

КИЇВСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-БУДІВЕЛЬНИЙ ІНСТИТУТ

На правах рукопису

ЄВЗЕРОВ Ісаак Данилович

УДК 539.3

**НЕКОНФОРМНІ КІНЦЕВІ ЕЛЕМЕНТИ
У НЕЛІНІЙНИХ І ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ
БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ**

СПЕЦІАЛЬНІСТЬ: 05.23.17 — БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

**Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук**



КИЇВ 1993

№ 26, 96

Робота виконана в Науково-дослідному інституті
автоматизованих систем планування і керування
у будівництві (НДІАСБ), м.Київ

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Літвінов В.Г.
доктор технічних наук,
професор Сахаров О.С.
доктор технічних наук,
ст.н.с. Перельмутер А.В.

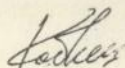
Провідна установа Інститут проблем міцності
Академії наук України, м.Київ.

Захист дисертації відбудеться " 7 " травня 1993 р.
о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д068.05.02
Київського інженерно-будівельного інституту за адресою: 252037,
м.Київ, Повітрофлотський проспект, 31.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського
інженерно-будівельного інституту.

Автореферат розісланий " 6 " квітня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник



Кобієв В.Г.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00814535 (Q)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Розвиток промислового і цивільного будівництва, розробка нових конструкцій висувають більш високі вимоги до методів розрахунку споруд і конструкцій. Широке використання обчислювальної техніки у проектуванні і розрахунках будівельних конструкцій обумовлює подальший розвиток чисельних методів.

Один з найбільш універсальних методів розрахунку складних сучасних конструкцій - це метод кінцевих елементів (МКЕ). Він є теоретичною основою сучасних обчислювальних комплексів розрахунку будівельних конструкцій на ЕОМ. Розробка та дослідження нових ефективних схем МКЕ для нелінійних та динамічних задач є важливою науковою проблемою як в теоретичному, так і в прикладному відношенні.

Дисертація присвячена розвитку теоретичного апарату, що обґрунтовує використання неконформних кінцевих елементів при розв'язанні нелінійних та динамічних задач будівельної механіки, а також його реалізації при розробці та дослідженні алгоритмів розрахунку.

Актуальність теми обумовлена простотою реалізації неконформних елементів і, в той же час, відсутністю їх теоретичного обґрунтування.

Тема дисертації відповідає плану науково-технічних робіт відділення систем автоматизованного проектування НДІАСБ.

Метою дисертації є розвиток теорії неконформних кінцевих елементів для розв'язання нелінійних та динамічних задач будівельної механіки і впровадження розроблених методів в інженерну практику.

Наукова новизна полягає в постановці й розв'язанні таких задач:

- обґрунтувати використання неконформних елементів при розв'язанні статичних задач нелінійної теорії пружності та геометрично нелінійних задач в докритичній стадії;
- встановити можливість застосування неконформних елементів у лінійних динамічних задачах;
- обґрунтувати використання неконформних елементів у задачах теорії повзучості;
- довести можливість застосування неконформних елементів в динамічній задачі пружно-в'язко-пластичності;
- обґрунтувати використання неконформних елементів при розв'язанні динамічної задачі в геометрично нелінійній постановці;
- розробити для нестационарних задач безумовно стійкі різницеві схеми дискретизації у часі, одержати оцінки їх похибки у сполученні з неконформним МКЕ.

Достовірність одержаних результатів підтверджується їх теоретичним обґрунтуванням, а також розрахунками модельних задач, що мають точний розв'язок.

Практичне значення роботи полягає в розробці та впровадженні ефективних алгоритмів розв'язання нелінійних та динамічних задач.

Впровадження результатів роботи. Запропоновані алгоритми реалізовані в розроблених НДІАСБ обчислювальних комплексах та застосовуються у розрахунках будівельних конструкцій.

Апробація. Основні результати дисертації доповідалися на IV-IX школах-семінарах "Метод кінцевих елементів у будівельній

механіці", семінарах з механіки у Ленінградському політехнічному інституті, Інституті механіки АН України (м.Київ), Київському інженерно-будівельному інституті.

Публікації. З теми дисертації опубліковано 18 наукових праць.

На захист винесено:

- умови збіжності та оцінки похибки неконформних елементів у фізично та геометрично челінійних статичних задачах;

- дослідження та теоретичне обґрунтування застосування неконформного МКЕ у лінійних динамічних задачах;

- алгоритми розв'язання задач нелінійної повзучості і пружно-в'язко-пластичності з використанням неконформних кінцевих елементів;

- алгоритми розв'язання геометрично нелінійних динамічних задач з використанням неконформного МКЕ;

- доведення можливості статичного та динамічного розрахунку оболонок плоскими кінцевими елементами;

- методи побудови матриць жорсткості та векторів правих частин для геометрично нелінійної задачі у статичному та динамічному випадках;

- розробка, теоретичне та чисельне дослідження безумовно стійких скінченнорізницевих схем дискретизації у часі для нестационарних задач;

- застосування теоретично обґрунтованих схем МКЕ у чисельних дослідженнях будівельних конструкцій.

Дисертація, загальним обсягом 214 стор., містить 10 таблиць та 46 рисунків, складається з вступу, 6 глав, висновків, додат-

ків та списку літератури з 141 назви.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дано огляд стану досліджуваних проблем, сформульовані мета і задачі роботи.

Швидкий розвиток та широке застосування МКЕ обумовлені великим інтересом до нього інженерів-практиків, використовуючих цей метод, програмістів, реалізуючих МКЕ на ЭОМ, та математиків, що займаються його теоретичним обґрунтуванням.

До найбільш значних праць з реалізації МКЕ належать праці А.Ф.Смірнова, А.В.Александрова, Б.Я.Лашеннікова, М.М.Шапошнікова, В.А.Постнова, О.С.Городецького, Дж.Аргіріса, О.Зенкевича, І.Альтенбаха, У.Фішера, О.С.Сахарова, В.М.Кислоого, Д.Сегерлінда.

Основні теоретичні положення МКЕ для лінійних стаціонарних задач розроблено у статтях Р.Куранта, Л.О.Розіна, Т.Пайана, П.Тонга та інших; де встановлено, що конформний МКЕ є окремим випадком метода Рітца при спеціальному виборі базису. Теорія методу Рітца, викладена, наприклад, у монографії С.Г.Міхліна, дає достатні умови збіжності МКЕ для лінійних стаціонарних задач. Це є лінійна незалежність, конформність та повнота в енергетичному просторі системи базисних функцій.

Математичному обґрунтуванню МКЕ для лінійних стаціонарних задач присвячено численну літературу. До найбільш значних належать статті та монографії С.Г.Міхліна, Ж.-П.Обена, Г.Стренга, Дж.Фікса, Ж.Деклу, Дж.Сеа, Е.Мітчелла, Р.Уейта, С.Г.Дьяконова, Ф.С'ярле, П.Рав'яра, Дж.Одена, Т.Редді, Г.І.Марчука, В.І.Агошкова, Л.А.Оганесяна, Л.А.Руховця, в яких встановлені умови збіжності та оцінки похибки конформного МКЕ. Дослідженням неконформного МКЕ у ліній-

них стаціонарних задачах присвячені праці Г.Стрєнга, Дж.Нітше, Т.Мійоші, Б. де Вебеке, П.Ласко, П.Лесена, Р.Темама, Д.Арнольда, І.Бабушкі, Ф.Бреззі, В.С.Карпіловського, а також автора.

