

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

Бахтоваршоев Алигавхар Шохайдарович

УДК 532.62:519.62

УВЛЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

05.13.16. - Применение вычислительной техники,
математического моделирования и математических
методов в научных исследованиях.

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К и е в - 1993 г.

07.26.83

Робота виконана в Київському університеті
імені Тараса Шевченка.

Научний керівитель - доктор фізико-математических
наук, професор Макаров В.Л.

Официальные оппоненты: - доктор технических наук,
профессор Гаращенко Ф.Г.

кандидат фізико-математических
наук Беленко В.И.

Ведущая организация - Институт электродинамики
АН Украины.

Защита состоится "8" апреля 1993г. в 14¹⁵ часов
на заседании специализированного совета К 06818.10 в Киев-
ском университете имени Тараса Шевченко по адресу: 252127,
г. Киев-127, пр. академика Глужкова 6, факультет кибернетики,
ауд.---

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского
университета им. Тараса Шевченко.

Автореферат разослан "3" марта 1993г.

Ученый секретарь
специализированного совета

к.ф.-м.н.,
доцент Байко И.В.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00825852 (U)

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена задаче построения математической модели процесса увлечения жидкости движущейся поверхностью, анализу этой задачи и ее численному решению.

Актуальность темы. Во многих технологических процессах требуется покрывать поверхность изделий специальным веществом. Например, при изготовлении кино-фото материалов, магнитных лент, печатных плат для электронных приборов, нанесении покрытий на проволоку и т. п.. Часто требуемое вещество покрытия растворяют и изделие вытаскивают через раствор. После того как в результате вынимания изделия из раствора пленка жидкости покрывает его, растворитель испаряет и на поверхности изделия остается ровный слой требуемого вещества. Здесь одной из наиболее актуальных и важных в практическом отношении является задача определения профиля пленки, оставшейся на поверхности изделий. Так как часто изделия имеют простую геометрическую форму, например, форму пластины или кругового цилиндра, то в диссертации рассмотрены именно задачи увлечения жидкости движущейся лентой и цилиндром.

Цель работы состоит в построении математических моделей, адекватных процессу увлечения жидкости движущейся поверхностью, их анализу, разработке алгоритмов для решения получающихся задач и создания соответствующих им программ.

Научная новизна. В диссертации построены новые модели процесса увлечения жидкости движущейся поверхностью. Разработаны алгоритмы для численного решения полученных математических задач. Созданы программы на языке Фортран 77, реализующие соответствующие алгоритмы и получены численные результаты. Для некоторых дифференциальных уравнений, являющихся составной частью модели, доказаны теоремы об отсутствии решения, о существовании решения, о неустойчивости стационарного решения, о характере поведения решений на бесконечности.

Методы исследования основываются на теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вычислительной математики и функционального анализа, а также на законах механики вязкой жидкости.

Обоснованность и практическая значимость. Обоснованность используемых моделей подтверждена хорошей согласованностью с результатами физических экспериментов. Расчеты показали эффективность использованных алгоритмов, о чем свидетель-

ствуует прилагаемый к работе акт внедрения. Экономический эффект от внедрения составил 107 тыс. 365 руб. в 1988 г.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались:

- на семинарах лаборатории математической реологии и фильтрации (рук. проф. Саттаров М.А.) и Отдела прикладных проблем математики (рук. проф. Мухамадиев З.М.) Математического института с ВЦ АН Республики Таджикистан (Душанбе), кафедры Численных методов математической физики (рук. проф. Макаров В.А.) Киевского университета им. Тараса Шевченко:

- на всесоюзных научно-технических конференциях по проблемам изготовления аппаратуры спецназначения (Москва, 1988г.) и неразрушающих методов контроля полимерных изделий (Москва, 1989г.);

- на всесоюзных семинарах "Проблемы физико-химических взаимодействий в механике сплошных сред" (Ужгород, 1989г.) и "Предсказание и математическое моделирование катастрофических явлений и их последствий" (Киев, 1991г.);

- на первой международной конференции по вычислительному моделированию процессов со свободной и движущейся границами. (Саутгемптон, 1991г., Англия).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, списка литературы, включающего 74 наименования и приложения, включает 8 рисунков и 4 таблицы. Общий объем работы - 86 страниц.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, в которых отражены основные результаты.

