ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.ФРАНКА

На правах рукопису

ВЕНГЕРСЬКИЙ ПЕТРО СЕРГІЙОВИЧ

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ПОБУДОВИ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЗАДАЧ

Спеціальність 05.13.16 - застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів в наукових дослідженнях

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1993

Робота виконана на кафедрі теорії оптимальних процесів Львівського державного університету ім. І. Франка

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент СЕНЬО П.С.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ШАЙДУРОВ В.В., доктор фізико-математичних наук, професор ПОПОВ Б.О.

Ведуча організація: Санкт-Петербургський державний університет

Захист відбудеться "7" квітня 1993 р. в 15 годин на засіданні спеціалізованої ради К 068.26.12 у Львівському державному університеті ім. І.Франка (290602, Львів, вул. Університетська 1, ЛДУ, ауд. 270).

Здисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського державного університету.

Автореферат розісланий "4" березня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Б.А.Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Побудова математичних моделей багатьох явищ науки і техніки зводиться до розв'язування нелінійних рівнянь або систем нелінійних рівнянь. В основному, вони розв'язуються ітераційними методами. Тому виникає питання побудови ефективних і достатньо стійких ітераційних методів розв'язування таких задач.

В більшості випадків при теоретичних дослідженнях алгоритмів передбачається, що обчислювальний процес є ідеальним. Але, на практиці обчислення на ЕОМ ведуться із скінченним числом розрядів. Крім цього, кожний обчислювальний процес супроводжують похибки методу, початкових даних, округлень і інші. Всі ці похибки можуть повністю порушити збіжність методу і навіть при отриманні граничного елементу немає впевненості, що знайдений шуканий розв'язок. Розв'язуючи апроксимаційну задачу, необхідно додатково виявити наскільки отриманий розв'язок відрізняється від точного розв'язку вихідної задачі. Один з підходів вивчення впливу похибок, які супроводжують процес розв'язування нелінійних рівнянь, розглянутий в роботах М.Д.Бабича і В.В.Іванова, І.В.Бойкова і І.І.Жечева, М.Я.Бартіша і Ю.М.Щербини, Б.А.Бельтюкова, В.А.Курчатова, Г.М.Вайнікко, П.С.Сеньо, С.Ю.Ульма, В.Є.Шаманського, О.М.Ваармана і інших.

Інший підхід полягає в застосуванні для розв'язування рівнянь інтервальних ітераційних методів, яким не властиві вище названі недоліки. Такому підходу присвячені роботи Ю.І.Шокіна, С.А.Калмикова, З.Х.Юлдашева, М.М. Глазунова, О.П.Вощініна і Г.Г.Сотірова, Б.С. Добронца і В.В.Шайдурова, Г. Алефельда і Ю.Хецбергера, Р.Мура, Г.Г.Меньшикова, С.П. Шарого і інших.

На даний момент розроблені і досліджені різні модифікації інтервального методу Ньютона, які мають квадратичний порядок збіжності. Тому актуальною залишається задача побудови інтервальних ітераційних методів вищих порядків збіжності, які прості в реалізації і при виконанні певних умов більш ефективні в користуванні. Розв'язанню такої задачі присвячені роботи Г.Алефельда, Ю.Херцбергера, Ф.Потра, А.Фромера, Г.Майєра, Б.Кірфотта, Р.Кравчика, П.С.Сеньо і інших.

Одним із способів підвищення ефективності інтервальних ітераційних методів такого типу є застосування апроксимації оберненого оператора. Ця задача розглядалася в роботах Ю.Херцбергера, Р.Кравчика, Ж.Шмідта і інших. Поряд з нею важливою проблемою є дослідження стійкості згаданих методів, їх практичне використання, порівняння ефективності методів при розв'язуванні конкретних задач.

Метою даної роботи було:

1.Дослідження обчислювальних аспектів реалізації інтервальних ітераційних методів ньютонівського типу, аналіз умов їх застосування.

2.Побудова нових ефективних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь, дослідження властивостей запропонованих методів, визначення кількості кроків для виявлення наявності коренів в початкових інтервалах.

3.Аналіз стійкості побудованих інтервальних ітераційних методів, вибір оптимального правила для відшукання допустимих областей збіжності даних методів.

4.Застосування отриманих інтервальних ітераційних методів до розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, а також систем, отриманих дискретизацією граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь та крайових задач еліптичного типу.

5.Автоматизація реалізації інтервальних обчислень на сучасних ЕОМ, створення бібліотеки основних інтервальних математичних операцій та інтервальних розширень стандартних математичних функцій.

