

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
імені Я. С. ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

С И Н Ю Т А
Володимир Михайлович

**ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ
ТЕРМОПРУЖНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ
КРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ**

01.02.04 — Механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук



№ 26.967

Робота виконана у Львівському державному університеті ім. І. Франка.

Науковий керівник — доктор технічних наук, професор КОЛЯНО Ю. М.

Науковий консультант — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник ПРОЦЮК Б. В.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор ТАМУРОВ М. Г., доктор фізико-математичних наук ВІГАК В. М.

Провідна установа — Інститут механіки АН України.

Захист відбудеться « 3 » травня 1993 р. о 15⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради. К.016.59.01 по присудженню наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук і кандидата технічних наук в Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача АН України (м. Львів, вул. Наукова, 36).

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача АН України (м. Львів, вул. Наукова, 36).

Відгук на автореферат просимо направляти на адресу: 290053. ГСП, м. Львів, вул. Наукова, 36, вченому секретарю спеціалізованої ради.

Автореферат розісланий « 2 » квітня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

П. Р. ШЕВЧУК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Широке використання шаруватих циліндричних тіл як елементів конструкцій, які знаходяться в умовах локального нагріву, зумовлює необхідність розв'язування відповідних задач термопружності. Одновимірні задачі термопружності для шаруватих циліндрів і методи їх розв'язування досить повно розглянуті в літературі, зокрема в роботах Вігака В.М., Колесова В.С., Коляно Ю.М., Ленюка М.П., Мотовиловця І.А., Процька Б.В., Удальова А.І. та інших.

Просторові задачі термопружності шаруватих циліндрів висвітлені в літературі недостатньо. Характерні аналітичні методи їх розв'язування подані в роботах Комарова Г.Н., Мотовиловця І.А., Неміша Ю.М., Ноди Н. та інших. У наведених роботах розв'язки задач отримані методом спрощення, який полягає в знаходженні розв'язку задачі термопружності в зображеннях для кожного шару в наступним визначенням невідомих сталих інтегрування в відповідній системі алгебраїчних рівнянь, отриманої шляхом задоволення граничних умов і умов контакту. Ці системи пропонується розв'язувати чисельно. У роботах Молоткова Л.А., Приварнікова А.К., Феня Г.А., Шевлякова Ю.А. та інших при розв'язуванні задач пружності в тілах з плоскo-паралельними границями розділу шарів пропонується знаходити аналітичні розв'язки відповідних систем алгебраїчних рівнянь з допомогою матричного методу.

З іншого боку, в роботах Коляно Ю.М., Лавренюка В.І., Обрацова І.Ф., Онанова Г.Г., Підстригача Я.С. та інших пропонується розв'язувати з використанням апарату узагальнених функцій задачі термопружності для всього пакету шарів шляхом інтегрування систем диференціальних рівнянь термопружності з розривними і сингулярними коефіцієнтами, в яких враховані умови контакту. При такому підході розв'язок задачі в зображеннях виражається через значення шуканих функцій і їх похідних на границях розділу шарів, які знаходяться в рекурентних співвідношень. Крім того, для просторових задач термопружності цей підхід дає можливість уникнути ряду труднощів, які вини-

кають при чисельній реалізації розв'язків знайдених методом сприяння, і зумовлені поведінкою функцій, через які виражаються розв'язки відповідних задач, при великих значеннях аргументу. Методика розв'язку задач термопружності для шаруватих циліндрів, яка базується на використанні узагальнених функцій, розроблена тільки для одновимірних задач.

Із врахуванням вищевказаного, викликає інтерес розвиток цієї методики для просторових задач термопружності багатшарових циліндрів.

Метод роботи є розробка методики визначення просторових температурних полів і напружень в шаруватих по радіальній координаті циліндрах і проведення чисельних досліджень їх термопружного стану при різних наборах термомеханічних і геометричних параметрів.

Наукова новизна роботи полягає в наступному:

1. Запропоновано методику розв'язування статичних і квазістатичних, двовимірних осесиметричних і тривимірних неосесиметричних задач термопружності ізотропних багатшарових циліндрів, яка базується на використанні апарату узагальнених функцій.