Значно менш досліджено МКЕ в задачах, які не є лінійними статичними. Конформний МКЕ для лінійних стаціонарних задач з монотонними операторами (задачі нелінійної пружності) вивчено у працях Х.Гаєвського, К.Грегера, К.Захаріаса, Р.Варги, Ф.С'ярле. Питання теорії та реалізації МКЕ в лінійних нестаціонарних задачах (лінійна динаміка) вивчаються у працях Г.І.Марчука, В.І.Агошкова, Е.Мітчелла, Р.Уейта, А.Н.Синиціна, О.Л.Ладженської, Р.Клафа, М.М.Шапошнікова, А.В.Александрова та інших, де досліджується конформний випадок.

Таким чином, питання теоретичного обґрунтування та реалізації неконформного МКЕ в нелінійних та динамічних задачах до цього часу залишалися відкритими. Їх розв'язанню присвячена ця праця.

Дослідження МКЕ приводять також і до такого кола питань. Застосування МКЕ до нелінійних та нестаціонарних задач зводить їх до систем нелінійних алгебраїчних рівнянь у нелінійному стаціонарному випадку або до систем звичайних диференційних рівнянь (лінійних чи нелінійних) у нестаціонарному випадку.

Методи розв'язання систем нелінійних рівнянь та лінійних систем диференційних рівнянь вивчено досить повно. Досить указати статті та монографії Л.В.Канторовича, Дж.Ортеги, В.Рейнболдта, Д.Ф.Давиденко, М.О.Красносільського з нелінійних рівнянь та праці О.А.Самарського, С.К.Годунова, В.С.Рябенського з різницевих схем для лінійних нестаціонарних задач.

Менш повно досліджено питання стійкості та збіжності різни-

цезих схем для нелінійних нестационарних задач. У монографії Р.Темама вивчені схеми для нелінійних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса, що описують рух в'язкої рідини. У працях М.М.Яненко, Б.Л.Рождественського, О.А.Самарського пропонуються різницеві схеми для задач газової динаміки. У монографії А.Ф.Смірнова, А.В.Александрова, Б.Я.Лашеннікова, М.М.Шапошнікова запропоновані різницеві схеми для ряду нелінійних динамічних задач.

Тому у дисертації досліджені різницеві схеми у сполученні з неконформним МКЕ для лінійних нестационарних задач, запропоновані та досліджені різницеві схеми дискретизації у часі для нелінійних (як фізично, так і геометрично) нестационарних задач.

У першій главі наведено основні результати з обґрунтування збіжності МКЕ для лінійних задач у конформному та неконформному випадках. Наведено варіаційні формулювання лінійних задач теорії пружності у вигляді

$$a(u, v) = (f, v), \quad u, v \in V, \quad (1)$$

де $a(u, v), (f, v)$ - можливі роботи внутрішніх і зовнішніх сил, $a(u, v) = (B\varepsilon(u), \varepsilon(v))$, B - матриця пружності, $\varepsilon(u)$ - деформації, u - вектор шуканих переміщень, v - вектор можливих переміщень. Множина можливих переміщень V складається з усіх векторів v , що задовольняють головні (кінематичні) граничні умови, для яких енергетична норма $\|u\| = \sqrt{a(u, u)}$ - величина скінченна. Наведені формули $a(u, v)$ та (f, v) й опис множини можливих переміщень для тривимірної задачі, оболонки, пластини та стержня.

Рівняння методу кінцевих елементів випливають з (1) і мають

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad u_h, v_h \in V_h,$$

де V_h - множина можливих переміщень вигляду $u_h = \sum_k u_k \mu_k$, що задо-

вольняють у граничних вузлах головні граничні умови, μ_k - координатні функції, які відповідають призначеним степеням свободи L_k та відрізняються від нуля лише на зірках елементів.

Умови збіжності МКЕ для лінійних задач такі:

1. Мають місце рівності $L_k \mu_k = \delta_{k,1}$.

2. На кожному кінцевому елементі справджуються тотожності

$$\sum_k (L_k x^i) \mu_k = x^i, \quad |i| \leq l = m_0 + \tau - 1, \quad 0 < \tau \leq m_0.$$

3. Базисні функції μ_k конформні, тобто $\mu_k \in V$; якщо функції μ_k неконформні, $\mu_k \notin V$, то існує конформний базис $\lambda_k \in V$, що задовольняє 1., 2. при $l = m_0 + \tau_1 - 1$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau$ та рівності

$$a_r(x^i, \mu_k - \lambda_k) = 0, \quad |i| \leq m_0 + \tau_2 - 1, \quad 0 < \tau_2 \leq m_0,$$

де $a_r(u, v)$ - можлива робота внутрішніх сил на кінцевому елементі Ω_r .

Якщо виконуються ці умови, мають місце оцінки похибки МКЕ з енергії та переміщень

$$\|u - u_h\| \leq Kh_0^s, \quad \|u - u_h\|_0 \leq Kh_0^p,$$

$$s = \begin{cases} \tau, & \mu_k \in V \\ \tau, & \mu_k \notin V \end{cases} \quad p = \begin{cases} 2\tau, & \mu_k \in V \\ \tau_1 + \tau_2, & \mu_k \notin V \end{cases}, \quad (2)$$

для функції $P_h u = \sum_k (L_k u) \mu_k \in V_h$ має місце нерівність

$$\|u - P_h u\| \leq Kh_0^\tau.$$

З (2) одержані оцінки похибки ряду конформних та неконформних елементів, що широко застосовуються.

Встановлено аналогічні (2) оцінки похибки у випадках, коли вирази для можливих робіт замінюються наближеними $a_h(u_h, v_h)$,

$(f, v_h)_h$, які задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} |a(u_h, v_h) - a_h(u_h, v_h)| &\leq Kh_0 \|u_h\| \|v_h\|, \\ |(f, v_h) - (f, v_h)_h| &\leq Kh_0 \|v_h\|, \end{aligned} \quad (3)$$

що дозволяє обґрунтувати можливість розрахунку криволінійних стержнів та оболонок прямолінійними та плоскими елементами.

Одержано оцінки похибки конформного та неконформного МКЕ у задачах на власні значення (обчислення критичних сид, власних частот)

$$|\lambda_{1,h} - \lambda_{1,h}^*| + \|u_{1,h} - u_{1,h}^*\| \leq Kh_0^3,$$

де $\lambda_{1,h}, \lambda_{1,h}^*$ точні та одержані МКЕ власні значення, $u_{1,h}, u_{1,h}^*$ - власні функції, що їм відповідають.

