

На правах рукописи

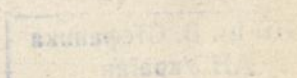
Симбирский Михаил Николаевич

"СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ  
НЕСАМОСПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ"

01.01.01 - математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

ХАРЬКОВ 1993





276, 960

Работа выполнена в Физико-техническом институте низких температур АН Украины, г. Харьков

Научный руководитель - ТКАЧЕНКО Вадим Александрович,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор;

Официальные оппоненты: БОРОК Валентина Михайловна,  
доктор физ.-мат. наук  
профессор;

ХРАБУСТОВСКИЙ Владимир Иванович,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент.

Ведущая организация - Одесский электротехнический институт связи им. А. С. Попова.

Защита диссертации состоится " \_\_\_\_ " апреля 1993 года  
в \_\_\_\_ часов на заседании Специализированного Совета  
К 053.06.02 при Харьковском государственном университете  
( 310077, Харьков, пл. Свободы, 4 , ауд. 6-48 ).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " марта 1993 года.

Ученый секретарь  
Специализированного совета

А. С. Сохин

Актуальность темы. В настоящее время активно изучаются самосопряженные дифференциальные операторы (ДО) с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами (см., например, монографию Л. А. Пастура и А. Л. Фиготина\*). Несмотря на заметный прогресс, спектральная теория таких операторов далека от завершения. Еще менее изучены спектральные свойства несамосопряженных ДО с п.-п. коэффициентами. До последнего времени не была известна структура спектра даже для ДО второго порядка с периодическим комплекснозначным коэффициентом\*\*.

Тем не менее в начале 80-х годов в работах М. Г. Гасымова\*\*\* и П. Сарнака\*\*\*\* был обнаружен класс ДО с комплекснозначными периодическими и даже квазипериодическими коэффициентами, для которых удается описать их спектр и построить обобщенные собственные функции. Отличительной чертой таких операторов является то, что их коэффициенты представляют собой функции, имеющие лишь положительные показатели Фурье. Так, для оператора Штурма-Лиувилля

$$L[y] = -y'' + q(x)y \quad (1)$$

с периодическим потенциалом  $q(x)$ , имеющим лишь положительные показатели Фурье, М. Г. Гасымов построил решения Флоке  $e(x, \lambda)$  уравне-

\* Л. А. Пастур, А. Л. Фиготин, Случайные и почти-периодические самосопряженные операторы. Общие спектральные свойства и распределение собственных значений. М: "Наука", 1991. - 336 с.

\*\* Ткаченко В. А., Спектральный анализ несамосопряженного оператора Хилла // Докл. АН СССР т. 322, N 2, 1992.

\*\*\* Гасымов М. Г., Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. // Докл. АН СССР, 1980, т. 252, N 2, с. 277-280.

\*\*\*\* Sarnak P., Spectral behavior of quasi periodic potentials, Commun. Math. Phys. 1982, v. 84, pp 347-401.

ния  $L[y] = \lambda^2 y$ . Оказалось, что функция  $e(x, \lambda)$  аналитична по параметру  $\lambda$  и, как функция от  $\lambda$ , имеет простые полюсы в отрицательных полуцелых точках. С помощью вычетов функции  $e(x, \lambda)$  в этих точках М. Г. Гасымов определил нормировочные числа  $s_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , выяснил их спектральный смысл и поставил задачу восстановления потенциала  $q$  по ним. Возникшая здесь обратная задача спектрального анализа была им решена в предположении малости последовательности  $\{s_n\}$ . В последующих работах учеников М. Г. Гасымова эти результаты были перенесены на некоторые ДО с п.-п. коэффициентами, имеющими лишь положительные показатели Фурье.

Принципиальным моментом в исследовании указанного класса операторов оставалось предположение о дискретности множества показателей Фурье коэффициентов оператора. Это делает актуальной задачу об обобщении результатов М. Г. Гасымова на случай, когда показатели Фурье п.-п. коэффициентов ДО расположены произвольным образом (например, всюду плотно) на положительной полуоси.