Краткое содержание работы

Во введении приводятся краткий обзор исследований по теме диссертации, анализируются известные математические модели, описывающие процесс увлечения жидкости движущейся пластиной и дается краткое содержание работы по главам.

В первой главе рассматривается увлечение жидкости движущейся лентой.

В п.1 приведена постановка задачи увлечения жидкости движущейся вертикальной лентой.

Известно, что при медленном вытягивании вертикальной ленты

(или пластины) из сосуда с жидкостью, смачивающей ее поверхность, на ней остается некоторый слой жидкости. Как правило, по мере удаления от горизонтальной свободной поверхности жидкости эта толщина убывает и далее становится постоянной. Эту толщину называют предельной и задача состоит в том, чтобы определить ее значение h_0 как функции скорости вытягивания u_0 ленты и реологических характеристик жидкости (вязкости μ , плотности ρ , поверхностного натяжения σ). При этом предполагается, что жидкость ньютоновская, а процесс извлечения происходит изотермически. Так как жидкость течет под влиянием силы тяжести, то h_0 зависит также от ускорения силы тяжести g .

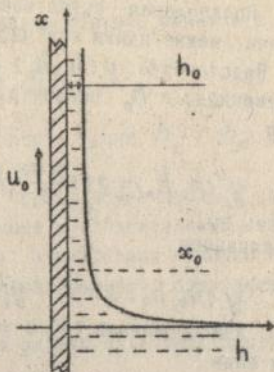


Рис. 1.

Исходя из известных уравнений пограничного Прандтля и уравнения Лапласа для определения профиля статического мениска у бесконечной пластины, получена следующая модель, которая описывает в целом профиль свободной поверхности жидкости:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x_0 \leq x < \infty, \\ h_2(x), & 0 < x \leq x_0, \end{cases}$$

$$u_0 h_1(x) - \left(\frac{\rho g}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} h_1'''(x) \right) \frac{h_2^3(x)}{3} = u_0 h_0 - \frac{\rho g h_0^3}{3\mu}, \quad (1)$$

$$h_1(\infty) = h_0, \quad h_1'(\infty) = 0, \quad (2)$$

$$h_2''(x) / (1 + (h_2')^2)^{3/2} = \rho g x / \sigma, \quad (3)$$

$$h_2'(0) = -\infty, \quad (4)$$

$$h_1^{(i)}(x_0) = h_2^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (5)$$

где x_0 - точка слияния решений h_1 и h_2 , а h_0 - предельная толщина, подлежащая определению. Здесь система координат выбрана согласно рис. 1.

Предполагая существование и единственность решения этой задачи, можно найти его численными методами, как это описано ниже. Подстановка $y_1(h_1, h_0) = (h_1')^2$ где h_1 новая независимая переменная, а h_0 параметр, приведет уравнение (1) к следующему виду

$$y_1''(h_1, h_0) = 2\left(3\frac{\mu u_0}{\sigma}(h_1 - h_0) - \frac{\rho g}{\sigma}(h_1^3 - h_0^3)\right)/h_1^3 y_1^{1/2}(h_1, h_0), \quad (6)$$

с условиями

$$y_1(h_0, h_0) = 0, \quad y_1'(h_0, h_0) = 0. \quad (7)$$

Для уравнения (3) с условием (4) решение выписывается в явном виде

$$h_2(x) = c - (2\alpha^2 - x^2)^{1/2} - 2^{-1/2} \alpha \ln\left[x/(2^{1/2} + (2\alpha^2 - x^2)^{1/2})\right], \quad (8)$$

где $c = \text{const}$, $\alpha = (2\sigma/\rho g)^{1/2}$ капиллярная длина.