Наукова новизна. В роботі запропоновано новий спосіб визначення інтервальних операцій, при введенні якого справедлива властивість дистрибутивності. Розглянуто обчислювальні аспекти реалізації різних модифікацій інтервального методу Ньютона, отримані прості умови збіжності однієї з них. Запропоновано новий вид інтервальних ітераційних методів, обгрунтовані основи їх побудови. Побудовані і досліджені різні модифікації таких методів, доведено при виконанні відповідних умов збіжність і визначено порядок збіжності запропонованих методів, встановлено кількість кроків, які необхідно провести для вияснення належності кореня початковому інтервалу. Отримані і обгрунтовані умови стійкості однієї з модифікацій інтервального ітераційного методу типу Рунге. В роботі аналізується вибір найбільш ефективного правила обчислення допустимих областей побудованих інтервальних методів. Запропоновані методи застосовувались для розв'язання конкретних задач (систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, рівнянь, отриманих дискретизацією граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь та крайових задач еліптичного типу). На конкретних прикладах проведено порівняння ефективності запропонованих методів і раніше відомих. Створено препроцесор інтервальних обчислень, який дозволяє використовувати інтервальні дані нарівні з іншими типами даних, не порушуючи структуру мови програмування.

<u>Обгрунтованість основних наукових результатів</u> забезпечується чіткими математичними доведеннями наведених теорем, шляхом розв'язування тестових прикладів і порівняння результатів обчислень з результатами, отриманими іншими відомими методами.

<u>Практична цінність.</u> Побудовані і досліджені обчислювальні алгоритми різних модифікацій інтервальних ітераційних методів типу Рунге знаходять всі дійсні корені, в тому числі і кратні, в заданому початковому інтервалі. Ці методи можна ефективно застосовувати для розв'язування систем нелінійних рівнянь алгебраїчних рівнянь, а також систем, отриманих дискретизацією граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь і крайових задач еліптичного типу. Розглянуті методи враховують похибки всіх типів, включаючи округлення машинних операцій. Значна увага в роботі приділяється питанням, зв'язаних з реалізацією запропонованих методів на ЕОМ. Розроблений препроцесор для автоматизації реалізації інтервальних обчислень на алгоритмічній мові Паскаль на комп'ютерах типу IBM PC/XT/AT. Складена бібліотека підпрограм стандартних інтервальних операцій і інтервальних розширень основних математичних функцій. Алгоритми отриманих

інтервальних методів реалізовані у вигляді окремих підпрограм і можуть бути використані для розв'язування задач вказаних типів для різних початкових даних. Результати роботи використовуються при читанні спецкурсів та при виконанні дипломних і курсових робіт на кафедрі теорії оптимальних процесів Львівського університету та кафедрі математичної теорії мікропроцесорних систем управління Санкт - Петербурзького університету.

Апробація роботи. Основні результати доповідались на Міжнародній конференції по інтервальних та стохастичних методах в науці і техніці (Москва, 1992), Всесоюзній конференції по управлінню в механічних системах (Львів, 1988), Міжреспубліканськ - кій - науково - практичній конференції творчої молоді "Актуальні проблеми інформатики: математичне, програмне і інформаційне забезпечення" (Мінськ, 1992), науково - технічних конференціях "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів в наукових і економічних дослідженнях" (Київ, 1988; Київ, 1989; Севастополь, 1990; Львів, 1991; Львів, 1992), науковій конференції "Змішані обчислення і перетворення програм" (Новосибірськ, 1990), на нараді "Інтервальна математика і її застосування" (Абрау-Дюрсо, 1992), на університетських конференціях, на семінарах кафедри теорії оптимальних процесів ЛДУ.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи містяться в статтях [1 - 14]. Деякі матеріали були включені в звіти по темі "Чисельні методи розв'язування нелінійних рівнянь та задач на екстремум " (ВНТІЦ, Інв. № 02.860031048).

Об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, додатків, висновків та списку основної використаної літератури. Вона включає 150 сторінок машинописного тексту і містить в собі 7 малюнків та 13 таблиць. Бібліографічний список складається з 119 назв.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі коротко аналізується стан проблеми використання ітераційних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь, обгрунтовується важливість і актуальність питань, які складають предмет дослідження. Викладені основні наукові результати, які виносяться на захист. Дається аннотація дисертації по розділах і параграфах.

В <u>першому розділі</u> розглянуто специфіку реалізації інтервальних обчислень і проаналізовано обчислювальні аспекти реалізації інтервальних ітераційних методів Ньютона. Цей розділ носить допоміжний характер, але може представляти і самостійний інтерес.

В п.1.2 вводяться основні поняття інтервального аналізу і їх властивості. Дається поняття множини машинних чисел, різного типу округлень, показано збереження інтервальних властивостей при округленнях. Приведені означення природніх і об'єднаних інтервальних розширень функцій, їх залежність від порядку виконання інтервальних операцій. Поряд із звичайним визначенням введено слідуюче визначення інтервальних операцій.