Далее, Л. А. Пастур и В. А. Ткаченко\*, назвав построенные М. Г. Гасымовым нормировочные числа набором спектральных данных оператора (1), дали следующий критерий того, чтобы заданная последовательность  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  являлась таковым набором для оператора (1) с периодическим потенциалом  $q(x)$ , имеющим лишь положительные показатели Фурье: для того, чтобы коэффициенты Фурье  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  функции  $q(x)$  лежали в  $l^1$  (или в  $l^2$ ), необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{ns_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  лежала в  $l^1$  (соответственно, в  $l^2$ ), а построенный по числам  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  специальный определитель  $D(z)$  не обращался в нуль в замкнутой верхней полуплоскости. Этот результат указывает на определенное соответствие между аналитическими свойствами коэффициентов Фурье функции  $q(x)$  и последовательности  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Отсюда возникает и другая задача - описать аналитические свойства коэффициентов ДО указанного общего вида в терминах его спектральных данных.

---

\* Пастур Л. А., Ткаченко В. А. К спектральной теории операторов Шредингера с периодическими комплекснозначными потенциалами. // Функциональный анализ и его прил. - 1988, т. 22, вып. 2, 85-86.

Обе эти задачи решаются в данной диссертационной работе.

Цель диссертационной работы является:

1. Построение обобщенных собственных функций и спектральных данных для дифференциальных операторов с почти-периодическими коэффициентами, имеющими лишь положительные показатели Фурье.

2. Решение обратной задачи спектрального анализа по таким данным и описание соответствия между аналитическими свойствами коэффициентов ДО указанного вида и его спектральными данными.

3. Исследование задачи Коши для уравнения Кортевега - де Фриза с п.-п. начальным условием, имеющим лишь положительные показатели Фурье.

Общая методика работы. В диссертации используются методы спектральной теории дифференциальных операторов, теории интегральных уравнений, теории банаховых алгебр.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Построены обобщенные собственные функции операторов Штурма-Лиувилля, Дирака и одномерного дифференциального оператора произвольного порядка с п.-п. коэффициентами, имеющими лишь положительные показатели Фурье.

2. Описаны спектры таких операторов и определены их наборы спектральных данных.

3. Найдены критерии того, что заданное множество является набором спектральных данных какого-либо из указанных операторов

4. Указана связь между аналитическими свойствами коэффициентов указанных операторов и свойствами наборов спектральных данных; доказано, что соответствие "коэффициенты оператора" - "набор спектральных данных" является взаимно однозначным и взаимно непрерывным в специальных банаховых пространствах.

5. Исследована задача Коши для уравнения Кортевега - де Фриза с п.-п. начальным условием, имеющим лишь положительные показатели Фурье. Получены достаточные условия, при которых решение этой задачи продолжается на всю ось времени и остается п.-п. функцией с положительными показателями Фурье.

Теоретическая и практическая ценность результатов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть

использованы в спектральной теории несамосопряженных операторов с п.-п. коэффициентами. Методика работы может быть полезна при исследовании других классов ДО, например, ДО с коэффициентами, имеющими строго положительный спектр Карлемана.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на семинаре по спектральной теории линейных операторов под руководством Л. А. Пастура (ФТИНГ, г. Харьков), семинаре по спектральному анализу под руководством А. Г. Костюченко (МГУ, г. Москва), семинаре по спектральной теории операторов Шредингера под руководством Х. Фурстенберга (Иерусалимский университет, Израиль), XXII конференции молодых ученых ФТИНГ АН Украины (1991).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 - 3].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Общий объем работы составляет 109 страниц машинописного текста. Список литературы содержит 30 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы, дан краткий обзор известных до настоящего времени результатов, описаны структура диссертации и ее основные результаты, введены основные определения и обозначения.