Тогда задачу (1) - (5) можно свести к решению следующего нелинейного алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} y_1(h_{10}, h_0) - (h_2'(x_0))^2 &= 0, \\ y_1'(h_{10}, h_0) - 2h_2''(x_0) &= 0, \\ y_1''(h_{10}, h_0)(y_1(h_{10}, h_0))^{1/2} + 2h_2'''(x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

относительно h_{10} , h_0 , x_0 , где h_{10} - толщина профиля свободной поверхности в точке сиккания, $h_{10} > h_0$.

Ясно, что если решение системы (9) уже найдено, то из (8) можно определить c и тем самым вычислить профиль свободной поверхности для $x \in (0, x_0]$, а интегрирование (1) как задачу Коши с начальными условиями $h_1^{(i)}(x_0) = h_2^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, 2$ позволяет найти профиль пленки для $x > x_0$ и тем самым задача в целом окажется решенной.

Пусть $\vec{F}(\vec{x})$ вектор, компоненты которого тождественно равны левой части равенства (9), а $\vec{x} = (h_{10}, h_0, x_0)$. Ввиду отсутствия теоремы о существовании и единственности решения системы (9) был составлен квадратичный функционал $\hat{F}(\vec{x}) = 0.5 \|\vec{F}(\vec{x})\|^2$, глобальный минимум которого объявлялся искомым решением, если оно приемлемо. Метод поиска минимума будет изложен ниже.

Начальная точка интегрирования не является точкой непрерывности правой части (6), эта точка для уравнения (6) является

особой. Так как непосредственно каким-либо пошаговым методом типа Рунге-Кутты эту систему с точки $h_1 = h_0$ интегрировать нельзя, то для некоторого $\varepsilon > 0$ предложено строить решение в виде ряда Тейлора

$$y_1(h_1, h_0) = \alpha_1(h_1 - h_0)^2 + \alpha_2(h_1 - h_0)^3 + \dots, \quad (10)$$

который сходится в некоторой окрестности точки $h_1 = h_0$, как это показано в п.3 гл.1.

В п.2 анализируются параметры, определяющие процесс увлечения, приведены сведения об их величине и относительных ошибках. В этом параграфе введением некоторых характерных величин и безразмерных переменных уравнения и краевые условия, приведенные в п.1, записаны в безразмерной форме.

В п.3 приведен алгоритм решения задачи увлечения вертикальной лентой.

В этом параграфе используются безразмерные переменные H_{10} , α , t , которые соответствуют прежним переменным h_{10} , h_0 , x_0 . Пусть $f(\bar{x})$ и $\bar{F}(\bar{x})$ имеют тот же смысл, что ранее, а компонентами вектора \bar{x} считаются переменные (H_{10}, α, t) . Таким образом, $f(\bar{x}) = 0.5 \|\bar{F}(\bar{x})\|^2$ и задача заключается в том, чтобы вычислить $\min f(\bar{x})$.

Минимум $f(\bar{x})$ вычислялся следующим образом: бралось некоторое начальное значение \bar{x}_0 , близкое к экспериментальным данным, далее на каждом шаге применялся итерационный процесс Ньютона

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - (\bar{F}'(\bar{x}_n))^{-1} \bar{F}(\bar{x}_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

если шаг существенно уменьшал значение $f(\bar{x})$. В противном случае производилось дробление шага $\bar{x}_{(n+1)\lambda_k} = \bar{x}_n + \lambda_k \bar{x}_{n+1}$ с уменьшением значений λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ до тех пор, пока либо значение $f(\bar{x}_{(n+1)\lambda_k})$ не уменьшалось до приемлемого значения, либо $\bar{x}_{(n+1)\lambda_k}$ совпадал с \bar{x}_n с некоторой предельной точностью $\varepsilon_{\min} > 0$. Если имел место первый случай, то опять производился ньютоновский шаг, если второй, - то процесс считался завершенным.