Нехай $\bar{\varphi}$ - відображення множини дійсних чисел в інтервальний простір $I(R)$ і $\bar{\varphi}$ задано параметрично $(x + \bar{\varphi}(x(t)),\ y + \bar{\varphi}(y(t)))$.

<u>Означення.</u> Нехай $*$ - бінарна операція на множині дійсних чисел; $X,\ Y \in I(R)$. Тоді

$$X \bar{*} Y = (\ z \mid z = x*y,\ x = x(t), y = y(t),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y\ ), \quad (1)$$

визначає бінарну операцію на $I(R)$.

На відміну від стандартного визначення інтервальних операцій, із (1) випливає, що тоді має місце властивість дистрибутивності.

п.1.2 присвячений аналізу деяких модифікацій інтервального методу Ньютона для знаходження дійсних розв'язків систем нелінійних рівнянь.

Нехай задане слідуюче нелінійне рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

де $f: D \subset R^n \to R^n$. Застосуючи до $f(x)$ "теорему про середнє значення", тоді отримаємо

$$f(x) = f(\bar{x}) + J(\xi)(x - \bar{x}),\ \bar{x} \in D,$$

де $J(\xi)$ - матриця похідних рівняння (2), ξ приймає значення з проміжку $(\ x,\ \bar{x}\ )$. Позначимо через X інтервальний вектор, який містить в собі точки x і $\bar{x}$. Тоді і ξ належить X. Підставимо в $J(\xi)$ замість ξ інтервал X. Із системи рівнянь

$$f(\bar{x}) + J(X)(z - \bar{x}) = 0 \qquad (3)$$

випливає, що розв'язки рівняння (2) належать множині розв'язків рівняння (3). Розв'язуючи різними способами (3) можна побудувати різні модифікації інтервальних ітераційних методів Ньютона.

В загальному випадку інтервальний метод Ньютона полягає в обчисленні послідовності вкладених інтервалів $X^{(k)}$ $(k=0,1,2, \dots)$ по формулах

$$Y^{(k)} = x^{(k)} - [J(X^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}); \qquad (4)$$

$$X^{(k+1)} = Y^{(k)} \cap X^{(k)},\ x^{(k)} \in X^{(k)}. \qquad (5)$$

Багатьма авторами - Муром Р., Нікелем Р., Алефельдом Г., Херцбергером Ю. та іншими було доведено, що так побудований метод дає можливість знайти всі корені системи (2) або видасть інформацію про відсутність коренів в початковій області. Збіжність методу (4) - (5) квадратична (Теореми 1 і 2).

Значна частина часу при реалізації методу (4)-(5) припадає обчислення оберненої матриці до інтервальної матриці похідних $J(X^{(k)})$. Більше того, однією з труднощів при реалізації даного методу є виродженість матриці похідних $J(X^{(k)})$.

Тому Кравчиком Р. була запропонована модифікація методу (4)-(5), яка не містить обертання інтервальної матриці похідних $J(X^{(k)})$. Так в методі

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - B^{(k)} f(x^{(k)}) + (I - B^{(k)} J(X^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}), \qquad (6)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap K(X^{(k)}),\ x^{(k)} \in X^{(k)},\ k=0,1,2, \dots \qquad (7)$$

$B^{(k)}$ - це точкова інверсія до центру матриці $J(X^{(k)})$. Крім того, спрощується область, що обмежує розв'язки системи (2), із зірчатої форми, отриманої по (4)-(5), вона набуває вигляду гіперпаралелепіпеду, грані якого паралельні осям координат.

Властивості послідовності інтервалів, отриманої по (6)-(7) досліджувалися Кравчиком Р., Алефельдом Г., Муром Р., Сельсмаком Ф. та іншими авторами. В дисертаційній роботі отримано твердження, в якому умови збіжності цього методу більш конкретні і легко перевіряються при практичному застосуванні.

Теорема 3. Нехай в початковому інтервалі $X^{(0)}$ міститься єдиний корінь системи (2). Якщо для всіх $k=0,1,2, \ldots$ виконується умова

$$t^{(k)} < 1, \quad \text{де } t^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |R_{ij}^{(k)}|, R^{(k)} = I - B^{(k)}J(X^{(k)}),$$

тоді $X^{(k)} \to x^{*}$.

У випадку, коли діагональ матриці похідних системи (2) є домінуючою, можна побудувати модифікацію методу (4)-(5), яка буде значно ефективніше розв'язувати поставлену задачу. Так Хансеном Е. був запропонований і досліджений (Теорема 4) слідуючий метод

$$Y^{(k)} = x^{(k)} - D^{(k)^{-1}} [B^{(k)} f(x^{(k)}) + (L^{(k)} + U^{(k)})(X^{(k)} - x^{(k)})], \quad (8)$$

$$X^{(k+1)} = Y^{(k)} \cap X^{(k)}, \; x^{(k)} \in X^{(k)}, \; k=0,1,2,\ldots, \quad (9)$$

де $B^{(k)}J(X^{(k)}) = L^{(k)} + D^{(k)} + U^{(k)}$; $L^{(k)}, D^{(k)}, U^{(k)}$ – відповідно нижня трикутна, діанональна і верхня трикутна матриці.