Центральную роль в работе играют специальные банаховы алгебры п.-п. функций, которые определяются следующим образом. Пусть заданы произвольное замкнутое по сложению счетное подмножество положительных чисел  $M = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и субмультипликативная функция  $\rho: M \rightarrow [1, +\infty)$ , называемая весом. Обозначим  $A^\rho(M)$  банахову алгебру п.-п. функций, показатели Фурье которых лежат в  $M$ , а коэффициенты суммируемы с весом  $\rho$ :

$$A^\rho(M) = \left\{ f: f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \cdot \exp(i\lambda_n x); \|f\|_A = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \rho(\lambda_n) < \infty \right\}$$

Важной характеристикой веса  $\rho$  и алгебры  $A^\rho(M)$  является скорость роста функции  $\rho(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Введем такие характеристики веса  $\rho$ :

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \rho(\Lambda)}{\Lambda}; \quad \mu = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \rho(\Lambda) - \eta \Lambda}{\ln \Lambda} \quad (2)$$

Все элементы банаховой алгебры  $A^{\rho}(M)$  аналитичны в полуплоскости  $\Pi_{\eta} = \{z: \text{Im } z > -\eta\}$  и непрерывны в ее замыкании. Для всякой функции  $f$  из алгебры  $A^{\rho}(M)$  не менее чем  $[\mu-0]$  производных представимы на прямой  $\{z: \text{Im } z = -\eta\}$  рядами Фурье, коэффициенты которых лежат в  $l^1$ . В терминах веса  $\rho$  можно выразить и ряд других аналитических свойств функций из алгебры  $A^{\rho}(M)$ .

Для дальнейшего изложения удобно переупорядочить множество натуральных чисел, полагая  $\alpha \geq n$ , если  $\Lambda_{\alpha} \geq \Lambda_n$ .

В первой главе подробно изучен оператор Штурма-Лиувилля (1) с п. -п. по Безиковичу потенциалом  $q(x)$ , показатели Фурье которого лежат во множестве  $M$ :

$$q(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n \exp(i \Lambda_n x) \quad (3)$$

Пусть характеристика  $\mu$  веса  $\rho$  (см. (1)) не меньше единицы. Определим банахово пространство последовательностей  $S^{\rho}(M)$  с нормой

$$\| (s_n) \|_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n| \Lambda_n^{-1} \rho(\Lambda_n) + \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda_n s_n|^2 \right]^{1/2},$$

и банахово пространство  $Q^{\rho}(M)$  п. -п. функций вида (3), у которых их вторая первообразная существует, является п. -п. функцией и лежит в алгебре  $A^{\rho}(M)$ . Это означает, что конечна норма

$$\| q(x) \|_Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} |q_n| \Lambda_n^{-2} \rho(\Lambda_n) + \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}} |q_n|^2 \right]^{1/2}$$

Теорема 1.1. Уравнение  $L[y] = \lambda^2 y$  с потенциалом  $q(x)$  из класса  $Q^{\rho}(M)$  имеет решение вида

$$e(x, \lambda) = \exp(i \lambda x) \left[ 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda + \frac{\Lambda_n}{2}} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} \varphi_{n, \alpha} \exp(i \Lambda_{\alpha} x) \right]$$

в котором числа  $(\varphi_{n, \alpha})_{n \in \mathbb{N}, \alpha \geq n}$  удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_n} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} |\varphi_{n, \alpha}| \rho(\Lambda_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \left[ \Lambda_\alpha^2 \sum_{n: n \leq \alpha} \Lambda_n^{-1} |\varphi_{n, \alpha}| \right]^2 < \infty$$

При любом положительном  $\lambda_0$  равномерно по  $x$  существует предел по некасательному к оси  $\lambda$  направлению

