eta_K^{(n)}\}_{K=1}^{\infty}, \quad n=\overline{1,\infty}, \quad \xi_K^{(n)} > 0 \qquad \text{и}$$

$$\{\xi_K^{(n)+}, \eta_K^{(n)+}, \xi_K^{(n)-}, \eta_K^{(n)-}\}_{K=1}^{\infty}, \; n=\overline{1,\infty}, \; \xi_K^{(n)\pm} > 0, \; \eta_K^{(n)+} > 0, \; \eta_K^{(n)-} < 0$$

и для последовательности функционалов от этих процессов.

Пусть имеется последовательность серий пар случайных величин $\{\xi_K^{(n)}, \eta_K^{(n)}\}_{K=1}^{\infty}, n=\overline{1,\infty}$. В каждой серии пары являются независимыми и одинаково распределенными. Построим последовательность процессов полумарковского блуждания:

$$\zeta_n(t) = \sum_{K=1}^{\nu_n(t)} \eta_K^{(n)}; \quad \nu_n(t) = m, \text{при} \sum_{K=1}^{m} \xi_K^{(n)} \le t < \sum_{K=1}^{m+1} \xi_K^{(n)} .$$

Предположим, что величины $\xi_K^{(n)}$ и $\eta_K^{(n)}$ бесконечно малы, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(P\{\xi_K^{(n)} > \varepsilon\} + P\{\eta_K^{(n)} > \varepsilon\} \right) = 0.$$

В § 7.I доказана теорема о возможных предельных процессах для последовательности процессов $\zeta_n(t)$.

Теорема 7.I.I. Пусть конечномерные распределения процессов $\zeta_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $\zeta(t)$ и для каждого t совокупность случайных величин $\{\zeta_n(s), s \le t\}$ ограничена по вероятности. Тогда существует такой двумерный обрывающийся процесс с независимыми приращениями $\{\xi(t), \eta(t), t < \tau\}$, где $\xi(t)$ -неотрицательный возрастающий процесс, что для всякого $t>0$ $\zeta(t) = \eta(\xi^{-1}(t))$, где $\xi^{-1}(t) = s$, если $\xi(s-0) \le t < \xi(s)$; при этом считаем, что $\xi^{-1}(\tau) = +\infty$. Особый интерес представляет тот случай, когда величины $\xi_K^{(n)}$, $\eta_K^{(n)}$ независимы.

Теорема 7.I.2. Пусть величины $\xi_K^{(n)}$ и $\eta_K^{(n)}$ независимы и конечномерные распределения процессов $\zeta_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $\zeta(t)$. Тогда существует однородный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ и обрывающийся возрастающий процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$, причем эти процессы независимы, такие, что $\zeta(t) = \eta(\xi^{-1}(t))$.

В § 7.3 изучена сходимость распределений процесса $x_n(t)$

Пусть заданы последовательности серий независимых в каждой серии одинаково распределенных случайных величин

$$\left\{\left(\xi_K^{(n)+};\ \eta_K^{(n)+};\ \xi_K^{(n)-},\ \eta_K^{(n)-}\right)\right\}_{K=1}^{\infty},\ n=\overline{1,\infty}.$$

Все величины предполагаются положительными и бесконечномалыми. Построим процессы полумарковского блуждания

$$x_n^{\pm}(t) = \sum_{K=1}^{\nu_n^{\pm}(t)} \eta_K^{(n)\pm},\ \text{где} \sum_{K=1}^{\nu_n^{\pm}(t)} \xi_K^{(n)\pm} \le t < \sum_{K=1}^{\nu_n^{\pm}(t)+1} \xi_K^{(n)\pm}$$

и по этим процессам - суммарный процесс полумарковского блуждания

$$x_n(t) = x_n^{+}(t) - x_n^{-}(t).$$

Если оба процесса $x_n^{+}(t)$, $x_n^{-}(t)$ ограничены по вероятности, то предельный процесс имеет вид:

$$x(t) = \eta^+(\xi^{+-1}(t)) + \eta^-(\xi^{--1}(t)),$$

где $\xi^\pm(t)$-некоторые обрывающиеся возрастающие процессы с независимыми приращениями, причем все четыре процесса $\xi^+(t)$, $\eta^+(t)$, $\eta^-(t)$, $\xi^-(t)$ независимы между собой.