В даній роботі проаналізовано обчислювальні аспекти реалізації інтервальних методів ньютонівського типу (4)-(9). Показано, що можна використовувати отримані результуючі інтервали по деякому напрямку в ролі нових вхідних інтервалів при обчисленні на цьому кроці результуючих інтервалів по решті напрямках. Точка $x^{(k)}$ належить інтервалу $X^{(k)}$, вона може бути вибрана довільною з інтервалу $X^{(k)}$. але коли вона є середньою точкою інтервалу $X^{(k)}$, то доведено (при монотонності функції $f(x)$), що отримаємо зменшення ширини інтервалу на кожному кроці методу не менше, ніж удвічі.

Розділ 2 присвячений побудові і дослідженню інтервального ітераційного методу типу Рунге. В основу побудови цього методу покладені слідуючі ідеї:

- ідея Рунге, яка ним була застосована для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Вона полягає в апроксимації з найбільшою можливою точністю похідних вищих порядків лінійними комбінаціями першої похідної у відповідних точках;

- поведінка "середніх" точок залишкових членів у формі Лагранжа узагальнених рядів Тейлора функції $f(x)$ при стисненні проміжку розкладу в точку і співвідношення між цими точками в розкладі самої функції та її першої похідної.

В п.2.1 приведено обгрунтування і передумови побудови інтервальних методів типу Рунге.

Побудовано інтервальний метод типу Рунге, який полягає в обчисленні послідовності інтервалів $X^{(k)}$ $(k=0,1,\dots)$ по формулах

$$Y^{(k)}=x^{(k)}-[1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(\tilde{\Omega}^{(k)})]^{-1}f(x^{(k)}), \qquad (10)$$

$$X^{(k+1)}=Y^{(k)}\cap\tilde{\Omega}^{(k)},\ k=0,1,\dots, \qquad (11)$$

де $\tilde{\Omega}^{(k)}=\Omega^{(k)}\cap X^{(k)}$, $x^{(k)}\in X^{(k)}$;

$$\Omega^{(k)}=\{z^{(k)}\mid 2/3f(x^{(k)})+f'(X^{(k)})(z^{(k)}-x^{(k)})=0\}.$$

Далі в даній дисертаційній роботі детально досліджується один з інтервальних методів типу Рунге, де в ролі множини $\Omega^{(k)}$ виступає сам інтервал $X^{(k)}$, бо ми апріорі допускаємо, що $x^{*}\in X^{(k)}$.

В п.2.2 побудовано слідуючий інтервальний метод

$$V^{(k)}=x^{(k)}-[1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(X^{(k)}-x^{(k)}))]^{-1}f(x^{(k)}). \qquad (12)$$

$$X^{(k+1)}=Y^{(k)}\cap V^{(k)},\ x^{(k)}\in X^{(k)},\ k=0,1,\dots \qquad (13)$$

В цьому інтервальному методі кількість інтервальних обчислень майже така ж сама, як в інтервальному методі Ньютона (4)-(5) (точкові обчислення значно не впливають на сумарний час рахунку). Однією з умов застосування даного методу для знаходження дійсних коренів системи нелінійних рівнянь (2) є виконання умов наступної леми.

Лема 1. Нехай функція $f: D\subset R^n\to R^n$ двічі неперервно диференційована по Фреше в кожній точці випуклої множини $D_0\subset D$, $f(x)$ - її аналітичний вираз. Нехай визначено інтервальне розширення [1] $f(X)$ на D_0, x^{*} -розв'язок системи (2) і $x^{(0)}<x^{*}$

---

[1] Багатьма авторами в публікаціях термін інтервальне розширення вживається в сенсі природнього інтервального розширення.

$(x_i^{(0)} < x_i^*, i=1,2, \dots n)$, де $x^* \in X^{(0)} \subset D_0$.

Якщо $Y^{(0)} \supset [x^{(0)}, x^{(0)} + 3/2 (x^* - x^{(0)})]$, тоді

$$f''(x^{(0)} + \theta_2^0 (x^* - x^{(0)}))(x^* + x^{(0)})^2 \subset f''(x^{(0)} + 2/3 [\theta_1^1](Y^{(0)} - x^{(0)})) \times$$
$$\times (Y^{(0)} - x^{0)})^2 \qquad (14)$$

де $x^{(0)} + \theta_2^0 (x - x^{(0)})$, $x^{(0)} + 2/3 [\theta_1^1](x - x^{(0)})$ – проміжні точки залишкових членів розкладів в ряд Тейлора до другої похідної в точці $x^{(0)}$ відповідно функцій $f(x)$ і $f(x^{(0)} + 2/3 (x - x^{(0)}))$.