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0/2} e(x, -\lambda)(\lambda - \lambda_0/2) \equiv \begin{cases} 0, & \lambda_0 \notin M \\ e_n(x), & \lambda_0 = \Lambda_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Функция  $e_n(x)$  является решением уравнения  $L[y] = \lambda^2 y$  при  $\lambda = \Lambda_n/2$ , линейно зависимым с  $e(x, \Lambda_n/2)$ . Поэтому существуют комплексные числа  $s_n, n \in \mathbb{N}$ , такие, что  $e_n(x) \equiv s_n e(x, \Lambda_n/2)$ . В случае периодического потенциала  $q(x)$  числа  $s_n$  лишь множителем  $1/2$  отличаются от нормировочных чисел, введенных М. Г. Гасымовым. Эти числа названы набором спектральных данных оператора (1) с потенциалом  $q(x)$ . Спектр оператора  $L$  совпадает с множеством  $[0, +\infty)$ . На спектре имеется некоторое множество спектральных особенностей\*, расположенных в замыкании тех точек  $(\Lambda_n/2)^2$ , где  $s_n \neq 0$ .

Основной результат первой главы и вместе с тем ключевой результат всей работы заключен в следующей теореме.

Теорема 1.2. Для того, чтобы множество  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  было набором спектральных данных оператора (1) с потенциалом  $q(x)$  из класса  $Q^p(M)$ , необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

- i) последовательность  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  принадлежит пространству  $S^p(M)$ ;
- ii) бесконечный определитель

$$D(z; \{s_n\}) = \det \left\| \delta_{n,k} + \frac{2s_n}{\Lambda_n + \Lambda_k} \exp \left[ \frac{\Lambda_n + \Lambda_k}{2} iz \right] \right\|_{n,k=1}^{\infty}$$

является обратным элементом алгебры  $A^p(M)$ .

При этом оператор  $L$  однозначно определяется своим набором

\* по поводу этого понятия см., например Павлов Б. С., Спектральный анализ диссипативного сингулярного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. "Итоги науки и техники. СПМ. Фундаментальные направления." Т. 65, М.: ВИНТИ, 1991.

спектральных данных.

Будем говорить, что множество  $M$  обладает положительным базисом, если существуют положительные числа  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  такие, что всякий элемент из  $M$  однозначно представим в виде линейной комбинации этих чисел с неотрицательными целыми коэффициентами.

**Теорема 1.3.** Пусть множество  $M$  обладает положительным базисом. И пусть вес  $\rho$  таков, что первое выражение из (2) имеет не нижний, а точный предел.

Для того, чтобы множество  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  было набором спектральных данных оператора (1.2.1) с потенциалом  $q(x)$  из класса  $Q^\rho(M)$ , необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

- i) последовательность  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  принадлежит пространству  $S^\rho(M)$ ;
- ii) бесконечный определитель  $D(z; \{s_n\})$ , определенный в теореме 1.2, отделен от нуля в полуплоскости  $\Pi_\eta = \{z: \text{Im } z \geq -\eta\}$ , т.е.  $\inf_{z: \text{Im } z \geq -\eta} |D(z; \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}})| > 0$ .

При этом оператор  $L$  однозначно определяется своим набором спектральных данных.

Эта теорема содержит результат Л. А. Пастура и В. А. Ткаченко, цитированный выше. Чтобы убедиться в этом, нужно взять множество натуральных чисел в качестве множества  $M$  и вес  $\rho$  равным  $1 + \lambda^2$  для случая  $\{a_n\} \in l^1$  и, соответственно, равным  $1 + \lambda$  для случая  $\{a_n\} \in l^2$ . Взяв в данном случае вес  $\rho$  равным  $1 + \lambda^{\nu+2}$ ,  $\nu \geq 0$ , мы получим, что в теореме Л. А. Пастура и В. А. Ткаченко пространство  $l^2$  можно заменить дискретным соболевским пространством  $w_\nu^1$ .

Во второй главе результаты из первой главы переносятся на одномерный оператор Дирака  $T = B \frac{d}{dx} + Q(x)$ ,  $B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , в котором  $2 \times 2$  матрица-функция  $Q(x)$  имеет вид

$$Q(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} Q_n \exp(i \Lambda_n x) \quad (4)$$

и удовлетворяет условиям

$$BQ(x) + Q(x)B = 0; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\| \Lambda_n^{-1} \cdot \rho(\Lambda_n) + \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (5)$$

( $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму  $2 \times 2$  матриц).