В случае неограниченных по вероятности процессов $x^\pm(t)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 7.2.I. Пусть конечномерные распределения процессов $x_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $x(t)$. Если процессы $x^\pm(t)$ неограничены по вероятности, то $x(t)$ является однородным процессом с независимыми приращениями.

В § 7.3 показано, что конечномерные распределения последовательности процессов $\zeta_n(t)$ сходятся в $\mathcal{D}_{[0,1]}$ к распределению процесса $\zeta(t)$.

Пусть доказано, что распределения последовательности процессов $\zeta_n(t)$ сходятся в $\mathcal{D}_{[0,1]}$ к распределению процесса $\zeta(t)$. Построим процессы с задерживающим экраном в точке 0 : $\zeta_n^*(t)$, $\zeta^*(t)$. По формуле А.А.Боровкова

$$\zeta_n^*(t) = \zeta_n(t) - \inf_{0\le s\le t}(0, \zeta_n(s)),\ \zeta^*(t) = \zeta(t) - \inf_{0\le s\le t}(0, \zeta(s)).$$

Преобразование

$$A[a(t)] = a(t) - \inf_{0\le s\le t}(0, a(s))$$

непрерывно в топологии $\mathcal{J}$ преобразует $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Поэтому для всякого $\mathcal{J}$ -непрерывного функционала $f(a(\cdot))$ функционал

$$f_1(a(\cdot)) = f(A[x(\cdot)])$$

также $\mathcal{J}$ -непрерывен. Следовательно, распределение $F_1(\zeta_n(t))$ сходится к распределению $f_1(\zeta(\cdot))$. Отсюда вытекает, что для всякого $\mathcal{J}$ -непрерывного функционала f распределение $F_1(\zeta_n^*(\cdot))$ сходится к распределению $f(\zeta^*(\cdot))$.

Тем самым установлено, что распределения процессов с задерживающим экраном сходятся в $\mathcal{D}[0,1]$ к распределению процесса $\zeta^*(t) = \zeta(t) - \inf_{0\le s\le t}(0, \zeta(s))$. Это замечание носит общий характер и не связано с конкретным видом процессов.

Глава 8 посвящена исследованию процесса $\widetilde{x}(t)$. В этой главе найдены преобразования Лапласа распределения процесса $\widetilde{x}(t)$ $\widetilde{x}(t)$ и его основных граничных функционалов, доказана эргодическая теорема для процесса $\widetilde{x}(t)$, исследовано асимптотическое поведение распределения процесса $\widetilde{x}(t)$.

В § 8.I даны определение и постановка задач.

В § 8.2 найдены преобразования Лапласа распределений процесса $\widetilde{x}(t)$ и его основных граничных функционалов.

Итак, преобразование Лапласа распределения процесса $\widetilde{x}(t)$ имеет вид:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P\{\widetilde{x}(t) < x \mid x(0)=z,\ \xi_1^+ = h\}\, dt = \widetilde{A}_0(\lambda, x/z, h) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty}{}^{(n)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty}{}^{(n)} \int_0^{\infty} \widetilde{A}(\lambda, dy_1, du_1/z, h) \ldots$$

$$\widetilde{A}(\lambda, dy_n, du_n/y_{n-1}, u_{n-1})\, \widetilde{A}_0(\lambda, x/y_n, u_n),$$

где

$$\tilde{A}_0(\lambda, x/z, h) = \varepsilon(x-z)\int_0^h e^{-\lambda t}[1-\phi_\pm(t)]dt + \int_h^\infty e^{-\lambda t}[1-\phi_\pm(t)]dt \times$$

$$\times \int_0^{x-z} P\{x^+(t-h) < x-z-\alpha\} dF_+(\alpha) dt,$$

$$\tilde{A}(\lambda, x, u/z, h) = [F_-(x-z) - F_-(z-x)]\int_{h-u}^h e^{-\lambda t} P_-(t) dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^\infty \Big[\int_{z-x}^\infty F_+^{*m}(x-z+y) dF_-(y) - \int_{x+z}^\infty F_+^{*m}(-x-z+y) dF_-(y)\Big] \times$$

$$\times \int_0^{t-h} [\phi_+(t+u-\tau-h) - \phi_+(t-h-\tau)] d\phi_+^{*m-1}(\tau)\Big].,$$

$$\phi_\pm(t) = P\{\xi_1^\pm < t\}, \quad F_\pm(t) = P\{\eta_1^\pm < t\}.$$

Подобные формулы получены для преобразований Лапласа распределений для основных граничных функционалов от процесса $\tilde{x}(t)$.

