Киевский университет имени Тараса Шевченко

На правах рукописи

Фоменко Александр Васильевич

УДК 517.977.5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

01.01.09 - математическая кибернетика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1993

Работа выполнена в Запорожском индустриальном институте, Запорожском государственном университете и по месту прикрепления в Киевском университете имени Тараса Шевченко.

Научный консультант - доктор физико-математических наук, профессор А.И.Егоров

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Н.Е.Кирин;
доктор физико-математических наук, професоор М.М.Хрусталев;
доктор физико-математических наук, профессор А.А.Чикрий.

Ведущая организация - Институт математики и механики УрО РАН.

Защита состоится "8" апреля 1993 г. в 14^{00} часов на заседании специализированного совета Д 068.18.16 при Киевском университете имени Тараса Шевченко (252127, Киев, проспект академика В.М.Глушкова, 6, Киевский университет, факультет кибернетики, ауд. 40).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского университета.

Автореферат разослан "23" февраля 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
канд. физ.-мат.наук А.В.Кузьмин

АБ-26.802

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическая теория оптимальных процессов управления и дифференциальных игр получила интенсивное развитие в последние десятилетия. Это связано с возникновением сложных задач космической и авиационной техники и с созданием эффективных производственных технологий. С появлением компактной и высокопроизводительной вычислительной техники стала возможной реализация сложных алгоритмов управления. Разнообразие идей и методов теории оптимального управления вызвано сложностью рассматриваемых задач. Редкое использование оптимальных систем и процессов в технике объясняется трудностью получения достаточно простых математических моделей, адекватных реальным системам и процессам, и использованием в большинстве случаев программных законов управления, которые не учитывают изменяющихся условий функционирования.

Во многих прикладных задачах только решение в форме позиционного управления является приемлемым и эффективным. Системы с обратной связью обладают лучшими функциональными качествами, способны работать в условиях неопределенности и противодействия, устойчивы к начальным и постоянно действующим возмущениям. Допускаемые зачастую при решении задач синтеза линеаризации математической модели и (или) обратной связи не всегда оправданы при значительных отклонениях движений системы от некоторой заданной программы. Поэтому становится важной проблема синтеза для исходной, как правило, существенно нелинейной системы. Проблема синтеза особо остро проявляется при решении задач управления в условиях неопределенности, конфликта или кооперации нескольких управляющих воздействий. Математическая формулировка задач управления, учитывающая такие условия, нашла отражение в теории дифференциальных игр. Источником ее послужили реальные технические задачи, типичной из которых является задача о встрече движений механических систем.

Теоретические проблемы синтеза оптимальных систем управления и дифференциальных игр исследовались в трудах Л.С.Понтрягина, А.М.Летова, Н.Н.Красовского, Р.Айзекса, Р.Беллмана, Дж.Лейтмана и др. (для класса сосредоточенных систем), А.Г.Бутковского, А.И.Егорова, Т.К.Сиразетдинова, К.А.Лурье, Ю.С.Осипова, Ж.-Л.Лионса, Дж. Варга, П.К.С.Ванга и др. (для класса распределенных систем). Значительные успехи в аналитическом решении конкретных типов задач получены в работах Б.Н.Пшеничного, В.И.Коробова, М.И.Зеликина, А.И.Мороза, В.Ф.Кротова, К.Мерриэма и др.

Трудности аналитического решения позиционных задач приводят к необходимости применения приближенных методов. В настоящее время разработка численных методов синтеза относится к наиболее важным и перспективным областям прикладной математики. В этом направлении получены значительные результаты в работах Н.Н.Моисеева, В.И.Зубова, Н.Е.Кирина, В.И.Гурмана, Ф.Л. Черноусько, А.Брайсона и Хо Ю-ши, E.P.Ryan и др. Создание достаточно простых и надежных методов синтеза, основанных на применении ЭВМ, позволит осуществить множество эффективных приложений оптимальных систем управления в науке и технике.

<u>Цель работы</u>. Диссертация посвящена разработке численных способов решения задач синтеза оптимальных систем управления сосредоточенными и распределенными объектами динамических систем. Значительное место в работе отведено исследованию вопросов устойчивости и управляемости систем. Основное внимание в проводимых исследованиях сконцентрировано на конструктивно-

сти предлагаемого подхода, возможности описать основные этапы решения задачи синтеза для различных классов систем управления по единой методике.

Методы исследования. В диссертации используется метод синтеза оптимального управления, основанный на регрессивном принципе Айзекса и параметрической конструкции семейства полей экстремалей. Экстремали поля выделяются принципом максимума Понтрягина или его обобщениями на соответствующие классы задач управления. В качестве вспомогательных методов использованы численные методы теории приближения и интегрирования эволюционных уравнений (описывающих поведение динамических систем), методы оптимального управления, дифференциальных игр, теории устойчивости и управляемости.

Научная новизна. Проведенные исследования по выбранной теме позволили получить, при некоторых ограничительных предположениях, следующие новые результаты:

I. Введено, с привлечением теории интегральных многообразий, понятие параметрического поля экстремалей для различных классов задач управления. Исследованы вопросы существования таких полей.

2. Разработан конструктивный способ построения поля экстремалей на основе регрессивного принципа и методов многомерной теории приближения.

3. Предложены способы построения синтезируемых управлений по различным аппроксимациям полей экстремалей, основанные на многомерной интерполяции, "маяковых трассах" и тейлоровских отображениях, сферической идентификации и поверхностях уровней управления.

4. Разработана методика априорной и апостериорной оценки точности управления при различных способах построения синтезируемых управлений.

Кроме того, предложены способы восстановления функций Ляпунова и нахождения области управляемости, основанные на методе полей экстремалей. Для реализации процедуры построения синтезируемого управления разработаны вспомогательные численные способы и приемы. Они относятся к задачам многомерной теории приближения (тригонометрическая интерполяция и сферическая идентификация) и численному анализу динамических систем (способы численного интегрирования сингулярно возмущенных систем и систем с последействием и опережением, волновых уравнений по методу Даламбера).