У другій главі досліджено застосування МКЕ для фізично та геометрично нелінійних статичних задач. У фізично нелінійному випадку використовуються співвідношення нелінійної теорії пружності. В геометрично нелінійному випадку для пластин та оболонок

$$c_{1,j}(u) = c_{1,j}^0(u) + 1/2 D_{1,j}(u, u),$$

$$D_{1,j}(u, v) = 1/2(\alpha_1(u)\alpha_j(v) + \alpha_j(u)\alpha_1(v)),$$

$$c_{1,j}^0(u) = 1/2(\partial u_1/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_1) + K_{1,j}u_3,$$

$$\alpha_1(u) = \partial u_3/\partial x_1 - K_{1,1}u_1, \quad \chi_{1,j} = -1/2(\partial \alpha_1/\partial x_j + \partial \alpha_j/\partial x_1).$$

Можлива робота внутрішніх сил має вигляд

$$a(u, v) = (B_0(c^0(u) + 1/2 D(u, u)), c(v) + D(u, v)) + (B_1\chi(u), \chi(v)).$$

$$B_0 = \delta B, \quad B_1 = \delta^3/12 B, \quad \delta - \text{товщина оболонки.}$$

Можлива робота зовнішніх сил, варіаційне формулювання задачі та рівняння МКЕ мають такий самий вигляд, як і у лінійному випадку.

Статична геометрично нелінійна задача розв'язується в докритичній стадії. Це означає, що друга варіація потенціальної енергії

$$a'(u, v, w) = (B_0 c^0(v), c^0(w)) + (B_1 \chi(v), \chi(w)) + (B_0 c^0(v) D(u, w)) + (B_0 D(u, v), c^0(w)) + (B_0 D(u, v), D(u, w)) + (B_0 c(u), D(v, w)) \quad (4)$$

додатно визначена, тобто має місце нерівність

$$a'(u, v, w) \geq K \|v\|^2 \quad (5)$$

Рівняння методу кроків у сполученні з МКЕ для статичних нелінійних задач мають вигляд

$$a'(u_{h,m}, u_{h,m+1} - u_{h,m}, v_h) = (f, v_h) (\theta_{m+1} - \theta_m), \quad (6)$$

$$m=0, 1, \dots, M-1, \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_M = 1, \quad u_{h,0} = 0.$$

При застосуванні МКЕ в геометрично нелінійних задачах можлива різна апроксимація переміщення u_3 (апроксимація частинами). Базисні функції прямокутного та трикутного елементів мають вигляд

$$\mu_{61-5} = (\tau_1, 0, 0), \quad \mu_{61-4} = (0, \tau_1, 0), \quad \mu_{61-3} = (0, 0, \mu_1),$$

$$\mu_{61-2} = (0, 0, \mu_{1,1}), \quad \mu_{61-1} = (0, 0, \mu_{1,2}),$$

де τ_1 - базисні функції плоскої задачі, $\mu_1, \mu_{1,1}, \mu_{1,2}$ - згинні базисні функції, що задовольняють умови збіжності МКЕ 1-3 при $s=1$, $0 \leq i \leq p_0$, p_0 - кількість вузлів елементу.

Позначимо $P\mu_{61-5} = \mu_{61-5}$, $P\mu_{61-4} = \mu_{61-4}$, $P\mu_{61-3} = (0, 0, \tau_1)$,

$$P\mu_{61-2} = P\mu_{61-1} = 0, \quad P u_h = \sum_k u_k P\mu_k,$$

$$D_{i,j,h}(u_h, v_h) = D_{i,j}(P u_h, P v_h), \quad (f, v_h)_h = (f, P v_h). \quad (7)$$

Підставляючи залежності (7) у (4), (6), одержуємо вираз для $a'_h(u_h, v_h, w_h)$ та рівняння методу кроків у сполученні з різною апроксимацією МКЕ та заміною криволінійних елементів плоскими.

Для $a'_h(u_h, v_h, w_h)$, (f, v_h) мають місце аналогічні (3) нерівності.

При виконанні (5) справедлива оцінка методу кроків у сполученні з різною апроксимацією МКЕ для статичних нелінійних задач

$$\|u - u_{h,n}\| \leq K(h_0 + \theta), \quad \theta = \min_m (\theta_{m+1} - \theta_m).$$

В останньому розділі глави одержано формули матриць жорсткості стержньового та трикутного елементів для геометрично нелінійних задач у фізично лінійному та нелінійному випадках.

У третій главі досліджено застосування МКЕ в лінійних динамічних задачах. Позначивши можливу роботу інерційних сил $b(u, v)$,

записуємо зазначену задачу у вигляді

$$b(u'', v) + a(u, v) = (f, v), \quad u, v \in V \quad (8)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (9)$$

Вирази для можливих робіт внутрішніх і зовнішніх сил та простір можливих переміщень V мають такий самий вигляд, як і в статичному випадку.

Рівняння методу кінцевих елементів одержуємо з (8), (9):

$$b(u_h'', v_h) + a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad u_h, v_h \in V \quad (10)$$

$$u_h(0) = P_h u^0, \quad u_h'(0) = P_h u^1, \quad (11)$$

де V_h - множина можливих переміщень вигляду $u_h = \sum_k u_k(t) \mu_k$.

Якщо виконуються умови збіжності 1-3, справджується оцінка похибки МКЕ для динамічної задачі

$$|u' - u_h'| + \|u - u_h\| \leq Kh_0, \quad |u| = \sqrt{b(u, u)}. \quad (12)$$

Ця оцінка зберігається при застосуванні наближених виразів

$a_h(u_h, v_h)$, $(f, v_h)_h$, $b_h(u_h, v_h) = b(P_h u_h, P_h v_h)$, що задовольняють нерівності вигляду (3).

Систему звичайних диференціальних рівнянь (10), (11) пропонується розв'язувати скінченнорізницевим методом. Позначимо

$$t_m = \theta m, \quad \theta - \text{крок у часі, } u_m = u(t_m), \quad \delta_m u = \theta^{-1}(u_{m+1} - u_m),$$

$$\alpha_m u = 1/2(u_{m+1} + u_{m-1}), \quad \beta_m u = (2\theta)^{-1}(u_{m+1} - u_{m-1}),$$

$$\gamma_m u = \theta^{-2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}).$$

Різницєва схема другого порядку має вигляд

$$b(\gamma_m u_h, v_h) + a(\alpha_m u_h, v_h) = (f_m, v_h) \quad (13)$$

$$u_{h,0} = P_h u^0, \quad u_{h-1} = u_{h,0} - \theta P_h u^1. \quad (14)$$

Для неї доведено існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості

$$|\beta_m u_h| + \|u_{h,m}\| \leq K \quad (15)$$

та оцінка похибки у сполученні з МКЕ

$$|u'_m - \beta_m u_h| + \|u_m - u_{h,m}\| \leq K(h_0 + \theta^2). \quad (16)$$

Рівняння (13) записується у вигляді системи відносно $\alpha_m u_h$

$$(2\theta^{-2}b+a)(\alpha_m u_h, v_h) = (f_m, v_h) + 2\theta^{-2}b(u_{h,m}, v_h). \quad (17)$$

У випадку врахування в'язкості рівняння динамічної задачі мають вигляд

$$b(u'', v) + a(u, v) + a_1(u', v) = (f, v), \quad u, v \in V$$

при початкових умовах (9), де $a_1(u', v)$ - можлива робота сил тертя.