**Теорема 2.1.** Уравнение  $TU = \lambda U$  с потенциалом  $Q(x)$  вида (4)-

(5) имеет решения вида

$$e_+(x, \lambda) = \exp(i\lambda x) \left[ E + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda + \Lambda_n/2} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} \Phi_{n, \alpha} \exp(i\Lambda_\alpha x) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_-(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x) \left[ E + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{-\lambda + \Lambda_n/2} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} \Phi_{n, \alpha} \exp(i\Lambda_\alpha x) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

где  $E$  обозначает единичную матрицу, а матрицы  $\{\Phi_{n, \alpha}\}_{n \in \mathbb{N}, \alpha \geq n}$  удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_n} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} \|\Phi_{n, \alpha}\| \rho(\Lambda_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \left[ \sum_{n: n \leq \alpha} \frac{\Lambda_\alpha}{\Lambda_n} \|\Phi_{n, \alpha}\| \right]^2 < \infty$$

Существуют пределы по некасательному к вещественной  $\lambda$ -оси направлению

$$\lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_n/2} e_+(x, \lambda) (\lambda + \Lambda_n/2) \equiv g_n(x); \quad \lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_n/2} e_-(x, \lambda) (\lambda - \Lambda_n/2) \equiv f_n(x)$$

При этом функции  $f_n(x)$  и  $g_n(x)$  оказываются решениями уравнения  $TU = \lambda U$  соответственно при  $\lambda = \Lambda_n/2$  и  $\lambda = -\Lambda_n/2$ , но уже линейно независимыми с  $e_+(x, \Lambda_n/2)$  и  $e_-(x, -\Lambda_n/2)$ . Поэтому для всех  $n \in \mathbb{N}$  существуют числа  $s_n^+$  и  $s_n^-$  такие, что

$$f_n(x) \equiv s_n^+ e_+(x, \Lambda_n/2), \quad g_n(x) \equiv s_n^- e_-(x, -\Lambda_n/2).$$

Множество пар чисел  $\{s_n^+, s_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$  назовем набором спектральных данных оператора  $T$ .

Теорема 2.2. Для того, чтобы множество пар чисел  $\{s_n^+, s_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$  было набором спектральных данных оператора  $T$  с потенциалом  $Q(x)$  вида (4)–(5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

- i) последовательности  $\{s_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$  принадлежат пространству  $S^p(M)$ ;
- ii) бесконечный определитель

$$D(z) \equiv \det \|\delta_{n, k} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{4s_j^+ \cdot s_n^-}{(\Lambda_n + \Lambda_k)(\Lambda_n + \Lambda_j)} \exp[(\Lambda_n + \Lambda_j)iz]\|_{n, k=1}^\infty$$

является обратным элементом банаховой алгебры  $A^p(M)$ .

При этом потенциал  $Q(x)$  однозначно восстанавливается по на-

бору спектральных данных.

В третьей главе изучается одномерный дифференциальный оператор  $H$ , порожденный в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  дифференциальным выражением  $h[y] = i^m y^{(m)} + \sum_{\gamma=0}^{m-2} p_\gamma(x) y^{(\gamma)}(x)$ . Характеристика и веса  $\rho$  (см. (2)) предполагается не меньшей числа  $m-1$ . Функции  $p_\gamma(x)$  являются п.-п. по Безиковичу, а соответствующие ряды Фурье

$$p_\gamma(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{\gamma n} \exp(i\Lambda_n x), \quad \gamma=0,1,\dots,m-2 \quad (6)$$

удовлетворяют условиям:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |p_{\gamma n}| \cdot \Lambda_n^{\gamma-m} \cdot \rho(\Lambda_n) < \infty, \quad \gamma=0,1,\dots,m-2 \quad (7)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |p_{\gamma n}| \Lambda_n^{\gamma-m+2} < \infty, \quad \gamma=0,1,\dots,m-2. \quad (8)$$

Обозначим через  $\omega_j$  корни  $m$ -ой степени из единицы, отличные от единицы:  $\omega_j = \exp(2\pi j/m)$ ,  $j=1, \dots, m-1$ .