Значения компонент якобиана $\bar{F}'(\bar{x}_n)$, которых надо вычислять на каждом шаге, определялись в следующем порядке. Пусть Y_1 означает обезразмеренную функцию y_1 , а $Y_2 = Y_1'$, и $B(H_1, \alpha)$ есть правая часть (в), умноженная на $Y_1^{1/2}/2$. Дифференцирование

обезразмеренной системы (3) по H_{10} , t даст часть значений компонент $\bar{F}'(\bar{x}_n)$. Так как для вычисления $\bar{F}'(\bar{x}_n)$ требуется еще и значения $Y_{i+1} = \partial Y_i / \partial \alpha$, $i = 1, 2$, то дифференцируя обезразмеренное уравнение (6) по α как по параметру, получаем

$$\frac{dY_3}{dH_1} = Y_4(H_1, \alpha),$$

$$\frac{dY_2}{dH_2} = [-2 \frac{\partial B}{\partial \alpha}(H_2, \alpha) Y_1(H_2, \alpha) + B(H_2, \alpha) Y_3(H_2, \alpha)] Y_1(H_2, \alpha)^{-3/2}, \quad (12)$$

с начальными условиями

$$Y_3(\alpha, \alpha) = 0, \quad Y_4(\alpha, \alpha) = -2(3 - 6\alpha^2)^{2/3} / \alpha^2, \quad (13)$$

которые с предыдущим уравнением (6) дают систему дифференциальных уравнений четвертого порядка. Интегрирование этой системы от точки α до H_{10} позволяет для каждого шага алгоритма вычислять значение $(\bar{F}'(\bar{x}_n))^{-1}$, где $\bar{x}_n = (H_{10}^{(n)}, \alpha^{(n)}, t^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Так как точка $H_2 = \alpha$ для системы (6), (7), (12), (13) является особой, то функции Y_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) в окрестности точки $H_2 \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ были разложены в ряд Тейлора и интегрирование системы велось от точки $H_2 = \alpha + \epsilon$.

В п.4 приведена постановка задачи, увлечения жидкости наклонной лентой. Показано, что профиль свободной поверхности описывается функцией h_2 , где h_2 решение уравнения

$$h_2'''(x) = B_1(h_2(x), h_0) + \frac{\rho g \sin \gamma}{\sigma} h_2'(x), \quad (14)$$

$$h_2(\infty) = h_0, \quad h_2'(\infty) = 0, \quad (15)$$

$$B_1(h_2, h_0) = \left(\frac{3\mu u_0}{\sigma} (h_0 - h_2) - \frac{\rho g h_0^3}{\sigma} \cos \gamma \right) / h_2^3 + \frac{\rho g \cos \gamma}{\sigma}, \quad (16)$$

в первой области, и функцией $h_2(x)$ во второй области, параметрически определяемой равенствами

$$\begin{aligned} x(\theta) &= -r(\theta) \sin \gamma + z(\theta) \cos \gamma, \\ h_2(\theta) &= r(\theta) \cos \gamma + z(\theta) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (17)$$

где γ - угол наклона ленты от вертикали, а

$$\begin{aligned} r(\theta) &= c + \frac{a}{\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right) - \frac{2a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ z(\theta) &= a(1 + \cos \theta)^{1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

c - некоторая постоянная, θ - параметр.