<u>Теоретическая и практическая ценность</u>. Теоретическое значение работы состоит в развитии теории синтеза оптимальных систем и процессов с позиций вариационных полей экстремалей. Прикладное значение диссертации заключается в создании единого подхода построения параметрических полей экстремалей для различных классов задач управления. Подход позволяет достаточно просто конструировать алгоритмы вычисления синтезируемого управления по этим полям и создавать соответствующие пакеты программных средств.

<u>Апробация работы</u>. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах, республиканских, всесоюзных и международных конференциях, в том числе, Всесоюзной школе "Оптимальное управление. Геометрия и анализ" (Кемерово, 1986), Всесоюзной научно-технической конференции""Актуальные проблемы моделирования и управления систем с распределенными пара-

метрами" (Одесса, 1987), Всесоюзном совещании "Методы малого параметра" (Нальчик, 1987), 7 th IFAC Workshop on Control applications of nonlinear programing and optimization (Тбилиси, 1988), Международном советско-польском семинаре "Математические методы оптимального управления и их приложения" (Минск, 1989), УI Всесоюзном совещании "Управление многосвязными системами" (Суздаль, 1990), IУ Международной конференции "Проблемы комплексной автоматизации" (Киев, 1990).

В полном объеме работа докладывалась и обсуждалась на кафедрах прикладной математики ДИИТ, моделирования и оптимизации сложных систем КГУ, теории дифференциальных уравнений и управления ХГУ, уравнений математической физики МГУ, информационных систем управления ЛГУ, научном семинаре "Теория принятия решений" ИК АН УССР, в отделе систем управления ИММ Ур-о АН СССР.

Полученные в диссертации результаты были использованы в учебном процессе Запорожского госуниверситета в дисциплинах специализации "Системный анализ", "Оптимальное управление", "Вариационные методы математической физики", "Численные методы оптимального управления" и в четырех дипломных работах.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 23 статьях и тезисах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка основной и дополнительной литературы из 298 наименований и содержит 285 страниц машинописного текста, в том числе, 34 рисунка и 5 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отмечена актуальность темы исследования, рассмотрены основные направления анализа проблемы синтеза с указанием соответствующих источников, приведены основные методы исследования и дана аннотация глав и параграфов диссертации.

Глава I содержит результаты, которые, наряду с известными методами численного анализа, представляют базу для приближенного решения задач оптимального синтеза и использованы в последующих главах. В основе проводимых исследований лежит граничный диффеоморфизм многомерных областей и тригонометрическая интерполяция.

В §I рассматривается задача многомерной тригонометрической интерполяции в ограниченной и односвязной области G с границей $\bar{\mathcal{C}}$. Предполагается, что $\bar{\mathcal{C}}$ имеет параметрическое описание в полярных координатах

$$\rho = R(s), \quad \varphi = \Phi(s), \quad s \in U$$

где U - открытый $(n\text{-}1)$-мерный интервал. Доказано утверждение, что при выполнении некоторых естественных предположений отображение $L: Q = (0,1) \times U \longrightarrow G^*$ вида

$$\rho = \theta R(s), \ \varphi = \Phi(s), \ \theta \in (0,1), \ s \in U$$

является C^1-диффеоморфизмом, причем области G и G^* отличаются не более чем $(n\text{-}1)$-мерным многообразием. Отображение L (граничный диффеоморфизм) используется для решения задачи тригонометрической интерполяции функции нескольких переменных. Доказана формула обращения дискретного преобразования Фурье сеточной функции n переменных

$$t(x) \triangleq (2\pi)^{-n} \sum_{k \in K} \tilde{v}(k) \exp(-ik \cdot x) = v(x), \ \forall x \in \omega_0,$$

$$\tilde{v}(k) = \sum_{x \in \omega_0} v(x) \exp(ik \cdot x) \prod_{j=1}^{n} h_j, \ k \in K, \ k \cdot x = k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n.$$

Здесь:

$$\omega_0 = \{x : x_j^{k_j} = k_j h_j, \ k \in K : k_j = -K_j + 1, \ldots, 0,$$

$h_j = \pi / K_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \}$.

Для случая равноотстоящих узлов интерполяции приведена оценка погрешности тригонометрической интерполяции, основанная на неравенстве Лебега. Рассмотрен также метод неопределенных коэффициентов для интерполяции в неканонической области. Получено условие невырожденности матрицы коэффициентов системы уравнений, определяющей параметры интерполяции и найдена оценка сверху меры обусловленности этой матрицы.

Построение численной схемы решения краевой задачи для волнового уравнения в §2 основано на формуле Даламбера и формуле, полученной из нее дифференцированием по временной переменной t. Эти формулы записываются по временным слоям, а функции состояния и правых частей представляются с помощью интерполяционных тригонометрических многочленов по системе функций, зависящей от типа граничных условий. Доказана теорема об отсутствии погрешности метода для указанной вычислительной схемы для однородной краевой задачи при условии, что начальные данные задачи выбираются из класса тригонометрических многочленов конечного порядка. Сделаны обобщения вычислительных схем на случаи неоднородных граничных условий, сосредоточенных и подвижных воздействий, для волновых уравнений с переменными коэффициентами. Предложен подход к численному решению квазилинейных уравнений с потенциальным оператором. Он основан на итерационной процедуре с проверкой консервативности схемы на каждом шаге.

В §3 для идентификации сингулярных поверхностей теории оптимизации использован способ интерполяции участками сфер и трансверсальной ориентации самих поверхностей и многообразий в ней. Сингулярные поверхности считаются образованными семействами интегральных кривых канонической системы условий оптимальности. Получены оценки точности идентификации и приведена методика идентификации для автоматизации построений.