Різницева схема другого порядку у сполученні з МКЕ має вигляд

$$b(\gamma_m u_h, v_h) + a(\alpha_m u_h, v_h) + a_1(\beta_m u_h, v_h) = (f_m, v_h) \quad (18)$$

при початкових умовах (14). Для неї має місце існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості (15) і оцінка похибки (16). Рівняння (18) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} (2\theta^{-2}b + \theta^{-1}a_1 + a)(\alpha_m u_h, v_h) = \\ = (f_m, v_h) + 2\theta^{-2}b(u_{h,m}, v_h) - \theta^{-1}a_1(u_{h,m-1}, v_h). \end{aligned} \quad (19)$$

Для матеріалу з тривалою пам'яттю залежність між напруженнями і деформаціями має вигляд

$$\sigma(t) = B\varepsilon(t) + \int_0^t B_2(t, s)\varepsilon(s)ds.$$

Позначивши $\sigma_2(t, s, u, v) = (B_2(t, s)\varepsilon(u), \varepsilon(v))$, записуємо динамічну задачу

$$b(u'', v) + a(u, v) + \int_0^t a_2(t, s, u(s), v)ds = (f, v), \quad u, v \in V$$

при початкових умовах (9). Різницеву схему другого порядку записуємо як систему відносно $\alpha_m u_h$

$$\begin{aligned} (2\theta^{-2}b+a)(\alpha_m u_h, v_h) = (f_m, v_h) + 2\theta^{-2}b(u_{h,m}, v_h) - \\ - \theta/2 \sum_{k=0}^{m-1} [a_2(t_m, t_k, u_{k,h}, v_h) + a_2(t_m, t_{k+1}, u_{k+1,h}, v_h)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Для неї зберігається існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості (15) і оцінка похибки (16).

Рівняння (17), (19), (20) можуть розв'язуватися розкладом за власними функціями (формами коливань) φ_1 задачі (10) $u_h = \sum c_1(t) \varphi_1$. В цьому випадку одержуємо системи рівнянь відносно $\alpha_{m c_1}$, з (17) - систему, що розпадається, з (19) і (20) - системи, що не розпадаються.

В останньому розділі глави наведено формули матриць мас стержньового, прямокутного і трикутного елементів.

У четвертій главі досліджується застосування МКЕ у фізично нелінійних нестационарних задачах. Для задачі нелінійної повзучості залежність між напруженнями і деформаціями має вигляд

$$\epsilon(t) = p_0(t, \sigma(t)) - \int_0^t [L(t, s) p_1(s, \sigma(s)) + p_2(s, \sigma(s))] ds - q(t), \quad (21)$$

де $L(t, s)$ - ядро повзучості, $q(t)$ - деформації усадки, функції $p_1(t, \sigma)$ враховують нелінійну роботу матеріалу, причому

$$(p_0(t, \sigma_1) - p_0(t, \sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2) \geq K \|\sigma_1 - \sigma_2\|^2,$$

де $(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{i,j} \tau_{i,j} d\Omega$, $\|\sigma\|^2 = (\sigma, \sigma)$.

Нелінійність залежності (21) не дозволяє виразити в явному вигляді $\sigma(t)$ через $\epsilon(t)$. Тому, позначивши

$$G(t, \sigma) = \partial p_0(t, \sigma) / \partial \sigma, \quad l(t, s, \sigma) = L(t, s) p_1(s, \sigma) + p_2(s, \sigma), \quad c(t, s, \sigma) = -\partial l(t, s, \sigma) / \partial t, \quad g(t, \sigma) = \partial p_0(t, \sigma) / \partial t - l(t, t, \sigma),$$

формулюємо задачу у вигляді системи відносно $u \in V, \sigma$:

$$\begin{cases} (\sigma', Dv) = (f', v) \\ G(t, \sigma) \sigma' + g(t, \sigma) - \int_0^t c(t, s, \sigma) ds - \epsilon(u') = q'. \end{cases} \quad (22)$$

Доведено існування єдиного розв'язку задачі (22).

Різницєва схема другого порядку у сполученні з МКЕ має вигляд

$$\begin{aligned} (\beta_m \sigma_h, Dv_h) &= (\beta_m f, v_h) \\ G(t_m, \sigma_{h,m}) \beta_m \sigma_h + g(t_m, \sigma_m) - \theta/2 \sum_{k=0}^{m-1} [c(t_m, t_k, \sigma_{h,k}) + c(t_m, t_{k+1}, \sigma_{h,k+1})] - \\ - D\beta_m u_h &= q'_{h,m}, \quad (q' - q'_h, Dv) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для неї доведено існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості

$$\|\sigma_{h,m}\| + \|u_{h,m}\| \leq K$$

та оцінка похибки

$$\|\sigma_m - \sigma_{h,m}\| + \|u_m - u_{h,m}\| \leq K(h_0 + \theta^2).$$

Для динамічної задачі пружно-в'язко-пластичності використовується залежність

$$\epsilon' = \beta^{-1} \sigma' + g(\sigma), \quad (24)$$

де нелінійна функція $g(\sigma)$ залежить від прийнятої умови пружності та задовольняє нерівність

$$(g(\sigma_1) - g(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2) \geq 0.$$

Нелінійність $g(\sigma)$ не дозволяє виразити у явному вигляді σ через ϵ , тому задача формулюється у вигляді системи відносно $u \in V, \sigma$

$$\begin{cases} b(u'', v) + (\sigma, Dv) = (f, v) \\ B^{-1} \sigma' + g(\sigma) - Du' = 0 \end{cases}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \sigma(0) = \sigma^0.$$

Різницьова схема другого порядку у сполученні з МКЕ має вигляд

$$\begin{aligned} b(\gamma_m u_h, v_h) + (\alpha_m \sigma_h, Dv_h) &= (f_m, v_h) \\ B^{-1} \beta_m \sigma_h + g(\sigma_m) - D\beta_m u_h &= 0 \\ u_{h,0} &= P_h u^0, \quad u_{h,-1} = u_{h,0} - \theta P_h u^1, \quad \sigma_{h,0} = P_h \sigma^0, \\ \sigma_{h,-1} &= \sigma_{h,0} - \theta P_h B(Du^1 - g(\sigma^0)). \end{aligned} \quad (25)$$

Для неї доведено існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості

$$|\beta_m u_h| + \|u_{h,m}\| + \|\sigma_{h,m}\| \leq K$$

і оцінка похибки

$$|u_m - \beta_m u_h| + \|u_m - u_{h,m}\| + \|\sigma_m - \sigma_{h,m}\| \leq K(h_0 + \theta^2).$$

При розв'язанні системи (25) знаходимо з другого рівняння $\alpha_m \sigma_h$ і підставляємо у перше. Одержуємо систему відносно $\alpha_m u_h$

$$(2\theta^{-2}b+a)(\alpha_m u_h, v) = (f_m, v_h) + 2\theta^{-2}b(u_{h,m}, v_h) - (\sigma_{h,m-1} + B D u_{h,m-1} + \theta B g(\sigma_{h,m}), D v_h). \quad (26)$$

Матриця системи (26) не залежить від m , змінюються тільки праві частини. Рівняння (26) можуть розв'язуватися розкладом за формами коливань відповідної лінійно-пружної задачі. При цьому одержуємо систему рівнянь, що розпадається, праві частини якої обчислюються за результатами попереднього кроку.