2. З використанням запропонованої методики розв'язані просторові задачі термопружності для шаруватих циліндрів, які нагріваються рухомими локальними потоками тепла і шляхом конвективного теплообміну.

3. На основі отриманих розв'язків проведені дослідження температурних полів і напружень в дво-, три-, п'ятишарових циліндрах при різних значеннях термомеханічних і геометричних параметрів.

Достовірність результатів забезпечується фізичною обґрунтованістю постановок задач, апробованістю математичних методів їх розв'язку, співпадінням в окремих випадках розв'язків в розв'язками, знайденими на основі інших методик, використанням при отриманні чисельних результатів методів, які забезпечують необхідну точність.

Практична значимість роботи полягає в розробці методики визначення температурних полів і напружень в багатшарових

циліндрах, яка дозволяє проводити дослідження термомеханічного стану при різних наборах термомеханічних і геометричних параметрів. Отримані результати чисельних досліджень є теоретичною основою оцінки напруженого стану шаруватих циліндрів при нагріві потоками тепла. Прикладні результати використані в спільних розробках ІПММ АН України і Львівського держуніверситету. Результати досліджень температурних полів в клині, який нагрівається потоком тепла, були використані при розробці технології термообробки різців, на яку отримано авторське свідоцтво про винахід.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на II і III Всесоюзних конференціях по механіці неоднорідних структур / м. Львів, 1987 р. і 1991 р. /, республіканській науковій конференції "Диференціальні і інтегральні рівняння і їх застосування" / м. Одеса, 1987 р. /, III Всесоюзній конференції "Міцність, жорсткість і технологічність виробів із композиційних матеріалів" / ... Запоріжжя, 1989 р. /, ІЗ конференції молодих вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики АН України / м. Львів, 1989 р. /.

В цілому робота обговорювалась на семінарі кафедри математичного моделювання Львівського державного університету ім. І.Франка і на спільному семінарі відділів термомеханіки та механіки деформівного твердого тіла Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача АН України / м. Львів, 1992 р. /

Публікації. Результати виконаних досліджень опубліковані у 8 роботах, отримано авторське свідоцтво на винахід.

Об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, заключення, додатку і списку літератури / 87 найменувань /.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність вибраної теми досліджень, зроблено аналіз сучасного стану проблеми, коротко викладено основні результати роботи.

У другому розділі в циліндричній системі координат при-

ведена постановка просторової статичної і квазістатичної задачі термопружності для вільного від зовнішнього навантаження ізотропного, багат шарового по радіальній координаті циліндра, між шарами якого здійснюється ідеальний термомеханічний контакт.

Далі запропонована методика визначення термопружного стану в циліндрі. Спочатку визначається температурне поле в багат шаровому необмеженому циліндрі, на зовнішніх поверхнях якого задані граничні умови 3-ого роду, шляхом представлення розв'язку задачі теплопровідності через функцію Гріна. Функція Гріна нестационарної задачі теплопровідності знаходиться в рівняння

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \lambda^t(z) \frac{dG}{dz} \right) + \lambda^t(z) \left(\frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) = C_r(z) \frac{\partial G}{\partial \tau} \quad /1/$$

при граничних умовах

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z} - h_1 G \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial z} + h_2 G \right) \Big|_{z=z_n} = 0 \quad /2/$$

$$G, \quad \frac{\partial G}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm \infty \quad /3/$$

і початковій умові

$$G \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\rho C_r(\rho)} \delta(z-\rho) \delta(\varphi-\varphi') \delta(z-\xi) \quad /4/$$

в використанні інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа і алгоритму розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами. При цьому враховані особливості отримання розв'язку задачі для випадку різних коефіцієнтів теплопровідності шарів, на що також наголошувалось в роботах Тамурова М.Р. Тут $\lambda^t(z)$, $C_r(z)$ - відповідно коефіцієнти теплопровідності і об'ємної теплоємності, які представляються у "Продок Б.В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № II. С. 1010 - 1021.