Здесь требуется находить такие значения h_0, θ , чтобы функция $h_1(x)$, являющаяся решением уравнения (14) с условиями (15), и функция $h_2(x)$ в некоторой точке $x_0 > 0$ удовлетворяли бы условиям

$$h_1^{(i)}(x_0) = h_2^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (19)$$

Подстановка $y(h_1, h_0) = h_1'$ преобразует уравнение (14) к

$$y'' = -(y')^2 + B_2(h_1, h_0)/y + \frac{\rho g \sin \gamma}{\sigma} / y \quad (20)$$

с начальными условиями

$$y(h_0, h_0) = 0, \quad y'(h_0, h_0) = c_1(h_0), \quad (20a)$$

где c_1 единственный вещественный корень некоторого кубического уравнения. Тогда условия (19) в переменных h_{10}, h_0, θ будут иметь вид

$$\begin{aligned} y(h_{10}, h_0) - ctg(\theta - \gamma) &= 0, \\ y(h_{10}, h_0) y'(h_{10}, h_0) - a(1 + \cos \theta)^{1/2} / a \sin^3(\theta - \gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$B_2(h_{10}, h_0) + \frac{\rho g}{\sigma} y(h_{10}, h_0) \sin \gamma - \frac{\cos \gamma + (6 + 5 \cos \theta) \cos(\theta - \gamma)}{a \sin^5(\theta - \gamma)} = 0,$$

или кратко

$$\bar{F}(\bar{x}) = 0. \quad (21a)$$

Аналогично п.1 поиск решения последнего нелинейного уравнения также заменен поиском минимума функционала $f(\bar{x}) = 0.5 \|\bar{F}(\bar{x})\|^2$.

В п.5 описан метод решения задачи увлечения жидкости наклонной лентой. Он аналогичен методу, который уже был описан выше, в п.3. Отличие этого параграфа от предыдущего состоит в том, что в нем использованы другие переменные, а также доказано, что если решение уравнения (20) с условиями (21a) существует, то оно разлагается в ряд Тейлора по степеням $h_1 - h_0$, который сходится в некоторой окрестности точки $h_1 = h_0$ и указан его радиус сходимости.

В п.6 приводятся результаты численных расчетов в виде таблиц и графиков и сравнения с данными физических опытов. Из полученных численных результатов следует, что предложенная модель достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными при

$$G \leq 10^{-2}, \quad \text{где } G = \mu u_0 / \sigma \text{ безразмерный параметр.}$$

Например, сравнение между численными результатами и опытом для минерального масла с следующими реологическими характеристиками

$\rho = 980 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 0.16 \text{ кг/м}\cdot\text{с}$, $\sigma = 0.0317 \text{ н/м}$ показывает, что относительное отклонение полученных результатов от опытных для скорости вытягивания меньшей чем $u_0 = 0.036 \text{ м/с}$ не превосходит 10% и оно убывает с уменьшением u_0 . На рис. 2 приведен график характерного результата, где параметр G изменялся от $2.14 \cdot 10^{-5}$ до 1.60×10^{-2} . На практике, при нанесении фоторезиста на подложку, скорость вытягивания подложки обычно имела порядок 0.01 м/с. Для получения заданной толщины h_0 целесообразнее всего управлять скоростью вытягивания u_0 . Если жидкость такова, что ее вязкость μ меняется в широком интервале при изменении температуры, а коэффициент поверхностного натяжения σ меняется гораздо медленнее, то выгодно также установить и поддержать ту температуру, которая дает необходимое значение G . Кроме того, на практике требуется, чтобы увлекаемый слой имел одинаковую толщину. Из полученных численных результатов следует, что предельная толщина устанавливается примерно на расстоянии $2a$ (a - капиллярная длина) от горизонтальной поверхности жидкости, следовательно, выше этой точки слой будет иметь требуемое свойство.

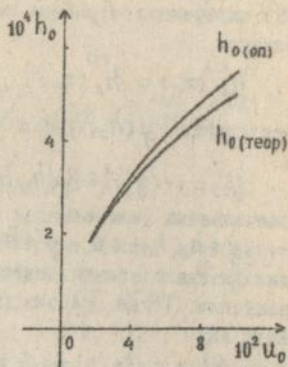


Рис. 2.

Численные эксперименты также показали, что при уменьшении скорости вытягивания u_0 , а с ней и G значение x_0 приближается к капиллярной длине a , что также подтверждает правильность модели, т.к. если лента не движется и имеет место полное смачивание, то $x_0 = a$.