В § 8.3 исследовано асимптотическое поведение процесса $\tilde{x}(t)$.

Доказана теорема о том, что если случайные величины $\xi_1^\pm$, $\eta_1^\pm$ имеют конечные вторые моменты, то процесс $\tilde{x}(t)$ асимптотически нормален с математическим ожиданием at и с дисперсией ct.

Далее строится процесс

$$\check{x}_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\check{x}(tT) - atT\right].$$

Доказываются теоремы, аналогичные теоремам 5.2.1 и 5.2.2.

В § 8.4 доказана эргодическая теорема для процесса $\check{x}(t)$

Теорема 8.4.1. Пусть существуют $M\xi_1^+$, $M\eta_1^+$ и положительные плотности распределения вероятностей величин ξ_1^+, η_1^- и $a<2$. Тогда процесс $\check{x}(t)$ эргодичен.

Для доказательства теоремы выбрана вложенная цепь Маркова, такая,

1) чтобы она была ограничена по вероятности; это условие обеспечивает существование конечных инвариантных мер для цепи,

2) чтобы для нее существовала положительная компонента вероятности перехода, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега в R^2 ; это условие обеспечивает единственность конечной положительной инвариантной меры.

Глава 9 посвящена изучению процесса $x^\varepsilon(t)$.

В § 9.2 найдены преобразования Лапласа распределений процесса $x^\varepsilon(t)$ и его основных граничных функционалов. Отметим, что указанные распределения сначала найдены для процесса $x^\varepsilon(\theta_1, t)$, затем для процесса $x^\varepsilon(t)$.

В § 9.3 доказана эргодическая теорема для процесса   . В силу того, что процесс $x^\varepsilon(t)$ не является марковским, к нему добавляются случайные процессы

$$\delta^{\pm}(t) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i^{\pm};\ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{\pm} < t\right\} - t$$

и $\zeta(t) = \sum_k \zeta_k I_{\{\theta_k < t < \theta_{k+1}\}}$

Тогда четырехмерный процесс

$$\{ x^{\circ}(t),\ \delta^{+}(t),\ \delta^{-}(t),\ \varsigma(t) \}$$

будет однородным марковским процессом. Моменты θ_K являются моментами остановки для этого процесса. При этом

$$\{ x^{\circ}(\theta_K),\ \delta^{+}(\theta_K),\ \delta^{-}(\theta_K),\ \varsigma(\theta_K) \}$$

будет вложенной цепью маркова. Так как $x^{\circ}(\theta_K)=0$, $\delta^{-}(\theta_K)=0$, $\varsigma(\theta_K)=\varsigma_K$, то, полагая $\delta_K=\delta^{+}(\theta_K)$, будем иметь $\{\varsigma_K, \delta_K\}$ - однородную цепь Маркова.

Теорема 9.3.I. Пусть I) существуют первые моменты величин $\xi_1^{\pm}$, $\eta_1^{\pm}$; 2) $\xi_1^{\pm}$ имеют нерешетчатые распределения; 3) выполняется условие $M\eta_1^{+} M\xi_1^{-} - M\eta_1^{-} M\xi_1^{+} < 0$, 4) существуют плотности распределения вероятностей величин ξ_1^{+}, η_1^{-}; 5) всякой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x,y)$ функция $M[\varphi(\xi_1^{\circ}, \eta_1^{\circ}) / \varsigma_1 = x, \delta_1 = y]$ также непрерывна; 6) величины $M(\xi_1^{\circ}/\varsigma_1, \delta_1)$ и $M(\eta_1^{\circ}/\varsigma_1, \delta_1)$ ограничены. Тогда процесс $x^{\circ}(t)$ эргодичен.

Для доказательства теоремы доказывается эргодичность цепи $\{\varsigma_K, \delta_K\}$ и конечность

$$\int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{\infty} M(\theta_{K+1} - \theta_K + \xi_K^{\circ} / \varsigma_K = x, \delta_K = y)\, \rho(dx, dy),$$

где $\rho(dx,dy)$ - эргодическое распределение для цепи $\{\varsigma_K, \delta_K\}$.