**Теорема 3.1.** Пусть п.-п. коэффициенты  $p_\gamma(x)$  вида (6) удовлетворяют условиям (7)-(8). Тогда спектральное уравнение  $Hu = \lambda^m u$  имеет решение вида

$$e(x, \lambda) = \exp(i\lambda x) \left[ 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \lambda + \frac{\Lambda_n}{1-\omega_j} \right)^{-1} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} \varphi_{n\alpha, j} \exp(i\Lambda_\alpha x) \right] \quad (9)$$

в котором коэффициенты  $\{\varphi_{n\alpha, j}\}$  удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_n} \sum_{\alpha: \alpha \geq n} |\varphi_{n\alpha, j}| \cdot \rho(\Lambda_\alpha) < \infty$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \left[ \Lambda_\alpha^2 \sum_{n: n \leq \alpha} \Lambda_n^{-1} |\varphi_{n\alpha, j}| \right]^2 < \infty$$

Проведем в  $\lambda$ -плоскости луч  $R_j$  из начала координат через точку  $-1/(1-\omega_j)$ . Решение  $e(x, \lambda)$  является аналитической функцией от  $\lambda$ , вообще говоря, лишь вне лучей  $R_j$ ,  $j=1, \dots, m-1$ . Однако при всех  $j=1, \dots, m-1$  равномерно по  $x$  существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\lambda_0/(1-\omega_j)} e(x, \lambda) \left( -\lambda - \frac{\Lambda_n}{1-\omega_j} \right) \equiv \begin{cases} 0, & \lambda_0 \notin M \\ e_{n,j}(x), & \lambda_0 = \Lambda_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

когда  $\lambda$  стремится к  $-\lambda_0/(1-\omega_j)$  по некасательному к лучу  $R_j$  направлению. Функция  $e_{n,j}(x)$  является решением уравнения  $Hy = \lambda^m y$  при  $\lambda = -\Lambda_n/(1-\omega_j)$ , но уже линейно зависимым с  $e(x, -\omega_j \Lambda_n/(1-\omega_j))$ . Поэтому существуют комплексные числа  $s_{n,j}, n \in \mathbb{N}, j = \overline{1, m-1}$ , такие что

$$e_{n,j}(x) \equiv s_{n,j} e(x, -\omega_j \Lambda_n/(1-\omega_j)).$$

Назовем множество этих чисел *набором спектральных данных оператора  $H$* .

Основной результат главы содержится в следующей теореме:

**Теорема 3.2.** *Для того, чтобы множество  $\{s_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}, j = \overline{1, m-1}}$  было набором спектральных данных оператора  $H$  с коэффициентами  $r_j(x)$  вида (6), удовлетворяющих неравенствам (7)–(8), необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:*

- i) при  $j = \overline{1, m-1}$  последовательности  $\{s_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}}$  принадлежат пространству  $S^p(M)$ ;
- ii) Функция  $D(z)$ , определенная формулой

$$D(z) = \det \left\| \delta_{kn} \delta_{jl} + \frac{s_{kn}}{\frac{\Lambda_k}{1-\omega_j} - \frac{\omega_l \Lambda_n}{1-\omega_l}} \exp(i \Lambda_k z) \right\|_{\substack{j, l = \overline{1, m-1} \\ k, n \in \mathbb{N}}}$$

является обратным элементом алгебры  $A^p(M)$ .

При этом коэффициенты  $r_j(x)$  оператора  $H$  восстанавливаются по спектральным данным однозначно.

В четвертой главе для оператора (1), введенного в первой главе, подробнее рассмотрены топологические свойства (взаимно-однозначного) соответствия "потенциал"  $\longleftrightarrow$  "спектральные данные". Множество последовательностей, отвечающих операторам (1) с потенциалами из  $Q^p(M)$ , обозначим через  $\mathcal{E}^p(M)$ . Теорема 1.2 утверждает, что множество  $\mathcal{E}^p(M)$  лежит в пространстве  $S^p(M)$ .