Во второй главе рассмотрена задача увлечения жидкости полым круговым вертикальным цилиндром, извлекаемым из сосуда со смачивавшей его жидкостью.

В п.1 анализированы ранее существующие постановки задачи определения предельной толщины пленки.

Выписаны нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие свободный профиль жидкости в двух характерных областях.

Пусть

$$b(r, h) = (r+h)^2 [2rh + h^2 - 2(r+h)^2 \ln(1+h/r)] / 2 + (2rh + h^2)^2 / 4.$$

Тогда профиль пленки $h(x) = h_1(x)$ в первой области, в промежутке $x_0 \leq x < \infty$ определяется уравнением

$$h_1''' = 2[(b(r_0, h_1) - b(r_0, h_0))/\alpha^2 + G(2r_0 h_1 + h_1^2 - 2r_0 h_0 - h_0^2)]/b(r_0, h_1), \quad (22)$$

с условиями

$$h_1(\infty) = h_0, \quad h_1'(\infty) = 0, \quad (22a)$$

где h_0 - предельная толщина, r_0 - радиус цилиндра, а величины α - капиллярная длина и G уже ранее были определены.

Во второй области профиль описывается уравнением

$$x''/(1+(x')^2)^{3/2} + x'/(r_0 + h_2)(1+(x')^2)^{1/2} = 2x/\alpha^2 \quad (23)$$

с краевым условием

$$x(\infty) = 0 \quad (23a)$$

где $x = x(h_2)$ функция, обратная к $h(x) = h_2(x)$ для $0 < x \leq x_0$.

Решения уравнения (22) и (23) должны сжиматься в некоторой точке $x_0 > 0$ так, чтобы были выполнены условия

$$h_i^{(i)}(x_0) = h_2^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (24)$$

Пусть $y_1(h_1, h_0) = h_1'$, $y_2(h_1, h_0) = dy_1/dh_1$. Тогда уравнение (22) перейдет в следующую систему

$$y_2' = y_2, \quad (25)$$

$$y_2' = 2B_2(h_1, h_0)/y_1^2 - y_2^2/y_1,$$

с начальными условиями

$$y_1(h_0, h_0) = 0, \quad y_2(h_0, h_0) = 0, \quad (25a)$$

где функция $2B_2(h_1, h_0)$ тождественно равна правой части (22).

Далее в этом параграфе показано, что задача определения профиля $h(x)$ окажется решенной, если найти корень нелинейной алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1(h_{20}, h_0) - 1/x_0' &= 0, \\ y_2(h_{20}, h_0)y_1(h_{20}, h_0) + x''(h_{20}, x_0')/x_0'^3 &= 0, \\ 2(x_0')^4 B_2(h_{20}, h_0) + 3[x''(h_{20}, x_0')]^2/x_0' - x'''(h_{20}, x_0') &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

где значения $x^{(i)}(h_{20}, x_0')$ ($i=2,3$) определяются из уравнения (23) с краевыми условиями

$$x'(h_{20}, x_0') = x_0', \quad x(\infty, x_0') = 0. \quad (27)$$

При численном решении системы (26) главной проблемой является нахождение решения краевой задачи (23), (27). Численный метод решения этой задачи описан в п.2.

В этом параграфе использованы безразмерные переменные $t = (r_0 + h_2)/a$ и $u = x/a$, где r_0 и a - радиус цилиндра и капиллярная длина соответственно. Число x_0' в (27) заменено тангенсом некоторого угла γ_0 . Решаются задачи