В главе II производится разработка метода конструирования синтезируемого управления. С использованием понятий теории интегральных многообразий сделано обобщение конструкций поля экстремалей на класс задач оптимального управления без ограничений и с ограничениями на управление и состояние. Для реализации схемы синтеза в нелинейном и нестационарном случаях используются семейства полей экстремалей, зависящие от специального параметра ρ (коэффициента мощности поля). Для повышения точности и упрощения расчетных формул поле экстремалей разбивается на трубки. Это осуществляется путем разбиения области D изменения параметра поля s. Разработанный подход позволяет решать задачи с терминальным многообразием цели размерности $m \leq n-1$, с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса управления.

В §I управляемый процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0,T], \; x \in R^n, \; u \in R^r. \qquad (1)$$

Ставится задача управляемого перевода системы (1) из заданного начального состояния на m-мерное гладкое многообразие M за фиксированное время и доставляющего минимум функционалу качества

$$J(u) = \int_0^T g(t, x, u)\,dt + q(T, x(T)) \qquad (2)$$

(при $m = 0, n-1$ $q \equiv 0$). Функции f, g, q - дважды непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам. Экстремалью задачи оптимального управления здесь и далее считается решение канонической системы принципа максимума Понтрягина. В соответствии с общей концепцией теории поля, если экстремаль можно погрузить в некоторую трубку непрерывного по начальным данным поля, то в этой трубке экстремаль доставляет абсолютный минимум функционалу качества. Использование регрессивного принципа позволяет свести задачу построения поля к решению задачи Коши для канонической системы. Часть исходных данных (взятых при $t=T$) в этом случае остаются свободными. Способ их задания позволяет конструктивно (алгоритмически) решить задачу построения поля и синтеза по нему оптимального управления.

Под вариационным полем сформулированной задачи понимается интегральное многообразие (ИМ) экстремалей $P=\{(t,x):$ $x=p(t,s),\ s\in D\subset R^{n-1},\ t\in[0,T]\}$, т.е. такое s-параметрическое множество, которое удовлетворяет условиям: I) отображение p - взаимооднозначное и непрерывное из D на P, $\forall t\in[0,T)$; 2) $\operatorname{rank} p_s=n-1$, $\forall t\in[0,T)$; 3) если $p(t_0,s)\in P$, $t_0\in[0,T)$, то $p(t,s)\in P$, $t\in[0,T]$.

Конструктивное построение поля осуществляется вычленением из s векторов $\tilde s\in D_1=\{0\leqslant s_i<\pi\}\in R^{n-m-1}$ и $\bar s\in D_2\in R^m$ для задания вектора сопряженных переменных $z(T)$ и положения $\dot x(T)$ на M. Зависимость $z(T)$ от s производится с использованием сферической системы координат с параметром ρ в качестве радиуса.

Л е м м а . При условии варьируемости экстремали x° ($s=$ $=s^{\circ}$) и

$$\operatorname{rank}\left[\Psi_2(\tau)\begin{bmatrix} I_1 \\ \hline Z_{2\tilde z}\end{bmatrix} \,\middle\vdots\, \left[\Psi_1(\tau)+\Psi_2(\tau)\begin{bmatrix} 0 \\ \hline Z_{2x}\end{bmatrix}E\right]\right]=n,$$

где $E=[0\mid I_2]$, а I_1, I_2 - единичные матрицы размером $n-m$ и m, соответственно, Ψ_1, Ψ_2 - блочные матрицы фундаментальной матрицы для линеаризованной сопряженной системы условий оптимальности, в $\mathbb{D}$ найдется окрестность $\mathcal{V}(S^\circ)$, для которой при фиксированном $\rho=\rho^\circ$ семейство решений канонической системы образует поле, включающее X°.

Предложено несколько способов построения синтезируемого управления. Общей основой их является аппроксимация зависимости $u_j(t) = u_j(t,S)$ и установление взаимосвязи между X и t, S. I способ (тригонометрической интерполяции) основан на выделении из $u_j(t,S)$ периодической составляющей, для которой и применяется многомерная тригонометрическая интерполяция на равномерной по S сетке. При нахождении по информации о X значений t и S используется система соотношений

$$t = t_i + \Delta t, \quad S = S^k + \Delta S, \; [\dot{X} \,\vdots\, X_S]\left[\frac{\Delta t}{\Delta S}\right] = \Delta X, \qquad (3)$$
$$\Delta X = X - X^{i,k}, \quad X^{i,k}: \min_{\alpha,\beta} \| X - X^{\alpha,\beta} \|.$$

Указанная процедура построения повторяется для нескольких узловых по ρ полей. При реализации синтезируемого управления интерполяцией отыскивается то поле, к которому принадлежит экстремаль, содержащая фазовую точку. II способ (синтез по "маяковым трассам") основан на применении формулы Тейлора для отображения вектора состояния системы в сопряженный вектор. В качестве опорного решения для такого отображения выбирается оптимальное программное решение, полученное регрессивным образом и включенное в параметрически сформированное поле экстремалей. III способ (синтез по поверхностям уровней управления) наиболее эффективен в случае стационарных задач оптимального управления (требующим при реализации лишь одного поля экстремалей) и при плавном изменении управляющих воздействий. Отличительной особенностью способа является испольдование информации о состоянии системы на программных решениях в моменты времени, соответствующие фиксированным значениям уровней компонент управления. При IУ способе формируется пакет экстремалей по принципу заполнения области возможных начальных состояний системы управления. В качестве варьируемых параметров выбираются не только компоненты вектора S , но и ρ . Структура синтезируемого управления выбирается обычно в виде различных степенных форм от компонент состояния системы с неизвестными коэффициентами. Для их определения при расчете пакета в дискретные моменты времени фиксируется информация о состоянии и управлении. Составляется и решается методом наименьших квадратов система уравнений (как правило линейная). Найденные значения коэффициентов используются в качестве узловых при интерполяции или сплайн-интерполяции на весь временной отрезок управления.