В § 9.4 вычислено эргодическое распределение процесса

$$S(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty} K(t, dy_1, dy_2, dy_3, dy_4 / x_2, x_4) \times$$

$$\times p(dx_2, dx_4)\,dt\left[\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} K(t/x_2, x_4)\,\Pi(dx_2, dx_4)\,dt\right]^{-1},$$

где $f(t, y_1, y_2, y_3, y_4)$ является $\mathcal{B}\times\mathcal{B}_+$ -измеримой функцией. $\mathcal{B}$ - σ -алгебра, порожденная подмножествами пространства $\mathcal{X} = (R_+, R_+, R_+, R_-)$, $\mathcal{B}_+$ - σ - алгебра, порожденная подмножествами пространства R_+, $\rho(dx, dy)$ - эргодическое распределение для цепи $\{\zeta_k, \delta_k\}$.

$$K(t/x_2, x_4) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m_1\le\dots\le m_n<\infty}\int_0^1 \underset{\substack{s_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}\\ \sum_{i=1}^n s_i\le t+\varphi(x_4, x)}}{\int^{(n)}\int}$$

$$\cdot \underset{\substack{\gamma_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}\\ \sum_{i=1}^n \gamma_i\le x_2+\sum_{i=1}^n s_i}}{\int^{(n)}\int} P\left\{\xi_1^- > t+\varphi(x_4, x_2)-\sum_{i=1}^n s_i\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n P\{\xi_i^-\in ds_i\}\times$$

$$\times P\left\{\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\eta_k^- - \sum_{j=1}^{i}\eta_j^- > -\psi(x_4, x),\ i=\overline{1,n}\right\}dx\times$$

$$\times P\left\{\sum_{i=1}^{m_1}\xi_i^+\in dy_1\right\} P\left\{\xi_{m_n+1}^+ > x_2+\sum_{i=1}^n (s_i-\gamma_i)\right\}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} P\Big\{ \xi^{+}_{m_i+1} > x_2 + \sum_{j=1}^{i} (s_i - \gamma_i), \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} \xi^{+}_{j} \in d\gamma_i \Big\},$$

$$K(t, dy_1, dy_2, dy_3, dy_4 / x_2, x_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\overline{m_1 \le \dots \le m_n < \infty}}$$

$$\int_0^1 \int_{\substack{s_i \ge 0,\ i=\overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} s_i \le t + \varphi(x_4, x)}} (n) \int \cdot \qquad \int_{\substack{\gamma_i \ge 0,\ i=\overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \le x_2 + \sum_{i=1}^{n} s_i}} (n) \int$$

$$P\Big\{ \xi^{-}_1 > t + \varphi(x_4, x) - \sum_{i=1}^{n} s_i \Big\} \prod_{i=1}^{n} P\{ \xi^{-}_i \in ds_i \} I\Big\{ t + \varphi(x_4, x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} s_i \in dy_3 \Big\} P\Big\{ \sum_{j=1}^{i} \sum_{K=1}^{j} \eta^{+}_K - \sum_{j=1}^{i} \eta^{-}_j > -\psi(x_4, x),$$

$$i = \overline{1,n},$$

$$\psi(x_4, x) + \sum_{i=1}^{m} \eta^{+}_i - \sum_{i=1}^{n} \eta^{-}_i \in dy_1 \Big\} P\Big\{ \sum_{i=1}^{m_1} \xi^{+}_i \in dy_1 \Big\} \times$$

$$\prod_{i=1}^{n} P\Big\{ \xi^{+}_{m_{i+1}} > x_2 + \sum_{i=1}^{n} (s_i - \gamma_i), \sum_{j=m_i+1} \xi^{+}_j \in d\gamma_i \Big\} \times$$

$$P\Big\{ \xi^{+}_{m_n+1} > x_2 + \sum_{i=1}^{n} (s_i - \gamma_i), \sum_{i=m_n+1}^{n} \xi^{+}_i \in d\gamma_i \Big\} \times$$

$$P\Big\{ \xi^{+}_{m_n+1} > t + \varphi(x_4, x) + x_2 - \sum_{i=1}^{m_n} \gamma_i \Big\} \times$$

$$\times I\left\{ t + x_2 + \varphi(x_4, x) - \sum_{i=1}^{m_n+1} \gamma_i \in d\gamma_2 \right\} I\{x_4 \in dy_4\}.$$

В § 9.5 исследован процесс $x^c(t)$, когда случайные величины $\xi_1^{\pm}$ имеют показательное распределение с параметрами μ_+, μ_- соответственно.