$$u''/(1+(u')^2)^{3/2} + u'/t(1+(u')^2)^{1/2} = 2u \quad (28)$$

с краевыми условиями

$$u'(\xi_0) = -tg \gamma_0, \quad u(\infty) = 0, \quad (28a)$$

или

$$u'(0) = 0, \quad u(\xi_0) = tg \gamma_0. \quad (28b)$$

Задача (28), (28a) названа внешней, а (28), (28b) внутренней. Ясно, что решение этих краевых задач зависит от ξ_0 и γ_0 , так что можно писать $u(t) = u(t; \xi_0, \gamma_0)$. Внешняя задача решена в два этапа. На первом этапе решалась краевая задача (28), (28a) для некоторых специально подобранных значений $\xi_0 \in [0,006, 6,0]$ ($i=1,2,\dots,30$) при $\gamma_0 = \pi/2$ и определялись значения $u_i = u(\xi_{0i}; \xi_{0i}, \pi/2)$. Промежуток значений для ξ_0 был выбран, исходя из технологических интересов. Далее по точкам u_i был построен интерполяционный кубический сплайн $W(\xi_0)$. На втором этапе для углов $\gamma_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ решалось скалярное уравнение

$$u'(\xi_0; \eta, \pi/2) + tg \gamma_0 = 0 \quad (29)$$

относительно η , $0 < \eta < \xi_0$, где через $u(t; \eta, \frac{\pi}{2})$ обозначено решение задачи Коши для уравнения (28) с начальными условиями

$$u(\eta) = w(\eta), \quad u'(\eta) = -\infty. \quad (30)$$

Внутреннюю задачу также можно решать аналогичным образом, т.к. для функции $W(\xi_0) = u(\xi_0; \xi_0, \frac{\pi}{2})$ в литературе имеется известное аппроксимирующее выражение.

Рассмотренная внешняя краевая задача ранее была исследована

в работах Принсена Х. и Мейсона С., Вайта Д. и Толмейджа Дж., Хью Ч. и Скривена И. Подход, предложенный в диссертации, отличается от работ упомянутых авторов следующим: а) осуществлена проверка приемлемости полученного приближенного решения; б) при $y'_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\xi_0 \in [0, 0.006, 6, 0]$ значение решения на левом крае можно получить непосредственно по формуле $u(\xi_0) = w(\xi_0)$, где $w(\xi_0)$ вышеуказанный кубический сплайн со специально подобранными узлами, обеспечивающий высокую точность (в предыдущих работах имелись только таблицы некоторых значений $w(\xi_0)$ с неравномерной точностью); в) при $y'_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ решение краевой задачи сведено к решению нелинейного алгебраического уравнения (в предыдущих работах использовалась линейная интерполяция табличных значений, точность которой является неудовлетворительной).

В п.3 подробно описан метод вычисления составных частей алгоритма глобального поиска решения уравнения (25).

В третьей главе доказан ряд теорем, используемых в диссертации. Первые две теоремы показывают, что ранее использованные математические модели расходятся с физическими требованиями к ним. В третьей теореме доказывается законность замены краевых условий на начальные путем понижения порядка дифференциального уравнения. Из теоремы 4 следует, что уравнение (6) имеет хотя бы одно решение. Теорема 5 эквивалентна утверждению о том, что решение $h_1 \equiv h_0$ уравнения (1) неустойчиво.

Теорема 1. Решение уравнения

$$y'''(x) = -(y(x)-1)/y^3(x) + T \quad (31)$$

обладающее свойствами

$$y(x_0) = +\infty, \quad y(\infty) = 1, \quad y'(\infty) = 0, \quad (32)$$

где $T > 0$, $x_0 \in (-\infty, \infty)$, не существует.

Теорема 2. Если решение уравнения (31) при $T=0$ обладающее свойствами (32) существует, то необходимо $x_0 = -\infty$.

Теорема 3. Пусть решение уравнения

$$y'''(x) = 2 + (3\alpha - 2\alpha^3)/y^3(x) - 3/y^2(x) \quad (33)$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, с краевыми условиями

$$y(\infty) = \alpha, \quad y'(\infty) = 0 \quad (34)$$

существует. Тогда $y''(\infty) = 0$.