В §2 предполагается, что f не зависит от t (автономная система), M - 0-мерное и $u \in U$, где U - ограниченное замкнутое множество в R^r . Идея использования поля из §I остается применима и в этом случае. Информация о точках переключения управления на экстремалях применяется для аппроксимации линий и поверхностей переключения. При реализации идеи возникают следующие трудности: I) способов задания параметров вариации и пределов их изменения; 2) нахождение критических значений параметров, которые инициируют особые и скользящие режимы и методы исследования этих режимов; 3) установление максимальных по длительности интервалов движения системы без переключения; 4) нахождение значений параметров, обеспечивающих заданный допустимый закон переключения управления.

Конструкция поля осуществляется с использованием сопряженных векторограмм вида

$$A_j(\tau)=\psi_{1j}(\tau)\cos S_1+B_{1j}\sin S_1,\ B_{1j}(\tau)=\psi_{2j}(\tau)\cos S_2+ \qquad (4)$$
$$+B_{2j}(\tau)\sin S_2,\dots,B_{n-1j}(\tau)=\psi_{n-2j}(\tau)\cos(2S_{n-1})+\psi_{n-1j}(\tau)\sin(2S_{n-1}),$$

где $A_j(\tau)=f^T_{u_j}\Psi(\tau)\,z(T)$ и $u_j=\mathrm{sign}\,A_j(\tau)$. Выделены случаи регулярных и сингулярных полей переменной размерности. Доказаны следующие утверждения

Л е м м а I . Полный набор различных с позиции задачи быстродействия значений $z(T)$ задается выбором $S\in D$.

Л е м м а 2 . Если f_{u_j} в моменты переключения u_j имеет хотя бы одну ненулевую компоненту, то с каждым регулярным переключением число компонент параметра S сокращается на единицу, а зависимость $A_j(\tau)$ от S сохраняет прежний вид.

Т е о р е м а . Пусть выполнены сделанные предположения и условия лемм. Предположим, что при $S=S^*$ все переключения u_j регулярные и $A_j(\tau)$, $j\in\overline{1,r}$ обращаются в нуль при переключении u_j в моменты τ_{1j} , τ_{2j} , ... , τ_{kj} , причем $k\leq n-1$

$$\mathrm{rank}\left[\Phi(\tau,\tau_{1j})f_{u_j}(\tau_{1j})\,\vdots\,\Phi(\tau,\tau_{2j})f_{u_j}(\tau_{2j})\,\vdots\dots\vdots\,\Phi(\tau,\tau_{kj})f_{u_j}(\tau_{kj})\,\vdots\,f(\tau)\right]=k+1,$$

где $\Phi(\tau,\vartheta)$ - фундаментальная матрица уравнения $\dot X_\vartheta=-f^T_x X_\vartheta$ с коэффициентами, вычисленными на экстремальном решении (при $S=S^*$), а $\vartheta=(\tau_{1j},\tau_{2j},\dots,\tau_{kj})$. Тогда, если моменты τ_{ij} , $i\in\overline{1,k}$ не совпадают с моментами переключений u_ℓ , $\ell\neq j$, найдется такая окрестность $V(S^*)$, для которой семейство экстремалей образует регулярное поле.

Построение синтезируемого управления осуществляется с привлечением маяковых трасс и многообразий переключения.

Для задач с фазовыми ограничениями (§3) постановка §I дополняется условиями $X(t) \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^n$; $\omega_j(t,X) \leq 0$, $\partial\Omega(t)$: $\omega_j(t,X) = 0$, $j \in \overline{1,K}$. В результате условия оптимальности пополняются условиями скачка в моменты t_α выхода траектории системы на активные ограничения. При нахождении синтезируемого управления используется комбинация параметрических полей центрального (ЦП) при $m = 0$ или трансверсального (ТП) при $m \geq 1$ и тангенциального (КП), построение которых осуществляется, как и ранее, от множества цели. Экстремали КП "окаймляют" при этом фигуру ограничений, а стыковка полей разных типов производится по линиям касания экстремалей ЦП (ТП) с фигурой ограничений. Приведены условия существования комбинации полей.

Комбинированные поля экстремалей используются также при решении разрывных и сингулярно возмущенных задач управления (§4). При формулировке разрывной задачи полагается, что функция f непрерывна на всей области определения за исключением $(n-1)$-мерной поверхности $\mathcal{P}$: $\psi(t,X) = 0$, $\mathcal{P} \in \Omega$, на которой допускаются разрывы первого рода, и что на $\mathcal{P}$ выполняется условие "прошивания" $\lim\limits_{\psi \to +0} \dot{\psi} \cdot \lim\limits_{\psi \to -0} \dot{\psi} > 0$.

При M 0-мерном ЦП переходит на $\mathcal{P}$ в ТП специального вида. Приведены условия существования комбинированного поля. Синтез управлений осуществляется путем аппроксимации полей по семейству экстремалей с помощью изохронных поверхностей. В ТП отсчет временной переменной производится от момента схода фазовой точки с поверхности $\mathcal{P}$. Идентификация изохронных поверхностей совершается методом степенной интерполяции.

Задача оптимального управления сингулярно возмущенной системы описывается соотношениями

$$\dot{x} = f(t, x, y, u), \quad \varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, u), \quad t \in (t_0, T], \tag{5}$$
$$x \in R^n, \ y \in R^m, \ u \in R^r, \ 0 < \varepsilon \ll 1, \ J(u) = G(x(T), \varepsilon y(T)) \to \min_u .$$

Для решения задачи синтеза используются комбинации медленных (регулярных) и быстрых (сингулярных) полей экстремалей. Основной акцент исследования сделан на методах получения аналитических и приближенных решений задачи Коши или краевой задачи. В основе предложенного подхода лежит способ установления для разделения движений системы. Этот способ включает процедуру замены переменной t одной из компонент состояния для частных решений. Так для автономной динамической системы, описываемой уравнением $\dot{v} = F(v)$, $v \in R^n$ установившееся движение (УД) соответствует решению, зависящему явно или неявно от одной из компонент v_k, $k \in \overline{1, n}$ как от независимой переменной. Замена t на v_k осуществляется с использованием дифференциального соотношения $\dot{v}_k = \lambda\, q(v_k)$, λ - const (для линейных систем $\dot{v}_k = \lambda v_k$). Понятие УД распространяется также на случай неавтономных систем и сингулярно возмущенных систем. Для анализа УД и выделения регулярных и сингулярных составляющих решений привлекается метод диаграмм Ньютона.