**Теорема 4.1.** *Отображение "потенциал"  $\longleftrightarrow$  "спектральные дан-*

ные" устанавливает гомеоморфизм между метрическими пространствами  $\mathcal{Q}^p(M)$  и  $Q^p(M)$ .

Аналогичным образом можно установить, что соответствие "спектральные данные"  $\leftrightarrow$  "класс коэффициентов" является гомеоморфизмом и для рассмотренных операторов Дирака, и для дифференциальных операторов произвольного порядка, если соответствующим образом устроить норму из левых частей неравенств (5) и (7)-(8). Более того, почти не меняя рассуждений из доказательства теоремы 4.1, можно показать, что эти гомеоморфизмы бесконечно дифференцируемы по Гато.

Назовем потенциал  $q \in Q^p(M)$  *конечно-параметрическим*, если отвечающий ему набор спектральных данных  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  финитен. Как следует из теоремы 4.1 множество конечно-параметрических потенциалов плотно в классе  $Q^p(M)$ .

Пусть характеристика  $\mu$  веса  $\rho$  (см. (2)) не меньше трех. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега - де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x;0) = u(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (10)$$

с функцией  $u(x)$  из класса  $Q^p(M)$ . Пусть оператору (1) с потенциалом  $u(x)$  из класса  $Q^p(M)$  соответствует набор спектральных данных  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Основной результат этой главы может быть сформулирован в следующем виде:

Теорема 4.2. Пусть для всех  $t$  из некоторого интервала  $I$ , содержащего нуль, числа  $s_n(t) = s_n \exp(i\lambda_n^3 t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяют условиям теоремы 1.2. Тогда потенциал  $u(x;t)$ , соответствующий множеству спектральных данных  $\{s_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  оператора (1) является решением задачи Коши (10) на интервале  $I$ .

Из теоремы 4.1 вытекает, что такой интервал  $I$  существует, поэтому задача Коши локально по времени имеет решение в классе  $Q^p(M)$ .

Далее в работе рассмотрены достаточные условия, при которых решение задачи Коши (10) продолжается на всю временную ось  $-\infty < t < +\infty$ .

Теорема 4.3. Пусть функция  $u(x)$  лежит в классе  $Q^p(M)$  и имеет

набор спектральных данных  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , причем числа  $\{\Lambda_m\}_{1 \leq m \leq N}$ , ( $N \leq \infty$ ), соответствующие ненулевым элементам последовательности  $\{s_n\}$ , линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда функция  $u(x, t)$  - решение задачи Коши (10) - продолжается на всю временную ось  $-\infty < t < +\infty$  и при всех  $t \in \mathbb{R}$  функции  $u(x, t)$  лежат в классе  $\mathcal{Q}^2(M)$ .

На простом примере в работе показано, что условие несоизмеримости в теореме 4.3 существенно.

#### ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Симбирский М. Н. Обратная задача Штурма-Лиувилля для почти-периодических потенциалов с положительными показателями Фурье. // Докл. АН УССР, 1991, серия А, N 2, с. 5-8.

2. Симбирский М. Н. Обратная задача Штурма-Лиувилля для одного класса почти-периодических потенциалов. // XXII научно-техническая конференция молодых исследователей ФТИНТ АН УССР (Тезисы докладов), ФТИНТ, 1991, с. 79-80.

3. Simbirskii M. N. Inverse problem for Sturm-Liouville operator with almost-periodic potential having only positive Fourier exponents. // "Advances in Soviet Mathematics", vol. 11 : "Entire and Subharmonic Functions", pp. 21-38, AMS, 1991.

Ответственный за выпуск Рашковский А. Ю.

---

Подписано в печать 19.02.93 Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип.

Печать офсетная. Объем 0,5 физ. п. л.