Далее рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение

$$y(x) = 2 \int_{\alpha}^x (\tau - \alpha)(x - \tau) \frac{Q(\tau)}{\sqrt{y(\tau)}} d\tau \equiv A(x, y(\cdot)), \quad (35)$$

где $0 < \alpha \leq x \leq \beta$, а функция $Q(\tau)$ такая, что

$$0 < a_1 \leq Q(\tau) \leq b_1 < \infty, \quad \tau \in [\alpha, \beta]. \quad (36)$$

Вводится в рассмотрение множество

$$K = \left\{ y(\tau) : y(\tau) = (\tau - \alpha)^2 \varphi(\tau), \quad \varphi \in C^0[\alpha, \beta], \right. \\ \left. (a_1^2/b_1)^{2/3} \leq \varphi(\tau) \leq (b_1^2/a_1)^{2/3} \right\}.$$

Показано, что K - является непустым, выпуклым, ограниченным и замкнутым множеством банахова пространства непрерывных функций $C^0[\alpha, \beta]$, а оператор $A(x, y(\cdot))$ вполне непрерывным на K . Доказана следующая

Теорема 4. Пусть выполнено условие (36). Тогда уравнение (35) на множестве K имеет по крайней мере одно решение.

Доказано также следующее утверждение о неустойчивости нулевого решения.

Теорема 5. Нулевое решение дифференциального уравнения

$$y''' = \frac{2(y^2 + 3\alpha y + \alpha^2) \cos \gamma - 3}{(\alpha + y)^3} y + 2G^{1/3} y' \sin \gamma \quad (38)$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $G > 0$, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, неустойчиво.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

1. Построены и исследованы новые математические модели, описывающие процесс увлечения жидкости движущейся лентой и прямым круговым цилиндром в случае малых чисел Рейнольдса.

2. Доказаны теоремы о существовании, об ограниченных решениях и об устойчивости некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих свободную поверхность увлекаемой жидкости.

3. Разработаны вычислительные алгоритмы, позволяющие находить профиль свободной поверхности увлекаемой жидкости.

4. На основе разработанных алгоритмов созданы программы на языке ФОРТРАН-77 и получены численные результаты.

5. Проведено сравнение численных результатов с данными физических опытов и определена граница применимости предложенных математических моделей.

6. Разработанная методика расчета была внедрена в практику на предприятии п/я А-7968 г. Киева.

По теме диссертации опубликованы 6 работ, в которых отражены основные результаты работы.

1. Бахтоваршоев А.Ш., Кузьмин А.В. Численный метод решения задачи нанесения жидкой пленки на движущуюся вертикальную ленту. К., 1988, 13с. Деп. в УкрНИИИТИ 06.02.89, № 510.

2. Бахтоваршоев А.Ш., Биджк А.И. и др. Физико-математическая модель формирования слоя фоторезиста на полиамидную подложку. //Микроэлектронные устройства, 1989, сер.10, вып.1(296).

3. Бахтоваршоев А.Ш., Кузьмин А.В. Об одном численном методе решения задачи нанесения жидкой пленки на движущуюся вертикальную ленту. //Докл. АН Тадж.ССР, 1989, т.32, № 10, с.649-652.

4. Бахтоваршоев А.Ш., Биджк А.И. и др. Математическое моделирование некоторых процессов физики полупроводников. К., 1991, 72 с. Деп. в УкрНИИИТИ 30.09.91., № 1303-Ук91.

5. Makarov V.L., Kuzmin A.V., Bakhtovarshoev A.Sh. Mathematic modelling of the process of adhering of the viscous liquid to a slowly withdrawn surface. In book: Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems, UK, CUP, Southampton, 1991, V.1.

6. Бахтоваршоев А.Ш., Кузьмин А.В. Математическое моделирование нанесения тонкого слоя вязкой жидкости на извлекаемую под углом бесконечную пластину. //Вычисл. и прикл. математика. К.: Амбидь, 1992, Вып. 73, с.57-61.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

4711.37

Ав 26.893

Подп. в печ. 15.01.93. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,93. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж
100 экз. Зак. 21. Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3