Найдены преобразования Лапласа распределений самого процесса $x^c(t)$ и его основных граничных функционалов и найден явный вид эргодического распределения

$$S(f) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 e^{-(\mu_+ + \mu_-)[t - \varphi(x, x_1)]} \times$$

$$\frac{[(\mu_+ + \mu_-)(t - \varphi(x, x_1))]^n}{n!} \times$$

$$P\left\{ \psi(x, x_1) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i > 0, j = \overline{1, n}, \psi(x, x_1) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \in dy_1 \right\} \times$$

$$I\{x_1 \in dy_2\} \times \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 e^{-(\mu_+ + \mu_-)[t - \varphi(x, x_1)]} \right.$$

$$\left. \frac{[(\mu_+ + \mu_-)(t - \varphi(x, x_1))]^n}{n!} P\left\{ \psi(x, x_1) + \sum_{i=1}^{j} \eta_i > 0, j = \overline{1, n} \right\} dx \,\Pi(dx_1, dt) \right]^{-1}$$

В § 9.6 исследовано асимптотическое поведение процесса $x^{\circ}(t)$. Доказаны теоремы, аналогичные теоремам 5.2.I и 5.2.2.

В § 9.7 исследовано суммы потери и дополнительного поступления системы, функционируемой процессом $x^{\circ}(t)$.

Пусть $\Delta(t) = x^{\circ}(t) - x(t)$.

$\Delta(t)$ означает сумму потери и дополнительного поступления системы, функционируемой процессом $x^{\circ}(t)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 9.7.I. Если процесс $x^{\circ}(t)$ эргодичен, то с вероятностью I

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta(t)}{t} = -\left(\frac{M\eta_1^+}{M\eta_1^-} - \frac{M\eta_1^-}{M\xi_1^-}\right) = -a.$$

Теорема 9.7.2. Если $a=0$, то величина $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Delta(l\cdot T)}{\sqrt{cT}}$ имеет отраженное нормальное распределение.

Теорема 9.7.3. Если $a>0$, то $P\{\lim\limits_{t\to\infty} \Delta(t) < x\} = P\{\sum\limits_{k=1}^{\nu} \eta_k < x\}$, где ν -последний номер выхода процесса из состояния "0".

Далее, в § 9.8 найдены формулы для первых вторых моментов эргодического распределения сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана для инженерного использования, когда ξ_1^+, ξ_1^- имеют показательное распределение с параметрами μ_+, μ_- соответственно.

Обозначим

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+, & \text{с вероятностью } \dfrac{\mu_+}{\mu_+ + \mu_-}, \\ \eta_j^-, & \text{с вероятностью } \dfrac{\mu_-}{\mu_+ + \mu_-}. \end{cases}$$

Найдены

$$d_1 = \lim_{t\to\infty} M x^{0}(t), \quad d_2 = \lim_{t\to\infty} M x^{02}(t)$$

Итак,

$$d_1 = z + \int_{-z}^{\infty} y \, dF_{\eta_1}(y) + \frac{\sqrt{D\eta_1}\left[D\eta_1 - z|M\eta_1|\right] \exp\{|M\eta_1|/\sqrt{D\eta_1}\}}{\sqrt{2\pi}\,(M\eta_1)^2} \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp\{-(M\eta_1)^2/2D\eta_1\}}{n\sqrt{n}},$$

$$d_2 = d_1^2 + \int_{-z}^{\infty} y^2 \, dF_{\eta_1}(y) + \frac{\left[(2+z^2)D\eta_1 + 2z/M\eta_1|\right]}{2\sqrt{\pi}} \times \exp\{z|M\eta_1|\} - \frac{|M\eta_1| \exp\{2z|M\eta_1|\}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\left[\exp\{-(M\eta_1)^2/2D\eta_1\}\right]^2}{1-\exp\{-(M\eta_1^2)/D\eta_1\}}.$$

В главе IO изложен основные результаты и выводы.

I. Найдены распределения процесса полумарковского блуждания и его основных граничных функционалов. Доказаны предельные теоремы в схеме серии.

2. Найдены распределения процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле и его основных граничных функционалов. Доказаны для него эргодическая теорема и предельные теоремы в схеме серий.

3. Найдены распредэления суммарного процесса полумарковско-

го блуждания и его основных граничных функционалов. Доказаны предельные теоремы.

4. Найдены распределения суммарного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле и его основных граничных функционалов. Доказана эргодическая теорема для него.