В п'ятій главі досліджено застосування МКЕ у геометрично нелінійних динамічних задачах. У фізичному лінійному випадку для пластин і оболонок виходимо з варіаційного рівняння

$$b(u'', v) + (B_0(\epsilon^0(u) + 1/2 D(u, u)), \epsilon(v) + D(u, v)) + (B_1 \chi(u), \chi(v)) = (f, v).$$

Позначивши $N = B_0(\epsilon^0(u) + 1/2 D(u, u))$, диференціюємо цю рівність по t і одержуємо видозмінену постановку задачі

$$b(u'', v) + (N, \epsilon^0(v) + D(u, v)) + (B_1 \chi(u), \chi(v)) = (f, v), \quad u, v \in V, \\ B_0^{-1} N' - \epsilon^0(u') - D(u, u') = 0, \quad (27) \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad N(0) = N^0 = B_0(\epsilon^0(u^0) + 1/2 D(u^0, u^0)).$$

Для задачі (27) доведена нерівність

$$\|u'\| + \|u\| + \|u''\| + \|u'\| + \|N\| + \|N'\| \leq K,$$

з якої випливає існування розв'язку. Доведено, що розв'язок задачі (27) єдиний.

Далі використовується МКЕ з різною апроксимацією (7) переміщення u_3 і заміною криволінійних елементів оболонки плоскими.

Схема другого порядку у часі в сполученні з МКЕ має вигляд

$$b_h(\gamma_m u_h, v_h) + (\alpha_m N, \epsilon^0(v_h) + D_h(u_{h,m}, v_h)) + B_1 \chi(\alpha_m u_h), \chi(v_h) = (f_m, v_h)_h, \\ B_0^{-1} \beta_m N_h - \epsilon^0(\beta_m u_h) - D_h(u_{h,m}, \beta_m u_h) = 0,$$

$$u_{h,0} = P_h u^0, \quad u_{h,-1} = u_{h,0} - \theta P_h u^1, \quad N_{h,0} = P_h N^0, \quad (28)$$

$$N_{h,-1} = N_{h,0} - \theta P_h B(\epsilon^0(u^1) + D(u^0, u^1)).$$

Для схеми (28) доведено існування єдиного розв'язку, нерівність стійкості

$$|\beta_m u_h| + \|u_{h,m}\| + \|N_{h,m}\| \leq K \quad (29)$$

та оцінка похибки

$$|u'_m - \beta_m u_h| + \|u_m - u_{h,m}\| + \|N_m - N_{h,m}\| \leq K(h_0 + \theta^2). \quad (30)$$

При розв'язанні системи (28) знаходимо з другого рівняння

$$\alpha_m N_h \text{ та підставляємо у перше. Одержуємо систему відносно } \alpha_m u_h$$

$$2\theta^{-2} b_h(\alpha_m u_h, v_h) + (B_0(\epsilon^0(\alpha_m u_h) + D_h(u_{h,m}, \alpha_m u_h)), \epsilon^0(v_h) + D_h(u_{h,m}, v_h)) +$$

$$+ (B_1 \chi(\alpha_m u_h), \chi(v_h)) = (f_m, v_h) + 2\theta^{-2} b_h(u_{h,m}, v_h) + \quad (31)$$

$$+ (B_0(\epsilon^0(u_{h,m-1}) + D_h(u_{h,m}, u_{h,m-1})) - N_{h,m-1}, \epsilon^0(v_h) + D_h(u_{h,m}, v_h)).$$

Система (31) відрізняється від аналогічних рівнянь у статичному випадку, крім присутності інерційних додатків, тим, що додатки, в які входять сили N , перенесені в праву частину. Це і забезпечує стійкість схеми у динамічному випадку. Доведення нерівності стійкості (29) та оцінки похибки (30) істотно використовує існування інерційного додатку $b(u, v)$. В статичному випадку, тобто при $b(u, v) = 0$, нерівності (29), (30) не виконані, та при значеннях стискаючих сил більших критичних схема (28) або (31) стає обчислювально нестійкою.

Застосування до рівняння (31) розкладу за формами коливань відповідної лінійної задачі приводить до системи рівнянь, що не розпадається, ліві та праві частини якої обчислюються за результатами попереднього кроку.

Аналогічні дослідження проведено також при одночасному врахуванні у динамічній задачі геометричної і фізичної нелінійності.

Задача формулюється у вигляді системи відносно $u \in V, \sigma$

$$b(u'', v) + (\sigma, \varepsilon^0(v) + D(u, v) - x_3 \chi(v)) = (f, v),$$

$$B^{-1} \sigma' + g(\sigma) - \varepsilon^0(u') - D(u, u') + x_3 \chi(u') = 0,$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \sigma(0) = \sigma^0,$$

де $x_3 \in [-\delta/2, \delta/2]$, δ - товщина оболонки.

Доведено існування єдиного розв'язку цієї задачі.

Схема другого порядку у сполученні з МКЕ має вигляд

$$\begin{aligned} b_h(\gamma_m u_h, v_h) + (\alpha_m \sigma_h, \varepsilon^0(v_h) + D_h(u_{h,m}, v_h) - x_3 \chi(v_h)) &= (f, v_h)_h, \\ B^{-1} \beta_m \sigma_h + g(\sigma_{h,m}) - \varepsilon^0(\beta_m u_h) - D_h(u_{h,m}, \beta_m u_h) + x_3 \chi(\beta_m u_h) &= 0, \\ u_{h,0} = P_h u^0, \quad u_{h,-1} = u_{h,0} - \theta P_h u^1, \quad \sigma_{h,0} = \sigma_h(0), \quad \sigma_{h,-1} = \sigma_{h,0} - \theta \sigma_h'(0). \end{aligned} \quad (32)$$

Для неї доведено існування єдиного розв'язку, нерівність стікості (29) та оцінка похибки (30). При розв'язанні системи (32) виражаємо з другого рівняння $\alpha_m \sigma_h$ та підставляємо у перше. Одержуємо аналогічну (32) систему відносно $\alpha_m u_h$.

Шоста глава присвячена чисельним дослідженням розроблених алгоритмів. Запропоновані методи розв'язання нелінійних і динамічних задач реалізовано у розроблених НДІАСБ обчислювальних комплексах ЛИРА, МИРАЖ, НЕУД, ФЕНИКС, призначених для статичного і динамічного розрахунку конструкцій. Наведено результати розрахунку модельних задач, що мають точний розв'язок. Розрахунки проводились зі згущенням сітки в два та в чотири рази.

Мета цих чисельних експериментів - підтвердження одержаних у попередніх главах теоретичних результатів для оцінок похибки неконформного МКЕ при розв'язанні нелінійних і динамічних задач.

Циліндрична вільно оперта у торцях оболонка під рівномірним тиском розраховувалась з застосуванням плоских прямокутних і трикутних елементів. На рис. 6.1 наведено графіки змінення відносних

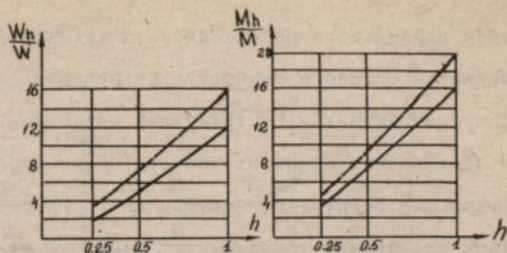
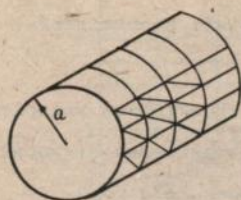


Рис. 6.1.