Для перенесения результатов, полученных в главе П на случай распределенных систем управления (глава Ш) вводится в рассмотрение бесконечномерное параметрическое поле.

В §I объектом исследования служит распределенный колебательный процесс, описываемый уравнением

$$u_{tt} + Au + \beta(t, u, u_t, p) = 0, \ x \in G \subset R^n, \ t \in \mathcal{T} = [0, T], \tag{I}$$

где $A \in (V \to V^*)$ - линейный ограниченный самосопряженный и положительно-определенный оператор, V, V^* - компоненты оснащенного гильбертова пространства, β - замкнутый монотонный оператор. Ставится задача минимизации функционала качества

$$J(p) = \int_0^T \int_G f(u, u_t, p) dx d\tau + \int_G g(u, u_t) dx |_T \qquad (2)$$

на классе управлений $p, p_t \in L^1(Z; H)$.

Под вариационным полем сформулированной задачи (I), (2) понимается ИМ $P = \{(t, \theta): \dot{\theta} = \theta(t,s),\ s \in Q,\ t \in Z,$ $\theta = (\vartheta, \eta),\ \vartheta = (u, u_t),\ \eta = (v, v_t)\}$ удовлетворяющее условиям: I) отображение $\vartheta = \vartheta(t,s)$ определяет гомеоморфизм Q на фазовое пространство элемента ϑ , а отображение $\eta = \eta(t,s)$ - однозначное $\forall t \in Z$; 2) отображение ϑ_s обратимо $\forall t \in Z$; 3) для всякой компоненты ϑ элемента θ из условия $\vartheta(t_0, s) : \theta(t_0, s) \in P$ следует $\theta(t,s) \in P$ ($\theta(t,s)$ содержит компоненту $\vartheta(t,s)$), $\forall t \in Z$. В определении Q - подпространство гильбертова пространства вещественных числовых последовательностей ℓ^2, а v - сопряженная переменная.

При исследовании вопросов существования локальных полей привлечены сведения из теории полугрупп. Конструктивное построение поля осуществляется по методу Галеркина, а при задании терминальных условий используется представление функций рядами Фурье. Предложены три способа реализации синтезируемого управления, основанных на сферической и тригонометрической интерполяции и маяковых трассах.

В §2 полученные результаты распространяются на системы с последействием (ЗФДУ)

$$\dot{x} = f(t, x^t, u), \quad t \in (b, T], \quad x^b = \varphi, \tag{3}$$

где $x^t = x(t+\eta)$, $-\tau \le \eta \le 0$, $\tau > 0$ - const, $x \in R^n$, $u \in U$, U - класс кусочно непрерывных функций на $[b, T-\tau]$ со значениями в R^m. Отображение f явно зависит от $x(t-\eta_i)$, $0 \le \eta_i \le \tau$, $i = 1, 2, \ldots, q$ и x^t. Качество управления оценивается функционалом

$$J(u) = \gamma \psi(x(T)) + \int_b^T g(\vartheta, x^\vartheta, u(\vartheta))\, d\vartheta, \quad \gamma \ge 0 \text{ - const}. \tag{4}$$

Отображения f, g, ψ считаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми до второго порядка включительно по всем аргументам. Дифференцируемость по x^t понимается в смысле Фреше. Рассмотрен вопрос существования локального поля экстремалей. Предложен способ конструктивного построения параметрического поля экстремалей, основанный на тригонометрической интерполяции состояния системы. Значительное внимание уделено разработке численной схемы интегрирования ЗФДУ в прямом и обратном времени. Отличительной особенностью полученной схемы является учет согласованности переменных состояния системы и изменение гладкости решения с приращением переменной t на величину кратную τ. Шаги интегрирования выбираются равными τ и на каждом шаге производится согласование переменных состояния. Доказана

Л е м м а . Пусть f имеет производную Фреше до k-го порядка по x^t и принадлежит классу C^k по t. Тогда решение ЗФДУ принадлежит классу C^l, $l \ge \eta - 1$ при $t \in [b+(\eta-1)\tau, b+\eta\tau]$ и при условии, что $l \le k+1$.

Интерполяционное описание поля и реализация синтеза осуществляется по следующей схеме. Устанавливается при фиксированном t взаимооднозначное соответствие между оценкой текущего состояния $\tilde{X}$ и оценкой терминального состояния S (методом линейной интерполяции), а затем устанавливается однозначное соответствие $\dot{u}$ от S по методу степенной интерполяции как тензорного произведения одномерных фундаментальных алгебраических многочленов. Выкладки вначале проводятся для стационарного случая при фиксированном ρ, а затем обобщаются на нестационарный случай интерполяцией.

Объектом управления в §3 служит волновой одномерный процесс в неоднородной полуограниченной среде

$$u_{tt} - c(c u_x)_x = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \tag{5}$$

с граничными условиями двух видов $u(t,0) = \mu(t)$ и $u_x(t,0) = \nu(t)$. Здесь: $c = c(x) > 0$ - кусочно-непрерывная, а на участках непрерывности и липшицева, ограниченная функция; $\mu(t)$, $\nu(t)$ - управления, которые выбираются из условия оптимального по времени гашения приходящей волны. Построение граничного синтеза проводится с использованием метода Даламбера, в полной мере учитывающего физику процесса. Это позволяет определить управления в явной форме и только через граничное состояние колебательного процесса. С позиций энергетических понятий рассмотрен вопрос корректности синтезируемого управления.