Проаналізовано властивості методу (12)-(13), які містяться в слідуючій теоремі.

Теорема 5. Нехай виконуються умови леми 1. Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ і обчислена по формулах (12)-(13), має властивості:

a) $x^* \in \hat{X}^{(k)}$, $\hat{X}^{(k)} \subset X^{(k)}$, $\hat{X}^{(k)}$ такий, що справедливо (14);

b) $Z^{(0)} \supset Z^{(1)} \supset Z^{(2)} \supset \dots$, де $Z^{(0)} = \hat{X}^{(0)}$, $Z^{(k)} = Z^{(k-1)} \cap \hat{X}^{(k)}$, $k=1,2,\dots$

Якщо $0 \notin \frac{1}{4} f'(x^{(0)}) + \frac{3}{4} f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(0)} - x^{(0)}))$ і ні один з елементів матриці $\frac{1}{4} f'(x^{(0)}) + \frac{3}{4} f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(\bar{x} - x^{(0)}))$, $\bar{x} \in \hat{X}^{(0)}$ не рівний нескінченості, тоді $\lim\limits_{k \to \infty} \hat{X}^{(k)} = x^*$.

Визначено порядок збіжності запропонованого методу, а саме доведена така теорема.

Теорема 6. Нехай відображення $f\colon D \subset R^n \to R^n$ тричі неперервно диференційоване по Фреше в кожній точці випуклої множини $D_0 \subset D$.

Тоді послідовність $\langle \hat{X}^{(k)} \rangle_{k=0}^{\infty}$, обчислена по формулах (12)-(13) і яка задовільняє умовам теореми 5 збігається до x^*, причому

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) \le c\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^3, \text{ де } c \ge 0.$$

При реалізації інтервального ітераційного методу (12)-(13) може мати місце випадок, коли інтервал $\hat{X}^{(k+1)}$ пустий. Це ознака того, що в початковому інтервалі $X^{(0)}$ немає коренів (2). Нище сформульована теорема, в якій оцінено скільки необхідно провести кроків методу (12)-(13) для вияснення цього факту.

Теорема 7. Нехай $f : R^n \to R^n$ задовільняє слідуючим умовам:

а) $|f(x)| \geq \delta > 0$ для всіх $x^{(k)} \in \hat{X}^{(k)} = [a^{(k)}, b^{(k)}], k=0,1,2, \dots$;

б) $f(x)$ - тричі неперервно диференційована по Фреше в кожній точці випуклої множини $D_o \subset D$ і $f_j (j=\overline{1,n})$ знакопостійні функції на $\hat{X}^{(k)}$, причому $|f^{(i)}(x^{(k)})| \leq K$, $i=1,2,3$; $K=const$; $x^{(k)} = m(\hat{X}^{(k)})$.

Тоді інтервал $\hat{X}^{(k)}$, який не містить нулів $f(x)$, може бути виключений в m кроках інтервального ітераційного методу (I2)-(I3), де

$$m \leq \log_2 \left(\frac{K\,\omega(\hat{X}^{(k)})(1+1/4\omega(\hat{X}^{(k)})+1/24\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^2}{2\delta} + 1 \right).$$

В п.2.3 побудовано модифікацію інтервального методу типу Рунге (I2)-(I3) з використанням ідеї Кравчика Р. . Вона має слідуючий вигляд:

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + (I - C^{(k)} F'(X^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}), \qquad (I5)$$

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \; k=0,1,2, \dots , \qquad (I6)$$

де $X^{(o)}$ - початковий інтервал;

$C^{(k)}$ - приблизна інверсія центру матриці $F'(X^{(k)})$;

I - одинична матриця; $x^{(k)} \in X^{(k)}$;

$F'(X^{(k)}) = 1/4 f'(x^{(k)}) + 3/4 f'(x^{(k)} + 2/3(X^{(k)} - x^{(k)}))$.

Цей метод знаходить всі дійсні корені системи нелінійних рівнянь в наперед заданому початковому інтервалі. Метод (I5)-(I6) не містить обертань інтервальних матриць, що суттєво зменшує об'єм обчислень. Властивості цього методу узагальнені в слідуючій теоремі.

Теорема 8. Нехай відображення $f : D \subset R^n \to R^n$ двічі неперервно диференційоване по Фреше на $X^{(o)} \subset D$. Для $f(x)$ існує інтервальне розширення на $X^{(o)}$, x^* - нуль $f(x)$ на $X^{(o)}$.

Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена по формулах (I5)-(I6), задовільняє слідуючим співвідношенням:

а) $x^* \in K(X^{(k)}), k=0,1,\dots$, де $X^{(k)} \geq [x^{(k)}, x^{(k)} + \frac{3}{2}(x^* - x^{(k)})], x^* \geq x^{(k)}$;

б) якщо для відображення $f(x)$ виконується умова

$$|I - C(X^{(o)})F'(X^{(o)})| < 1, \text{ де } C(X^{(o)}) = (F'(X^{(o)}))^{-1},$$

тоді $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} = x^*$;

в) якщо, крім а) і б), $f(x)$ тричі неперервно диференційована по Фреше на $X^{(0)} \subset D$, тоді має місце

$$\omega(X^{(k+1)}) \le c\,(\omega(X^{(k)}))^3, \; c \ge 0.$$

Ця модифікація інтервального ітераційного методу типу Рунге порівняно з іншими простіша в реалізації і тому саме її рекомендуємо для практичних обчислень.

В п.2.4 розглядаються питання стійкості інтервального методу типу Рунге (12)-(13) при збуреннях оберненого оператора $[1/4\; f'(x^{(k)}) + 3/4\; f'(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)}))]^{-1}$ і вибором початкових операторів в апроксимаціях. Стійкість методу полягає, по-перше, в збіжності до одного і того ж граничного елементу при описаних вище збуреннях; по-друге, в збереженні порядку збіжності методу. Умови стійкості базового методу (12)-(13) містить слідуюча теорема.

<u>Теорема 9.</u> Нехай для точок $x, y \in [x^{(0)}, y^{(0)}] \subset D \subset R^n, (x \le y)$ виконуються умови:

1) відображення $f: D \subset R^n \to R^n$ двічі неперервно диференційоване по Фреше і $f(x^{(0)}) \le 0 \le f(y^{(0)})$;

2) відображення $A: \{(x,y) \mid [x^{(0)}, y^{(0)}] \times [x^{(0)}, y^{(0)}]\} \to R^n \times R^n$, де $f(x) - f(y) = A(x,y)(x-y)$;

3) неперервне відображення

$B: \{(x,y) \mid [x^{(0)}, y^{(0)}] \times [x^{(0)}, y^{(0)}]\} \to R^n \times R^n$,

де $B = B(x,y) = 1/4 f'(y) + 3/4\, f'(y + 2/3(x-y))$,

задовільняє співвідношенням:

а) $B(\bar{x}, \bar{y}) \le B(x,y)$, якщо $x \le \bar{x} \le \bar{y} \le y$; б) $A(x,y) \le B(x,y)$;

в) існує $B(x,y)^{-1}$ і $B(x,y)^{-1} \ge 0$;

4) матриця $P^{(0)} \in R^n \times R^n$ невироджена і:

а) $B(x^{(0)}, y^{(0)})\, P^{(0)} \le I$; б) $P^{(0)} B(x^{(0)}, y^{(0)}) \le I$; в) $P^{(0)} \ge 0$.

Тоді послідовності $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{P^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, визначені по формулах

$$\begin{cases} y^{(k+1)}=y^{(k)}-P^{(k)}f(y^{(k)}); \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-P^{(k)}f(x^{(k)}); \\ P^{(k+1)}=P^{(k)}(I+(I-B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})P^{(k)})(2I-B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})P^{(k)})); \end{cases} \tag{17}$$

задовільняють співвідношенням:

$x^{(0)}\le x^{(1)}\le \ldots\ x^{(k)}\le x^{(k+1)}\le y^{(k+1)}\le y^{(k)}\le \ldots\ \le y^{(1)}\le y^{(0)}$;

$f(x^{(k)}) \le 0 \le f(y^{(k)})$; $P^{(0)}\le P^{(1)}\le \ldots \le P^{(k)}\le P^{(k+1)}\le \ldots$;

$P^{(k)}$ невироджені; $B(x^{(k)},y^{(k)})\, P^{(k)}\le I$; $P^{(k)}\, B(x^{(k)},y^{(k)}) \le I$;

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)}= x^{*}=y^{*}; P^{*} = \lim\limits_{k\to\infty} P^{(k)}= B(x^{*},y^{*})^{-1}=f'(x^{*})^{-1}$;

$f(x^{*}) = f(y^{*}) = 0$.

Якщо для $f(x)$, крім цього , існує третя похідна по Фреше і вона задовільняє умові Ліпшица:

$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le c\, \| x - y \|$ $(c - \mathrm{const})$,

то послідовності $\{[x^{(k)}, y^{(k)}]\}_{k=0}^{\infty}$, $\{P^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ з (17) збігаються відповідно до $[x^{*},y^{*}]$, P^{*}, причому порядок збіжності не менше 3.

В <u>розділі 3</u> показано застосування побудованих інтервальних методів типу Рунге для знаходження всіх дійсних коренів систем нелінійних рівнянь.

Так як спочатку для локалізації коренів системи використовуються методи поділу інтервалів, то в п.3.1 проаналізовано різноманітні правила поділів і отримано правило, яке дозволяє найоптимальніше для даного класу методів знайти локалізуючі інтервали.