вигляді

$$P(z) = P_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) S(z - z_i), \quad /5/$$

де z_i , P_i - зовнішній радіус і характеристика i -ого шару, n - кількість шарів, $S(x)$ - одинична функція Хевісайда, $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака, z_0 , z_n - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра, k_1 , k_2 - відношення коефіцієнтів теплообміну до коефіцієнтів теплопровідності на поверхнях $z = z_0$ і $z = z_n$. Функція Гріна стаціонарної задачі теплопровідності знаходиться зведенням рівняння теплопровідності до рівняння з сингулярними коефіцієнтами і подальшим застосуванням інтегральних перетворень Фур'є по осевій і кутовій координатах. Функції Гріна представлені у вигляді інтегралу і рядів по відповідних власних функціях. Приведені також функції Гріна осесиметричних задач теплопровідності і розглянуто застосування функції Гріна стаціонарної задачі для визначення осесиметричного температурного поля в багат шаровому циліндрі з залежним від осевої координати коефіцієнтом теплообміну на зовнішній поверхні циліндра.

Далі запропоновано спосіб визначення компонент вектора переміщень із системи рівнянь рівноваги в переміщеннях в розривних і сингулярних коефіцієнтами.

$$\begin{aligned} & \left(\Delta - \frac{1}{z^2} \right) u_z + \frac{\lambda(z) + \mu(z)}{\mu(z)} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{z}{z^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \\ & = \frac{\beta(z)}{\mu(z)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\mu_{i+1}} \theta - z \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\mu_{i+1}} e \right) \Big|_{z=z_i=0} \cdot \delta(z - z_i) \end{aligned} \quad /6/$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{z^2} \right) u_r + \frac{\lambda(z) + \mu(z)}{\mu(z)} \frac{1}{z} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{z}{z^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\beta(z)}{\mu(z)} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{1}{z}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_r}{z} \right) \Big|_{z=z_i-0} \cdot \delta(z-z_i)$$

$$\Delta u_z + \frac{\lambda(z) + \mu(z)}{\mu(z)} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta(z)}{\mu(z)} \frac{\partial \theta}{\partial z} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i-0} \cdot \delta(z-z_i)$$

при відповідних граничних умовах. Тут Δ - оператор Лапласа,

$$e = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \rho} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \beta(z) = (3\lambda(z) + 2\mu(z)) \alpha_z(z),$$

$\lambda(z)$, $\mu(z)$ і $\alpha_z(z)$ - відповідно коефіцієнти Ляме і температурний коефіцієнт лінійного розширення, які представляються у вигляді /6/, θ - триріст температури точок тіла.

У випадку осесиметричної задачі після представлення переміщень через термопружний потенціал і розділення змінних, вихідна система двох рівнянь рівноваги в переміщеннях зводиться до системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а остання - до диференціального рівняння четвертого порядку.

Розв'язок системи містить невідомі значення шуканих функцій і їх похідних на границях розділу шарів, для визначення яких побудовані рекурентні співвідношення. Крім того, запропоновано модифікований підхід, при реалізації якого розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь виражається тільки через значення шуканих функцій на границях розділу шарів, що приводить порівняно в першому підході до зменшення в два рази кількості рекурентних співвідношень.

Для неосесиметричної задачі вихідна система трьох диференціальних рівнянь /6/ після представлення через термопружний потенціал і розділення змінних зводиться до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка надалі перетворена до системи двох диференціальних рівнянь четвертого і

другого порядку. Аналогічно, як і в випадку осесиметричної задачі, для знаходження значень шуканих функцій і їх похідних на стиках шарів, через які виражається розв'язок системи, побудовані рекурентні співвідношення.

В третьому розділі в використанні запропонованої методики отримано розв'язок задачі термопружності для порожнистого циліндра, зовнішня поверхня якого нагрівається рухомих нормально-розподіленим потоком тепла

$$\lambda_n^* \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = Q \cdot \exp\{-k[z_n^2 \sin^2(\varphi - \varphi^*(z)) + (z - z^*(z))^2]\} \cos(\varphi - \varphi^*(z)) S(\cos(\varphi - \varphi^*(z))). \quad 17/$$

Тут Q - густина теплового потоку, k - коефіцієнт вогнетривості, $\varphi^*(z)$, $z^*(z)$ - закон руху центра плями нагріву в кутовому і осьовому напрямках.