В отличии от постановки задачи в §I в §4 управление входит в граничные условия. Оператор A эллиптического типа порядка $2m$, а управление входит в граничный оператор (по границе Γ_1) $(2m-1)$-го порядка и выбирается из класса $H^2(0,T; L^2(\Gamma_2))$, где через H обозначено функциональное пространство Соболева. Исследование вопросов существования поля осуществляется с применением метода Галеркина. Линейная система, полученная из канонической системы дифференцированием по параметру s, преобразуется в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и далее используются полугрупповые свойства операторов полученной системы.

В заключительной главе IУ рассмотрены различные приложения метода полей экстремалей и методов оптимизации в задачах управляемости, устойчивости и прикладных задачах управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В §I решается задача восстановления функции Ляпунова для управляемой автономной динамической системы, описываемой уравнением

$$\dot{x}=f(x,u),\ f(0,0)=0,\ x\in R^n,\ u\in R^r,\ t\in(0,T]. \quad (1)$$

Используется связь между функцией Ляпунова и сопряженными переменными условий оптимальности z_i для задачи стабилизации

$$\begin{gathered} z_i=-\partial V^\circ/\partial x_i,\ i=1,2,\dots,n,\ z_0=-1, \\ V^\circ(t)=\int_t^T g(x,u)\,dt+\tfrac{1}{2}\|x(T)\|^2 \longrightarrow \min. \end{gathered} \quad (2)$$

Задача оптимальной стабилизации включает минимизацию функционала качества $V^\circ(t_0)$ при $T\to\infty$. Из формул связи (2) $V^\circ(t)$ определяется интегрированием

$$-V^\circ(t)=\int z_i\,dx_i+\varphi_i(\tilde{x}^i),\ \tilde{x}^i=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n), \quad (3)$$
$$i=1,2,3,\dots,n.$$

Для нахождения функций φ_i из формулы (3) функцию $\varphi_n(\tilde{x}^n)$ представлено в специальном виде и произведено сравнение n-го уравнения системы (2) с остальными уравнениями системы.

Методы определения функциональной зависимости z от x, изложенные в главе II имеют особенность, связанную с большим интервалом $[0,T]$. Здесь учитывается стабилизация во времени коэффициентов зависимости (2) для остановки вычислительного процесса.

В задаче исследования устойчивости численными методами выделено два аспекта. Первый связан с формированием начальных возмущений наиболее неблагоприятных по отношению к выбранной мере состояния и сводится к задаче стартового управления. Второй связан с поиском наиболее неблагоприятного в заданной метрике текущего возмущения на систему. В §I рассмотрен второй из названных аспектов для стационарной упругой системы и для исследования устойчивости динамической системы на конечном интервале при постоянно действующих возмущениях. Даны формулировки соответствующих вариационных задач и проводится их анализ.

В параграфе рассмотрена также задача построения областей управляемости и глобальных полей экстремалей. Под множеством управляемости понимается $\Omega = \{y : D(y,M) \neq \emptyset\}$, где $D(y,M)$ - совокупность процессов управления $(0, T, x(\cdot), u(\cdot))$ с $x(0)=y$, $x(T)\in M$. Исходной задаче с интегральными ограничениями на управление

$$J(u) = \int_0^T g(t,u)\,dt \leq \ell, \quad \ell > 0 - \text{const}$$

сопоставлялась задача оптимального, в смысле минимума функционала $J(u)$, управления. Использовалось следующее очевидное предложение. Если u° решение задачи оптимизации и $J(u^{\circ}) = \ell$, то множество фазовых точек $x(0)$ образует границу множества управляемости при условии, что $x(0)$ могут быть включены в поле экстремалей. В соответствии с регрессивным принципом задача отыскания множества управляемости Ω заменяется задачей отыскания множества достижимости. Коэффициенты мощности поля ρ в данном случае считаются зависящими от s и выбираются в соответствии с условием $J(u^*) = \ell$. В общем случае граница множества управляемости включает три типа поверхностей: терминальную, боковую и торцевую. Основное внимание в проводимом исследовании сконцентрировано на определении торцевой поверхности. Она определяется либо условием $J(u^*) = \ell$, либо представляет огибающую поверхность поля экстремалей. Подробно анализируется последний случай с привлечением теории дифференцируемых многообразий и теории ветвления. При некоторых ограничительных предположениях доказана лемма устанавливающая условия пересечения соседних экстремалей.

Последние параграфы главы посвящены численному решению задач синтеза систем управления с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В §2 рассмотрены следующие задачи оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами. Первой исследована задача оптимального синтеза следящего вентильного электропривода. Применение вентильных преобразователей (ВП) в системах автоматического управления обуславливается их высокими энергетическими и регулировочными характеристиками и быстродействием. ВП одновременно являются выпрямителями тока и усилителями мощности. С учетом упрощающих предположений математическая формулировка задачи описана соотношениями

$$\dot{x}_1 = (f(u) - x_1)/T_э, \ \dot{x}_2 = x_1/T_м, \ \dot{x}_3 = K_p x_2, \ t \in [0, T],$$

$$f(u) = K_6 u_d, \quad u_d = \begin{cases} \text{sat}[u_y], & \dot{\vartheta} \geq -\omega_0, \\ \sin(u^\circ - \omega_0 t), & \dot{\vartheta} < -\omega_0, \end{cases}$$

$$\vartheta = \pi u_y / 2(\arcsin u_y)', \quad X(0) = (0,0,s), \quad X(T) = 0, \quad T \to \min$$

$$T_3, T_M, K_p, K_6, u^\circ, \omega_0 - \text{const}.$$

Формирование пакета оптимальных программных решений производилось вариацией значений $z_2(T)$, $z_3(T)$. Пакет использовался для сбора информации о поверхностях переключения (в том числе и на особый режим) и для установления функциональной зависимости между $X_1(0)$, $X_2(0)$ и $z_2(T), z_3(T)$ (в форме соотношений интерполяции) с целью обеспечения условий $X_1(0) = 0$, $X_2(0) = 0$. Идентификация поверхностей переключения производилась способом сферической интерполяции и трансверсальной ориентации.