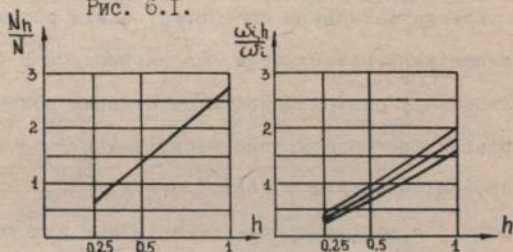
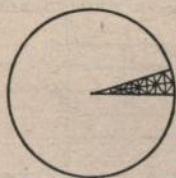


Рис. 6.2.

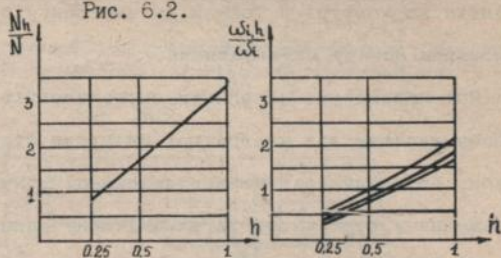
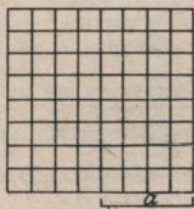


Рис. 6.3.

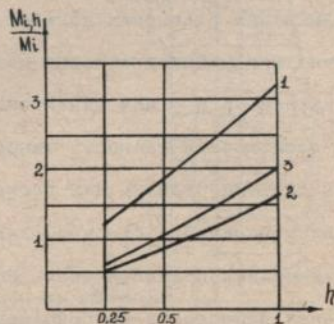
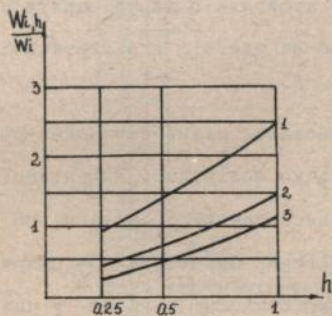


Рис. 6.4.

похибок нормального переміщення та згинаючого моменту в точках серединного осьового перерізу. Безперервні лінії відповідають прямокутним, штрихові - трикутним елементам.

Обчислювались власні частоти круглої затиснутої та квадратної шарнірно опертої по контуру плит. Графіки змінення відносних похибок для перших трьох частот наведено на рис. 6.2, 6.3. .

Кругла затиснута по контуру плита розраховувалась на три типи динамічних навантажень, що змінюються у часі за синусоїдою:

- 1) імпульс у центрі плити в початковий момент;
- 2) рівномірно розподілене навантаження;
- 3) зосереджена сила у центрі плити.

На рис. 6.4 наведено графіки змінення відносних похибок згинаючих моментів на контурі в точках їх екстремумів. Номер на графіку відповідає номеру навантаження.

При проведенні чисельних експериментів у геометрично нелінійному випадку для квадратної пластини був заданий точний розв'язок, по якому визначались деформації, зусилля і зовнішні навантаження у статичному та динамічному випадках. Такі ж побудови проводились для задач повзучості та пружно-в'язко-пластичності. Графіки змінення відносних похибок по зусиллям в центрі плити у геометрично нелінійному випадку подано на рис.6.5 для статичної задачі, на рис. 6.6 - для динамічної.

Для дослідження точності запропонованих різницевих схем розглядалась система рівнянь МКЕ геометрично нелінійної динамічної задачі для консольного стержня. Задавався точний розв'язок, по якому визначалися праві частини. Розрахунок проводився по різницеви схем першого та другого порядку точності з кроком у часі

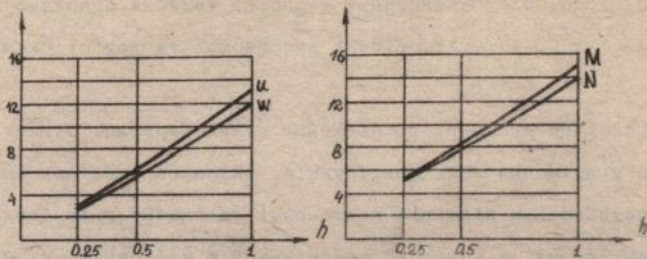


Рис. 6.5.

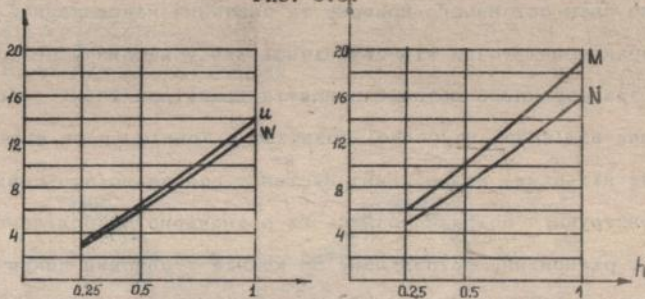


Рис. 6.6.

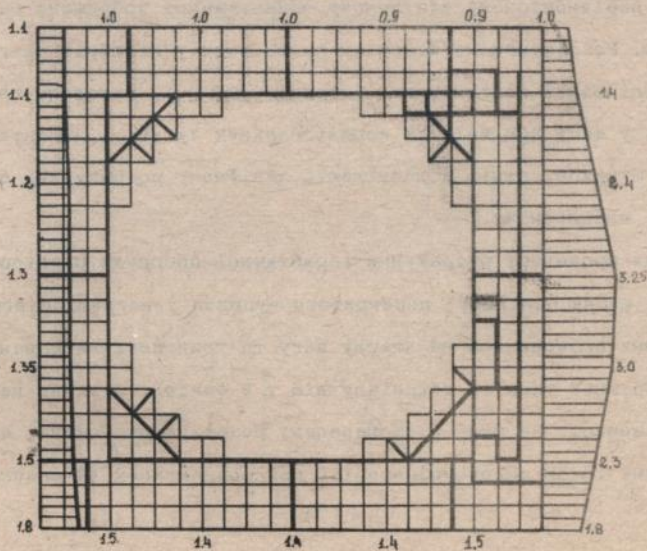


Рис. 6.7.

0.02, 0.01, 0.005. Максимальні відносні похибки одержано 0.8%, 0.4%, 0.2% і 0.4%, 0.1%, 0.025% для першої та другої схем відповідно.

Проведено чисельні дослідження семиповерхової будівлі реакторного відділення АЕС. Конструкція, виконана з бетону класу 30, розраховувалась в лінійній постановці на власну вагу, технологічне навантаження, а також на сейсмічну дію у 8 балів. На рис. 6.7 наведено план останнього поверху та значення максимальних перемішень характерних точок від сейсмічної дії у напрямку осі X.

Розраховувалось шатрове покриття діаметром 200м - оболонка обертання від'ємної гауссової кривизни з зовнішнім та внутрішнім опорними кільцями, підкріплена системою радіально-кільцевих ребер. Конструкція розраховувалась на рівномірно розподілене навантаження, рівномірно розподілене по кожній з половин покриття та на сейсмічну дію у 8 балів. Розрахункову схему та ізолінії прогинів при нерівномірному статичному навантаженні зображено на рис. 6.8. Розрахунок на сейсміку проводився у лінійній та геометрично нелінійній постановках. На рис. 6.9, 6.10 наведено графіки змінення у часі прогинів та меридіональних зусиль в характерних точках. Штрихові лінії відповідають лінійному розрахунку, безперервні - нелінійному.