Встановлено, що розв'язок задачі в граничному випадку руху потоку в безмежно великою кутовою швидкістю в точності до множника γ співпадає з розв'язком осесиметричної задачі для циліндра, який нагрівається по зовнішній поверхні нормально-розподіленим потоком тепла, де

$$\gamma = \frac{c \gamma f(z_n \sqrt{k})}{2 z_n \sqrt{\pi k}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-k z_n^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot S(\cos \varphi) d\varphi \quad 18/$$

є середнім інтегральним по колу від розподілу теплового потоку по кутовій координаті.

Для цього випадку нагріву досліджено вплив співвідношень між термомеханічними і геометричними параметрами циліндра на розподіл напружень на стиках шарів. На прикладі двохшарового циліндра для усталеного режиму нагріву показуємо, що для випадків, коли коефіцієнт лінійного розширення внутрішнього шару більший, ніж коефіцієнт лінійного розширення зовнішнього шару, можна вивести інтервал значень відношень $\beta_1 = z_1 / z_2$ / радіусів першого і другого шарів /, для яких радіальні напруження на

стику шарів будуть стискувачими. Встановлено також, що для значення ρ_i , при якому радіальні напруження на стику шарів рівні нулю, кільцеві і осові напруження є меншими по абсолютній величині, ніж при значеннях ρ_i в згаданого інтервалу. Ці результати увагальнені на випадок більшої кількості шарів в циліндрі.

Дослідження неусталених температурних напружень в двошаровому циліндрі, який нагрівається по зовнішній поверхні, в залежності від значень відношень α_1/α_2 і a_1, a_2 - коефіцієнти температуропровідності внутрішнього і зовнішнього шарів / показали, що у випадку $\alpha_1/\alpha_2 < 1$ зменшення α_1/α_2 може привести до виникнення в окремі моменти часу значних розтягуючих радіальних напружень на стику шарів.

Крім того, в цьому ж розділі визначено термопружний стан в п'ятишаровому суцільному циліндрі при його нагріві шляхом конвективного теплообміну в залежності від осової координати коефіцієнтом теплообміну. Наведені результати розрахунків температурних полів і напружень при постійному і змінному коефіцієнтах теплообміну.

В четвертому розділі методика визначення температурного поля розвинуто і поширено на випадок циліндра з ортотропними шарами і для випадку шаруватого клина. З використанням функції Гріна отримано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для скінченного ортотропного циліндра, який нагрівається шляхом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем заданої температури, постійної на кожній із поверхонь, що обмежують циліндр. Приведено порівняльний аналіз розрахунку температурного поля в тришаровому циліндрі з ізотропними третім і другим шарами для випадків, коли перший шар ортотропний і ізотропний.

Далі через відповідну функцію Гріна визначено температурне поле в багатошаровому необмеженому клині, який нагрівається по бічній поверхні нормально-розподіленим потоком тепла. Приведені результати розрахунку температурного поля на поверхні нагріву одношарового сталевого клина при рівних параметрах температурної дії, які представлені у вигляді розподілу ізотерм.

У заключенні приведено основні результати роботи і короткі

висновки.

У додатку міститься акт про використання результатів досліджень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І КОРОТКІ ВИСНОВКИ

1. Запропоновано методику розв'язування двовимірних осесиметричних і тривимірних неосесиметричних задач термопружності ізотропних багат шарових циліндрів у квазістатичній постановці, яка базується на використанні апарату узагальнених функцій.

2. З використанням запропонованої методики розв'язана квазістатична неосесиметрична задача термопружності для довгого багат шарового порожнистого циліндра, який нагрівається по зовнішній поверхні рухомих нормально-розподіленим потоком тепла. Встановлено, що розв'язок задачі в граничному випадку руху потоку по колу в безмежно великій кутовій швидкості в точності до множника співпадає з відповідним розв'язком осесиметричної задачі.