Задача оптимального синтеза режима остановки реактора исследована в следующей постановке

$$\dot{X}_1 = aX_2 + bu - cX_1 - dX_1 u, \quad \dot{X}_2 = -a_1 X_2 + a_1 u, \quad t \in (0, T^*]$$

$$0 \leq u \leq 2, \quad t \in [0,T], \quad u = 0, \quad t \in [T, T^*], \quad T < T^*, \quad X_1(0) = 1,$$

$$\min_u \max_t X_1(t), \quad t \in [0,T], \qquad a, b, c, d, a_1 - \text{const}.$$

Для нахождения линии схода с фазового ограничения использовалась итерационная процедура. Линии переключения управления описывались линейной интерполяцией.

Была исследована также задача оптимального управления и оценивания процесса дозирования комбикормов. Математическая формулировка после ряда преобразований и упрощений свелась к следующей

$$w = c_1 d^2 s \varphi \omega \vartheta, \quad h = \Phi(v_0 - \int_{t_0}^{t} w\,dt),$$

$$\dot{\omega} = \omega_0 - \omega + c_2 h + c_3 \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = c_4 u, \quad |u| \leq 1, \quad 10 \leq \vartheta \leq 60,$$

$$J = \int_{t_0}^{t} (w(t) - w_n)^2 dt \longrightarrow \min_u, \quad t \in [t_0, T], \quad v_0, d, s, \omega_0, c_{1 \div 4}, w_n - \text{const}.$$

Пакет экстремалей использовался для аппроксимации релейной зависимости. Для повышения качества функционирования системы управления производилось оценивание компонент состояния. Помехи измерениям считались стационарными случайными процессами, включающими наряду с обычными шумами и редко появляющиеся мощные помехи. Оценивание осуществлялось методом фильтрации по Калману.

В §3 осуществляется численное решение задач управления с распределенными параметрами. Первой рассмотрена задача оптимального управления локальным нагревом пластины. Математическая модель процесса нагрева полосовой зоны описывается краевой задачей

$$u_t = a(u_{xx} + u_{yy}),\ t \in (0,T],\ u_{|t=0} = 0,$$

$$u_{y|y=0} = -p(t,x)/\lambda,\quad u_{y|y=\ell} = \alpha u/\lambda,\quad a, \lambda, \alpha - \mathrm{const}.$$

Управление ищется из условия минимума функционала

$$J(p) = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta}(u(T,x,0) - \psi(x))^2 dx + \gamma\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} p^2\, dx\, dt,\ \gamma - \mathrm{const}$$

при ограничениях на управление и состояние вида

$$|p| \le c_1,\quad u(T,0,0) = c_2,\quad u(T,x,0) \ge \psi(x),\quad \psi(0) = c_2,$$

$$|u(t,0,0) - u(t,0,\ell)| \le c_3,\qquad c_1, c_2, c_3 - \mathrm{const}.$$

На первом этапе проводился предварительный анализ одномерной краевой задачи с использованием соответствующих интегральных тождеств. На втором этапе подбором T удовлетворялись наложенные ограничения. Для реализации полученного закона управления использовалось представление $p(t,x)$ в форме $q(t)\tau(x)$. Синтез сводился в этом случае к определению $q(t)$ и T в текущий момент времени.

В задаче управления сложными колебаниями исследовалось взаимодействие распределенных и сосредоточенных колебательных звеньев. Математическая формулировка задачи описывалась соотношениями

$$u_{tt} - u_{xx} = -\vartheta \exp\{-\mu(u-y)^2\}\, \delta(x-p),$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = q,$$

$$J(q) = E(T) + \int_0^T \{\gamma q^2 + \lambda (u(t,p) - y)^2\} dt \to \min_q, \quad \vartheta, \mu, \omega, \gamma\text{-const}.$$

С помощью метода Фурье и уравнения Вольтерра (при $x = p$) каноническая система преобразуется в систему интегро-дифференциальных уравнений переменной t . При расчете пакета экстремалей в качестве варьируемых параметров выбирались величины $y(T)$, $\dot{y}(T)$ и коэффициенты Фурье начальных условий для u , u_t . В имитационных расчетах использовалась простейшая структура синтезируемого управления

$$q = s_1(t)\dot{y} + s_2(t) y + s_3(t) u(t,p).$$

Для обоснования численных способов, предложенных в работе, получены оценки точности. Это относится к многомерной тригонометрической и сферической интерполяции, численному интегрированию сингулярно возмущенных систем, систем с последействием и опережением, интерполяционным способам синтеза, синтезу по маяковым трассам и по поверхностям уровня (для сосредоточенных систем). С естественными изменениями эти оценки можно обобщить на другие типы систем управления.

Изложение теоретических вопросов во всех главах сопровождается решением численных примеров. На этих примерах демонстрируется методика построения синтезируемого управления и технологии проводимых вычислений. Основой проводимых расчетов служат результаты, полученные при решении соответствующих задач програмного управления.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В работе систематически развивается направление, связанное с приближенным решением задач оптимального синтеза детерминированных управляемых систем. В основе предложенного подхода лежит использование теории параметрических полей экстремалей. Большое внимание уделено исследованию вопросов существования полей и анализу их как интегральных многообразий.

Разработан конструктивный способ построения полей путем применения регрессивного принципа к системе соотношений принципа максимума Понтрягина и специального задания терминальных условий.

Показана применимость подхода для решения широкого класса задач управления: без ограничения и с ограничениями на управление или состояние; разрывными и сингулярно возмущенными; систем с сосредоточенными и распределенными параметрами; нестационарными и нелинейными; с фиксированным и нефиксированным конечным моментом времени и с многообразием цели различной размерности.

Предложены способы реализации синтеза по различным аппроксимациям поля экстремалей с применением многомерной интерполяции, сферической идентификации, "маяковых трасс" и тейлоровских отображений, поверхностей уровней управления.