п.3.2 присвячений розв'язуванню тестових систем нелінійних рівнянь інтервальними методами типу Рунге. Розглядаються системи різного ступеня складності, з різним розміщенням коренів в початкових інтервалах, різної розмірності. Проводяться порівняння з відповідними модифікаціями інтервального методу Ньютона. Результати обчислень підтверджують теоретичні висновки теорем, наведених в розділі 2.

В п.3.3 показано застосування інтервального методу типу Рунге (17) для розв'язування систем нелінійних рівнянь, які отримані дискретизацією граничних задач, слідуючого вигляду

$$y'' = f(t,y), \quad y(0)= \bar{a},\ y(1)= \bar{Б}.$$

Наведені результати обчислень конкретних прикладів, приводиться порівняння з уже відомими методами.

В п.3.4 побудовано модифікацію методу (15)-(16), яка враховує структуру матриці похідних системи (2), а саме, якщо головна діагональ матриці похідних системи є домінуючою, то зручно використати слідуючии інтервальний метод

$$Y^{(k)} = x^{(k)} - \tilde{D}(X^{(k)})((U(X^{(k)}) - L(X^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}) - f(x^{(k)})), \quad (18)$$

$$X^{(k+1)} = Y^{(k)} \cap X^{(k)}, \quad k=0,1,2,3, \ldots; \quad (19)$$

де $x^{(k)} \in X^{(k)}$, $\tilde{D}(X^{(k)}) = (D(X^{(k)}))^{-1}$;

$F'(X^{(k)}) = L(X^{(k)}) - U(X^{(k)}) - D(X^{(k)})$; $D(X^{(k)})$ діагональна, $L(X^{(k)}), U(X^{(k)})$ – відповідно нижня і верхня трикутні матриці $F'(X^{(k)})$; $F'(X^{(k)}) = 1/4\, f'(x^{(k)}) + 3/4\, f'(x^{(k)} + 2/3(X^{(k)} - x^{(k)}))$.

Властивості методу (18)-(19), його умови збіжності узагальнені в слідуючій теоремі.

<u>Теорема 10.</u> Нехай для відображення $f: D \subset R^n \to R^n$ виконуються умови:

1) $x^* \in D$, і $f(x^*) = 0$; 2) $F'(X) = L(X) - U(X) - D(X)$;

3) $x^* \in X^{(0)}$, $X^{(0)} \subseteq D$; 4) всі дійсні матриці $F'(X^{(0)})$ – M-матриці.

Тоді послідовність інтервалів $(X^{(k)})_{k=0}^{\infty}$, отримана по (18)-(19), володіє слідуючими властивостями:

5) $x^* \in X^{(k)}$, $k = 0,1,2,3, \ldots$; 6) $X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq \ldots$;

7) $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} = x^*$.

Показано використання цього методу для розв'язування систем нелінійних рівнянь, отриманих дискретизацією еліптичних крайових задач такого виду

$$\Delta u = f(s, t, u), \quad (s,t) \in \Omega,$$

якщо $u(s,t) = \varphi(s,t)$ для $(s,t) \in \partial\Omega$. Проведено порівняння результатів обчислень методу (18)-(19) і відповідної модифікації інтервального методу Ньютона (8)-(9).

<u>Розділ 4</u> присвячений реалізації інтервальних обчислень на ПЕОМ. Розроблено препроцесор, який дає змогу використовувати інтервальні дані нарівні з іншими типами даних. Розширено набір

операцій відношення і добавлено в умовний оператор відповідно більше розгалужень. Створено бібліотеку стандартних інтервальних операцій і інтервальних розширень елементарних математичних функцій.

В заключенні сформульовані основні результати роботи.

В додатках містяться тексти програм оброблені препроцесором, а також документи, які підтверджують впровадження результатів дисертації.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1.Для розв'язування систем нелінійних рівнянь побудований інтервальний ітераційний метод типу Рунге наведені алгоритми його різних модифікацій, проаналізовано умови їх використання.

2.Запропоновано і досліджено інтервальний метод типу Рунге у формі Гауса. Доведені теореми про збіжність і порядок збіжності даного методу, а також теорема про максимальну кількість кроків алгоритму запропонованого інтервального методу для визначення наявності кореня в початковому інтервалі.

3.Побудована і досліджена модифікація інтервального методу типу Рунге, яка не містить інверсії інтервальних матриць.

4.Проаналізовано стійкість інтервального методу типу Рунге при збуреннях оберненого оператора і при різному виборі початкових даних.

5.Обговорені обчислювальні аспекти застосування інтервальних методів типу Рунге для знаходження всіх дійсних коренів систем нелінійних рівнянь, а також особливості розв'язування систем спеціального виду. Проведено порівняння результатів обчислень запропонованими методами і відповідними модифікаціями інтервального методу Ньютона.