3. На основі отриманого розв'язку задачі термопружності у граничному випадку рухомого по колу потоку тепла проведені чисельні дослідження впливу термомеханічних і геометричних характеристик на розподіл статичних і квазістатичних температурних напружень на стиках шарів циліндрів. Для випадку, коли коефіцієнт лінійного розширення кожного шару більший, ніж коефіцієнт лінійного розширення зовнішнього шару, вказано область значень для відношень радіусів шарів дво- і тришарового циліндрів, при яких статичні радіальні напруження на стиках шарів будуть стискуючими.

4. Отримані результати чисельних досліджень можуть бути використані для дослідження можливого розшарування шаруватих циліндрів.

5. Запропонована методика розв'язування просторових задач термопружності багат шарових ізотропних циліндрів може бути застосована для тіл з більш складними теплофізичними характеристиками. У зв'язку з цим знайдено розв'язок статичної осесиметричної задачі термопружності для суцільного циліндра,

який нагрівається шляхом конвективного теплообміну при аміньому коефіцієнті теплообміну, на основі якого проведені чисельні розрахунки термопружного стану в п'ятишаровому циліндрі.

Визначено також температурне поле в багат шаровому циліндрі з ортотропними шарами і в багат шаровому клині з ізотропними шарами. Отримані результати чисельних досліджень температурного поля в сталевому однорідному клині, який нагрівається по бічній поверхні нормальним розподіленим потоком тепла, можуть бути використані для визначення зон термічного впливу і прогнозування зон повного і часткового зміцнення матеріалу.

6. Таким чином, запропонована методика дає можливість визначати і досліджувати температурні поля і напруження в багат шарових кругових циліндричних тілах при їх локальному нагріві для широкого діапазону термомеханічних і геометричних параметрів.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Синьта В.М. Пространственная задача теплопроводности для многослойного неограниченного цилиндра, нагреваемого движущимся источником тепла // Материалы 13 конференции молодых ученых Института прикладных проблем мех. и математ. АН УССР. - Львов, 1989. - С. 119 - 123 / Деп. в ВИНТИ № 7242 - В 89 Деп.
2. Процьк Б.В., Драпкин Б.А., Синьта В.М. Квазистатические пространственные задачи термоупругости слоистых цилиндров и пластин // Механика неоднородных структур. Тез. докл. второй Всесоюзной конф. Львов, 2 - 4 сентября, 1987 г. - Львов, 1987. - С. 229 - 230.
3. Синьта В.М. Об одном подходе к решению задач термоупругости многослойных цилиндров // Механика неоднородных структур. Тез. докл. третьей Всесоюзной конф. Львов, 17 - 19 сентября, 1991 г. - Львов, 1991. - С. 312.
4. Процьк Б.В., Драпкин Б.А., Синьта В.М. Фундаментальные ре-

- шения пространственных стационарных задач теплопроводности для многослойных цилиндрических областей // Тев. докл. Республиканской научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения". Одесса, 22 - 24 сентября, 1987 г. - Одесса, 1987. - С. 74 - 75.
5. Процюк Б.В., Синюта В.М. Термонапряженное состояние композитного цилиндра // Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов. Тев. докл. III Всесоюзной конф., 24 - 25 октября, 1989 г. - Запорожье, 1989. - С. 164 - 165.
 6. Процюк Б.В., Синюта В.М. Функція Гріна стаціонарної осесиметричної задачі теплопровідності для багатослоєвого циліндра // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вип. 30: Прикладні питання математичного аналізу. - С. 48 - 51.
 7. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М. Статическая осесимметрическая задача термоупругости для многослойного цилиндра // Прикл. математика и механика. - 1991. - Т. 55, вып. 6. - С. 1035 - 1040.
 8. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М., Шебанов С.М., Шаров С.М. Нестационарное температурное поле в многослойном ортотропном цилиндре // Изв. - 1992. - Т. 62, № 2, С. 325-330.
 9. Рудычев В.Г., Картавцев В.С., Моисеенко В.В., Сотников В.Д., Аннилогов Н.М., Матюхин В.А., Василенко К.А., Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Махоркин И.Н., Кулик А.Н., Синюта В.М. Способ упрочнения рабочих кромок деталей технологической оснастки и инструмента. - Авт. свидетельство СССР № 1420956.

AB 26.967

AB 26.967