Були проведені розрахунки герметичної оболонки реактора АЕС. Вона має форму циліндру, перекритого куполом у вигляді півсфери. Розрахунки проводились на власну вагу та технологічне навантаження, внутрішній тиск та сейсмічну дію у 8 балів у фізично нелінійній постановці. На рис. 6.11 наведені розрахункова схема, епюра перемішень точок осьового перерізу при розрахунках на власну ва-

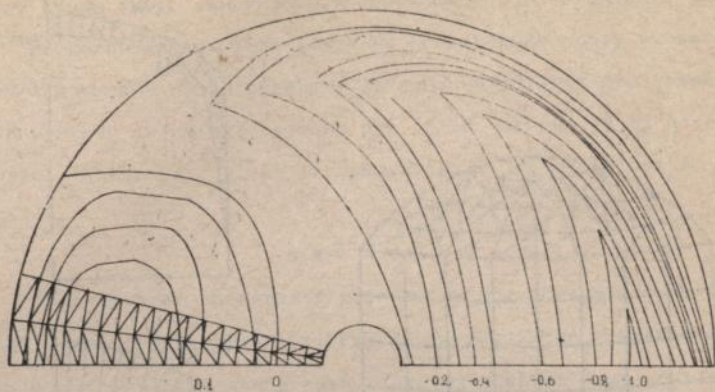


Рис. 6.8.

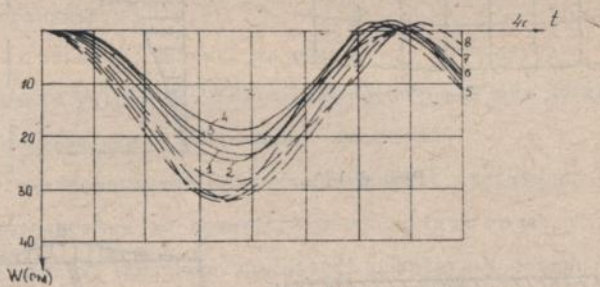


Рис. 6.9.

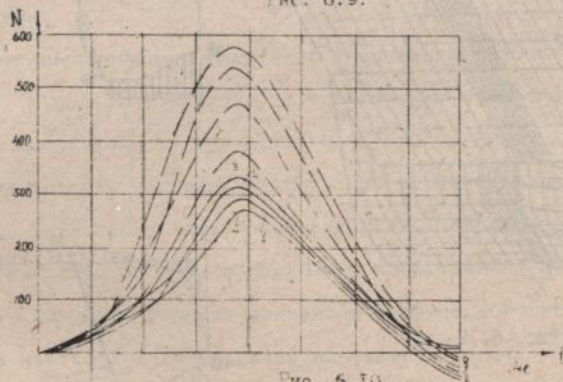


Рис. 6.10.

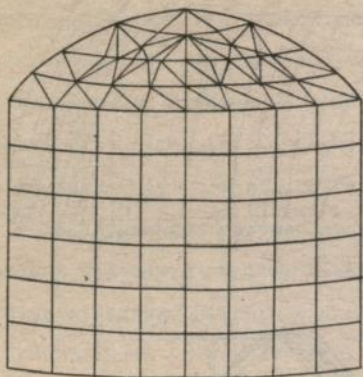


Рис. 6.11

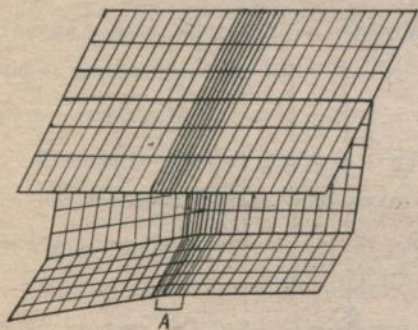
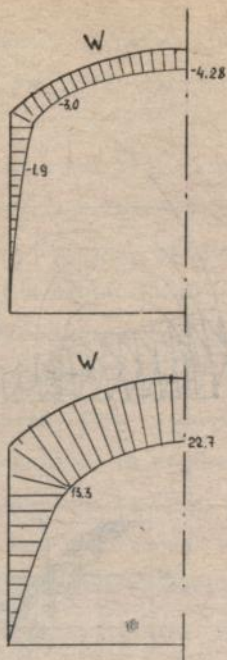
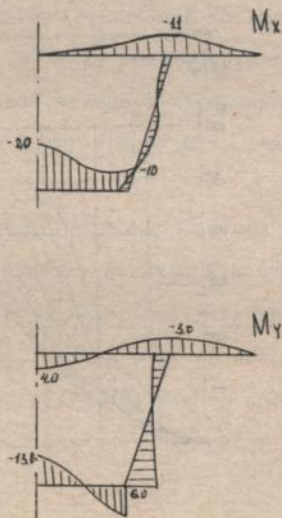


Рис. 6.12



гу, а також еюра максимальних переміщень від сейсмічної дії.

Розраховувалась залізобетонна конструкція мосту на власну вагу і монтажне навантаження у фізично нелінійній постановці. Розрахункову схему наведено на рис. 6.12. На рис. 6.13 наведено ізолінії моментів у місці їх концентрації, на фрагменті А.

В И С Н О В К И

Як результат проведених досліджень розроблено теоретичний апарат, що обґрунтовує застосування неконформних кінцевих елементів при розв'язанні нелінійних і нестационарних задач будівельної механіки, та здійснено впровадження розроблених методів в інженерну практику.

1. Доведено теореми, що дозволяють досліджувати збіжність і одержувати оцінки похибки неконформного МКЕ для нелінійних і нестационарних задач будівельної механіки.

2. Запропоновано метод апроксимації частинами, обґрунтовано його застосування до геометрично нелінійних задач у сполученні з методом кроків. Доведено можливість розрахунку оболонок плоскими елементами.

3. Запропоновано ефективні скінченнорізницеві схеми дискретизації у часі для фізично та геометрично нелінійних динамічних задач. Досліджено їх застосування у сполученні з розкладом за формами власних коливань відповідної лінійної задачі.

4. Установлено безумовну стійкість запропонованих різницевих схем, одержано оцінки їх похибки у сполученні з неконформним МКЕ.

5. Одержано формули елементів матриць жорсткості та векторів прямих частин для геометрично нелінійної задачі у статичному і

динамічному випадках.

6. Різницеві схеми для динамічної геометрично нелінійної задачі дозволяють проводити розрахунок і в закритичній стадії.

7. Проведено розрахунки ряду нелінійних та динамічних задач, що мають точний розв'язок, з послідовним згущенням сітки. Результати чисельних експериментів підтверджують теоретичні висновки про коректність використання неконформних елементів.

8. Неконформні елементи широко застосовуються у статичних та динамічних розрахунках складних конструкцій. В дисертації наведено результати чисельних досліджень будівлі реакторного відділення, герметичної оболонки реактора, шатрового покриття та інших. Ці результати узгоджуються з якісним уявленням про роботу конструкцій і досить близькі до експериментальних даних, що є підтвердженням теоретичних висновків та ефективності розроблених методів.

9. Запропоновані алгоритми реалізовано у розроблених НДІАСБ обчислювальних комплексах ЛИРА, МИРАЖ, НЕУД, ФЕНИКС, які впроваджено більш ніж у п'ятистах підприємствах України та інших країн.

Основний зміст дисертації опублікований у таких працях:

1. Євзеров І.Д. Оценки погрешности несовместных конечных элементов плиты. - Киев, 1979, 9с. - Деп. УкрНИИНТИ, N 1467. 1979.