6.Запропоновано модифікацію інтервального методу типу Рунге, що враховує структуру матриці похідних системи і показано її використання для розв'язування систем нелінійних рівнянь, отриманих дискретизацією крайових задач еліптичного типу.

7.Побудований препроцесор для автоматизації реалізації інтервальних обчислень на персональних ЕОМ з використанням системи програмування TURBO - PASCAL.

Основні результати дисертації викладені в роботах:

1.Венгерський П.С. Комплекс програм реалізації інтервальних ітераційних процесів на ЄС ЕОМ. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. - мат. - 1989. - Вип. 31. - С. 75-81.
2.Венгерський П.С. Автоматизація реалізації інтервальних обчислень на персональних компютерах серії ІВМ РС // Матеріали міжреспубліканської-науково-практичної конф. творчої молоді "Актуальні проблеми інформатики: математичне, програмне і інформаційне забезпечення". - Мінськ,1992. - С.229-230.
3.Венгерський П.С.,Кардаш А.І.,Сеньо П.С.Обчислювальні аспекти інтервального методу типу Рунге // Науково - технічна конф. "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів в наукових і економічних дослідженнях". - Київ, 1988. - С. 8-9.
4.Венгерський П.С.,Кардаш А.І.,Сеньо П.С. Про застосування деяких інтервальних ітераційних методів до розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь // Обчислювальна і прикладна математика. - Київ,1990. - N 70. - С. 11-21.
5.Венгерський П.С., Карпов В.В., Сеньо П.С. Реалізація інтервальних обчислень за допомогою препроцесора на алгоритмічній мові Паскаль для ІВМ РС./ Львів. ун-т. - Львів,1992. - 29 с. - Деп. в УкрНДІНТІ 13.01.92, N 24-Ук92.
6.Венгерський П.С., Карпов В.В.,Сеньо П.С. Препроцесор інтервального аналізу для алгоритмічної мови Паскаль на ІВМ РС. // Змішанні обчислення і перетворення програм. Збірник праць.- Новосибірськ, 1991. - С. 128-133.
7.Венгерський П.С.,Сеньо П.С. Інтервальний метод розв'язування систем нелінійних рівнянь, який оснований на граничних теоремах про середнє./ Львів. ун-т. - Львів,1990. - 23 с. - Деп. в УкрНДІНТІ 20.09.90, N 1612-Ук90.
8.Венгерський П.С.,Сеньо П.С.Розв'язування задач оптимального управління методами інтервального аналізу // 6-та Всесоюзна конф.

по управлінню в мех. системах. - Львів,1988. - С. 29.
9.Венгерський П.С., Сеньо П.С. Про врахування всіх типів похибок при розв'язуванні систем нелінійних рівнянь. // Тез. доп. школи-симп. "Системологія:міждисциплінарні дослідження і проектування складних систем". - Львів, 1988. - С. 27.
10.Сеньо П.С.,Венгерський П.С. Аналоги інтервальних ітераційних методів, які не містять інверсій інтервальних матриць // Науково - технічна конф. "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів в наукових і економічних дослідженнях". - Київ,1991. - С. 169.
11. Сеньо П.С., Венгерський П.С. Застосування деяких інтервальних ітераційних методів до розв'язування систем нелінійних рівнянь спеціального виду.// Міжнародна конф. по інтервальних і стохастичних методах в науці і техніці. Збірник праць. - Москва, 1992. - С. 144-146.
12.Сеньо П.С.,Венгерський П.С. Інтервальний ітераційний метод розв'язування нелінійних систем рівнянь, який не містить інверсій інтервальних матриць // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1991. - Вип. 35. - С. 18-24.
13.Сеньо П.С.,Венгерський П.С. Розв'язування систем нелінійних рівнянь одним ітераційним інтервальним методом // Науково - технічна конф. "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів в наукових і економічних дослідженнях". - Севастополь, 1990. - С. 6-7.
14.Сеньо П.С.,Венгерський П.С.Прискорення збіжності інтервального ітераційного методу типу Рунге. // Науково - технічна конф. "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів в наукових і економічних дослідженнях". - Київ,1989. - С.51-52.

ВЕНГЕРСЬКИЙ ПЕТРО СЕРГІЙОВИЧ

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ
ДЛЯ ПОБУДОВИ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ
МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЗАДАЧ

Спеціальність 05.13.16 - застосування обчислювальної
техніки, математичного моделювання і математичних
методів в наукових дослідженнях

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Підписано до друку 8.02.93. Формат 60х84/16. Папір друк.№1.
Друк.офсет.Умовн.друк.арк. 1,2. Умовн. фарб. відб. 1,3.
Обл.-вид. арк. 1,2. Тираж 100. Зам. 27.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету
ім. І. Франка. 290602. Львів, вул. Університетська, 1.