5. Найдены распределения сложного процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном и его основных граничных функционалов. Доказана эргодическая теорема. Исследовано асимптотическое поведение.

6. Найдены распределения сложного процесса полумарковского блуждания при наличии экрана и его основных граничных функционалов. Доказана эргодическая теорема и вычислено эргодическое распределение. Найдены формулы для первых вторых моментов эргодического распределения для инженерного использования и исследовано асимптотическое поведение.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Джафаров К.М., Насирова Т.И., Скороход А.В. О пределе некоторой последовательности процессов с полунезависимыми приращениями//. Теория вероятностей и мат. статистика. I97I. №5. С.14-I8.

2. Бунятзаде Р.Р., Джафаров К.М., Насирова Т.И. О пределе некоторой последовательности процессов с полунезависимыми приращениями//. Теория вероятностей и мат. статистика. I973. №6. С.7-9.

3. Насирова Т.И., Скороход А.В. Распределение некоторых функционалов от процессов с полунезависимыми приращениями.- Укр. мат. журн.-I973.-35, №3.-С.400-405.

4. Насирова Т.И. О предельном распределении некоторых функционалов от процессов с полунезависимыми приращениями//. Теория

вероятностей и мат.статистика.-1974. №12. С.106-108.

5. Ахмедова Х.М.,Насирова Т.И. Нестационарное распределение уровня запаса для одной модели теории управления запасами//.Изв. АН Азерб.ССР.-1975.№2.-С.19-22.

6. Насирова Т.И.,Скороход А.В. О функционалах от процессов с полунезависимыми приращениями//.Теория случайных процессов. -1975.№3.-С.80-84.

7. Насирова Т.И., Скороход А.В. Об одном классе скачкообразных процессов с задерживающим экраном//.Теория вероятностей и мат. статистика.-1977.№16.-С.75-88.

8. Насирова Т.И. Об одной модели управления запасами//.Теория случайных процессов.-1978.№6.-С.107-119.

9. Насирова Т.И. Об эргодической теореме для некоторых полумарковских процессов с задерживающим экраном//.Теория вероятностей и мат.статистика.-1979.№20.-С.90-97.

10. Скороход А.В.,Насирова Т.И. Об эргодической теореме для одного класса процессов,построенных по суммам независимых//.Теория вероятностей и мат.статистика.-1980.№22.-С.135-145.

11. Скороход А.В.,Насирова Т.И. Об асимптотическом поведении в одной схеме управления запасами//.Теория вероятностей и мат. статистика.-1981.№3.-С.30-40.

12. Скороход А.В.,Насирова Т.И. Предельные теоремы для некоторых классов случайных процессов,связанных с полумарковскими блужданиями//.Теория вероятностей и мат.статистика.-1981.№25.-С.125-139.

13. Насирова Т.И. Сложные процессы полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле// Марковские процессы.-Саратов,-1981.- -С.20-25.

14. Насирова Т.И. Процессы полумарковского блуждания. -Баку:Элм,-1986.-С.167.

15. Насирова Т.И. Сложные процессы полумарковского блуждания.-Баку:Элм,-1988.-С.38.

Подписано к печати 25.[illegible]. Заказ 87. Тираж 100

Типография АН Азербайджана

14. Насырова Т.И. Процессы [illegible] [illegible]. -Баку:Элм,-1986.-С.167.

15. Насырова Т.И. Сложные процессы [illegible] [illegible]дания.-Баку:Элм,-1985.-С.38.

Подписано к печати 25.01.93. Заказ 37. Тираж 100.

Типография АН Азербайджана

Бесплатно.

АЗӘРБАЈЧАН ХАЛГ ТӘҺСИЛИ НАЗИРЛИЈИ
М. Ә. РӘСУЛЗАДӘ адына БАҠЫ ДӨВЛӘТ УНИВЕРСИТЕТИ

Әлјазмалар һүгугунда

НӘСИРОВА ТАМИЛЛА ҺИЛАЛ гызы

ЕҠРАНЛЫ ЈАРЫММАРКОВ ҠӘЗИНТИНИН МҮРӘҠҠӘБ ПРОСЕСЛӘРИ

01.01.05—Еһтимал нәзәријјәси вә ријази статистика

Физика-ријазијјат елмләри доктору
дәрәчәси алмаг үчүн диссертасијанын

АВТОРЕФЕРАТЫ

Баҡы—1993