Разработана методика оценки эффективности синтезируемых управлений для сосредоточенных динамических систем. Она включает этапы оценки точности аппроксимации полей экстремалей и различных способов нахождения синтезируемых управлений по таким аппроксимациям.

Показана возможность применения метода теории полей экстремалей к приближенному решению задачи восстановления функций Ляпунова управляемых нелинейных динамических систем. Исследована задача построения областей управляемости и глобальных полей экстремалей. Подробно анализируется (с применением теории дифференцируемых многообразий и теории ветвления) возможность пересечения экстремалей при нахождении граничной торцевой поверхности. Уделено также внимание проблеме численной проверке динамической и статической системы на устойчивость.

Для иллюстрации теоретических положений и выявления эффективности построенных управлений проведено ряд численных расчетов на ЭВМ модельных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Для конструктивного построения синтеза наряду с известными методами численного анализа использованы модификации и обобщения методов многомерной интерполяции, интегрирования эволюционных систем, систем с последействием и сингулярно возмущенных систем.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

1. Егоров А.И., Фоменко А.В. Об оптимальной стабилизации упругих систем // Динамика управляемых систем. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1979. - С.112-121.
2. Егоров А.И., Фоменко А.В. Оптимальный синтез в задаче управления системой, описываемой уравнением гиперболического типа // Оптимизация систем с распределенными параметрами.- Фрунзе: Илим, 1980. - С.76-86.
3. Фоменко А.В. Вариационный метод в задаче управления нели-

нейными колебаниями распределенной системы // Вестн. Харьковского ун-та; Механ., теория упр-я и матем. физика. - Харьков: Изд-во ХГУ, 1982. - № 230. - С.35-41.

4. Фоменко А.В. Оптимальный синтез адаптивных систем // Метод функций А.М.Ляпунова в совр. матем.: Тез докл. Всесоюз. научн. конф. - Харьков, 1986. - С.180.
5. Фоменко А.В. Восстановление функций Ляпунова управляемых систем // Там же. - С.77.
6. Фоменко А.В. Приближенный синтез оптимальных систем управления // Оптимальное управление. Геометрия и анализ: Тез. докл. Всесоюз. школы. - Кемерово, 1986. - С.49.
7. Фоменко А.В. Пристрелочный метод решения задач оптимального управления с пограничным слоем // Методы малого параметра: Тез. докл. Всесоюз. научн. совещ. - Нальчик, 1987. - С.151.
8. Фоменко А.В. Синтез оптимального управления сложными колебаниями // Актуальные проблемы модел. и упр-я систем с распределенными параметрами: Тез. докл. Всесоюз. научно-технич. конф. - Киев, 1987. - С.98.
9. Фоменко А.В. Интерполирование стратегий дифференциальных игр в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. - 1987. - № 9. - С.44-50.
10. Egorov A.I., Fomenko A.V. Control for a damping of propagative waves // 7 th IFAC Workshop on Control applications of nonlinear programming and optimization: Abstracts. - Tbilisi, 1988. - P. 117-119.
11. Фоменко А.В. Приближенный синтез оптимального управления распределенными системами. - Киев, 1989. - 21 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики: 89-16).
17. Фоменко А.В. Синтез оптимального управления с использова-

нием параметрического поля и тейлоровских отображений // Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн. - I989. - № 2. - С.75-79.

I3. Алексеев Г.Ф., Фоменко А.В. Синтез оптимального управле - ния локальным нагревом пластины // Матем. методы оптимального упр-я и их прилож.: Тез. докл. Междунар. советско-польского семинара. - Минск, I989. - С.I35-I36.

I4. Фоменко А.В. Синтез оптимального быстродействия с использованием полей экстремалей переменной размерности // Докл. АН УССР. Сер. А. - I989. - № II. - С.23-26.

I5. Фоменко А.В. Управление демпфированием распространяющихся волн в неоднородных средах//Автоматика.-I990.- №2.-С.46-49.

I6. Фоменко А.В. Построение множеств управляемости с использованием конструкций поля экстремалей//Упр-е многосвязн. системами: Тез. докл. УI Всесоюз. совещ.-Суздаль,I990.- С.I03-I04.

I7. Фоменко А.В. Многомерная тригонометрическая интерполяция // Укр. матем. ж-л. - I990. - № 4. - С.568-57I.

I8. Фоменко А.В. Применение метода Даламбера в численном анализе // Дифференц. ур-я. - I990. - № 6. - С.I067-I073.

I9. Фоменко А.В. Синтез оптимального управления разрывными системами с использованием комбинированных полей экстремалей // Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн. - I990. - № 3. - С.I93-I97.

20. Фоменко А.В. Приложение теории поля экстремалей к гранично-управляемым задачам распределенными системами // Проблемы комплексной автоматизации: Тез. докл. IУ Междунар. научно-техн. конф. - Киев, I990. - С.97-I0I.

2I. Фоменко А.В. Синтез оптимальных систем управления с последействием по полю экстремалей // Управление в механич. системах: Тез. докл. УII Всесоюз. конф. - Свердловск, I990.- С.I07.

22. Фоменко А.В. Синтез сингулярно возмущенной системы управления с использованием медленных и быстрых полей экстремалей // Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн. - I99I. - № I. - С.57-6I.

23. Фоменко О.В. Оптимальний синтез у задачах керування з фазовими обмеженнями // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. - Київ: Либідь, I99I. - В. 2, - С.57-6I.

Заказ 373 Тираж I00 Подп. к печ. 29.0I.93

Подразделение оперативной полиграфии ЗЦНТЭИ

[illegible] тел. докл. УI [illegible]
С.107.

22. [illegible] А.И. [illegible] // Изв. АН СССР, Сер. техн. наук. - 198[illegible]. - №1 - С.57-61.

23. [illegible] О.И. [illegible] // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. - Київ: Либідь, 198[illegible] - В. 2, - С.57-61.

Зак. [illegible] Подп. к печ. [illegible]
[illegible]