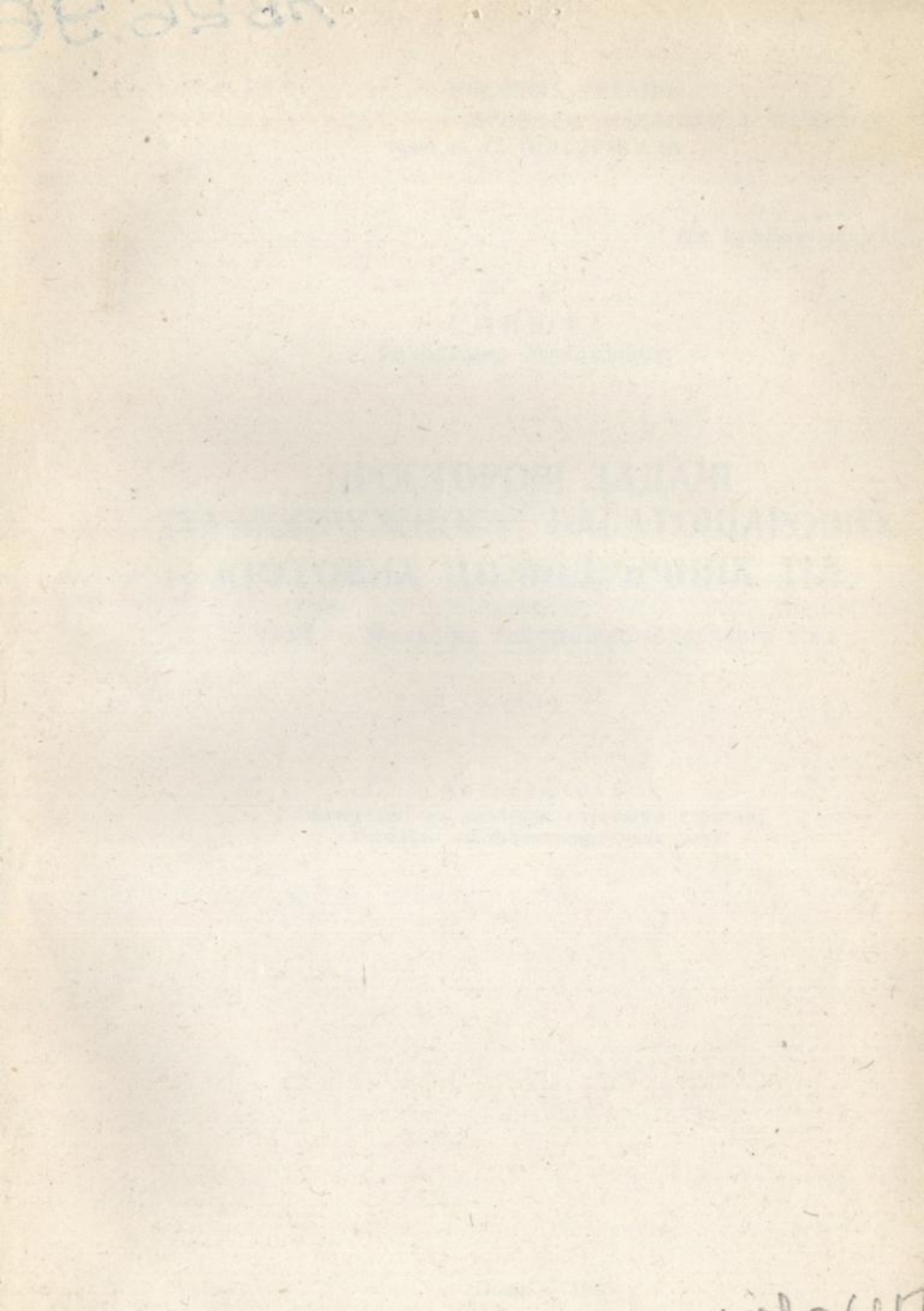
Заказ N 35

Тираж 100 экз.

---

Ротапринт ФТИНТ АН УССР. Харьков-164, пр. Ленина, 47.

1850



1850

AB 26.968