2. Євзеров І.Д. Построение аппроксимирующих функций МКЭ на неравномерной сетке // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1980. - С. 73-76.

3. Євзеров І.Д. Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций // Вычисления с разреженными матрицами. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. - 1981. -

4.Евзеров І.Д. Оценки погрешности по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов. - Численные методы механики сплошной среды. - 1983, 14, N 5. - с. 24-31.

5.Евзеров І.Д. Оценки погрешности полудискретных несовместных аппроксимаций при решении нестационарных задач. - Киев, 1983, 9с. - Деп. УкрНИИНТИ, N 2395к-Д83.

6.Евзеров І.Д. Неконформные конечные элементы в задаче на собственные значения // Численные методы механики сплошной среды. - 1984, 15, N 5. - С. 84-90.

7.Евзеров І.Д., Здоренко В.С. Сходимость прямолинейных конечных элементов при расчете криволинейных стержней // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник. - 1984. - С. 24-28.

8.Евзеров І.Д., Здоренко В.С. Сходимость плоских конечных элементов тонкой оболочки // Строительная механика и расчет сооружений. - 1984, N 1. С. 35-40.

9.Евзеров І.Д., Городецкий О.С., Карпіловський В.С. Исследование методов решения систем уравнений нелинейной теории упругости. - Киев, 1981, 49 с. - Деп. УкрНИИНТИ, N 2193. 1981.

10.Евзеров І.Д., Городецкий О.С., Здоренко В.С. та інші. Вычислительный комплекс для расчета геометрически нелинейных систем "Феникс-1". - Киев, 1983. - Деп. УкрНИИНТИ, N 83-051. 1983.

11.Евзеров І.Д., Городецкий О.С., Здоренко В.С., Вінницький М.Ю. Исследование работы стержневых конструкций во времени на основе дискретной модели железобетона // Практическая реализация численных методов расчета инженерных конструкций. Материалы VI

тематической конференции. - Ленинград: ЛДНТП, 1983. - С. 33-38.

12.Свзеров I.Д., Виницкий М.Ю., Здоренко В.С. Определение напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций во времени // Пространственные конструкции в Красноярском крае. - Красноярск: КПИ, 1983. - С. 151-157.

13.Свзеров I.Д. Неконформные конечные элементы для нелинейных уравнений с монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. - 1985, 16, N 5. - С. 49-56.

14.Свзеров I.Д. Аппроксимация по частям в методе конечных элементов // Моделирование в механике. - 1988, 2(19), N 5. - С. 77-83.

15.Свзеров I.Д. Приближенная схема для задачи о нелинейных колебаниях тонких пластин // Моделирование в механике. - 1989, 3(20), N 2. - С. 54-63.

16.Свзеров I.Д. Неконформные конечные элементы для гиперболического уравнения с длительной памятью // Дифференциальные уравнения. - 1990, 26, N 7. - С. 1272-1274.

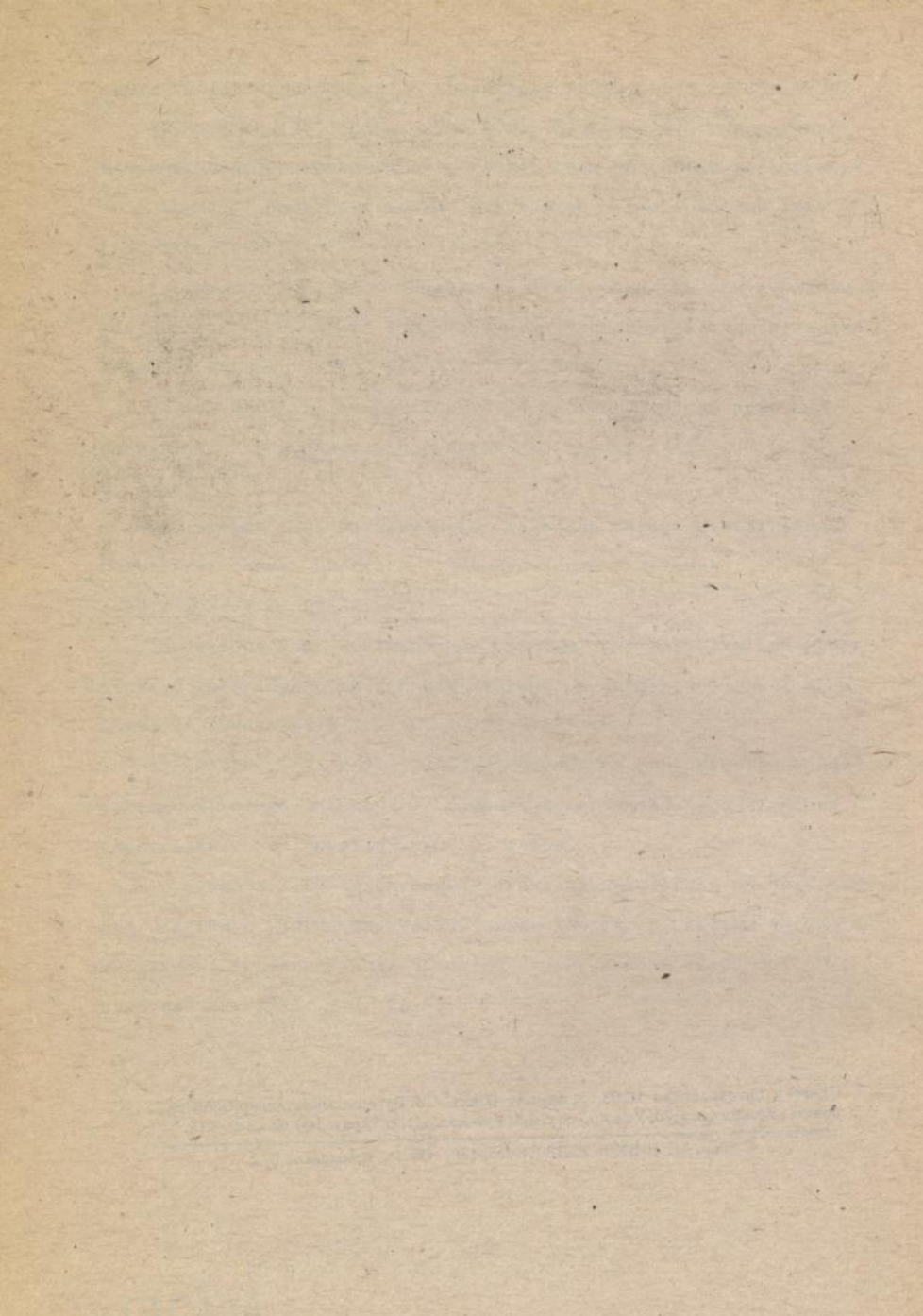
17.Свзеров I.Д. Метод конечных элементов при расчете на длительное действие нагрузки // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник. С. 98-103.

18.Свзеров I.Д. Приближенная схема динамического расчета гибких пластин с учетом физической нелинейности // Системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР-ОС). - К.: Будівельник, 1991. - С. 28-35.

Сдано в производство 18.03.93. Формат 60x84¹/16. Бумага множ.аппар.Осетная
печать. Усл.печ.л. 1,75, Усл.кр.-отт. 2,5. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 100 экз.Зак. 212.

Тип. АП НИИСП 252180, Киев-180, ул. И. Клименко, 5/2.

440504



AB 26.960

AB 26.960