

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

на правах рукопису

АЗІЗОВ ГАМРАТ

ПОБУДОВА, АСИМПТОТИКА І ЗВЕДЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З
ЗАПІЗНЮЮЧИМ АБО ВІДХИЛЮВАНИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

517.95

ЛНБ ім. В. Стефаника



00330792 (0)

Робота виконана на кафедрі "Обчислювальна техніка" Каршинського аграрно-економічного інституту

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Валєєв К.Г.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор Мартинюк Д.І.

- кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Коломієць В.Г.

Провідна організація - СанктПетербурзький університет

Захист дисертації відбудеться "26" Опрелл 1993 р. о _____ год на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.11 у Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м.Київ, проспект акад. Глушкова, 6., механіко-математичний факультет

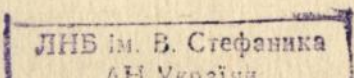
З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці університету, вул. Володимирська, 62

Автореферат розісланий "12" Мярта 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради, доктор фіз.-мат.наук, професор

08

Сушанський В.І.



ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена актуальній темі – теорії диференціальних рівнянь з відхильним або загалювальним аргументом, зокрема, побудові спеціальних рішень, які описуються диференціальними рівняннями без відхилень аргументу, доведенню асимптотичного характеру спеціальних розв'язків і зведенню диференціальних рівнянь з загалювальним аргументом або рівнянь нейтрального типу. Цій темі присвятили свої роботи О.Д.Мишкіс, Л.Е.Ельсгольц, а також багато вітчизняних та зарубіжних вчених: М.В.Абзелєв, Р.Беллман, К.Г.Валєєв, В.І.Зубов, М.С.Колєсов, М.М.Красовський, Д.І.Мартинюк, Ю.О.Митропольський, Ю.І.Неймарк, В.О.Носов, П.С.Панков, Б.П.Разуміхін, В.П.Рубанік, Ю.О.Рябов, А.М.Самоїленко, В.І.Фодчук, Дж.Хейл, С.М.Шиманов і багато інших.

В дисертації досліджується стійкість рішень системи диференціальних рівнянь з загалювальним аргументом, а також системи диференціальних рівнянь нейтрального типу за допомогою попередньої побудови системи звичайних диференціальних рівнянь визначаючих асимптотичні розв'язки.

Знайдені умови достатні для існування і єдності існування спеціальних розв'язків, які вивчали в своїх роботах О.Д.Мишкіса, Ю.О.Рябова, К.Г.Валєєва, П.С.Панкова, В.Г.Уваров, С.М.Шиманов та інші.

В теорії стійкості важливу роль вирішує принцип зведення А.М.Ляпунова, який дозволяє при дослідженні стійкості розв'язків знижувати порядок досліджуваної роботи. Цій темі присвятили свої роботи Є.П.Бєлан, Ю.О.Митропольський, К.Г.Валєєв, Є.І.Діхман, Г.В.Каменков, О.Б.Ликова, І.Г.Малькін, Р.І.Мельніков, А.М.Самоїленко, В.О.Плісс і багато інших. В нашій роботі принцип зведення розповсюджений на системі диференціальних рівнянь з загалювальним аргументом

і системи диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Мета роботи. Знаходження умов існування інтегрального многовиду спеціальних розв'язків, знаходження способів їх побудови для диференціально-різницевих рівнянь, доведення асимптотичного характеру спеціальних розв'язків, розробка принципу зведення для диференціально-різницевих рівнянь.

Методика досліджень. В роботі використані методи функціонального аналізу. Введено банаховий простір $C(\alpha, \beta, \delta)$ функцій обмеженого експоненціального росту при $t \rightarrow \pm \infty$. Для розв'язку операторних рівнянь використовується метод послідовних наближень. Досліджується збіжність метода послідовних наближень і доведені теореми існування та єдності за допомогою теореми про нерухому точку. Розроблено чисельно-аналітичні способи побудови спеціальної системи диференціальних рівнянь з застосуванням ЕОМ.

Наукова новизна. В роботі введено банаховий простір $C(\alpha, \beta, \delta)$ функцій обмеженого експоненціального росту при $t \rightarrow \pm \infty$ вивчено властивості елементів простору і дано оцінку нормам лінійних операторів.

Знайдено умови існування і вказано засоби побудови інтегрального многовиду спеціальних розв'язків для диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Доведено асимптотичний характер інтегрального многовиду спеціальних розв'язків для диференціально-різницевих рівнянь з загалюваннями нейтрального типу.

Сформульовано і доведено принцип зведення для диференціально-різницевих рівнянь з загалювальним аргументом і рівнянь нейтрального типу.

Для лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і постійними загалюваннями аргументу запропоновані чисельно-аналітичні методи побудови спеціальних розв'язків і зведень.

Теоретична і практична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Отримані в ній результати і розвинуті методи можуть бути використані для дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з загалювальним аргументом і рівнянь нейтрального типу.

Апробація роботи. Матеріали дисертації доповідались на наукових конференціях викладачів Каршинського аграрно-економічного інституту в 1981-1992 р.р., на семінарі кафедри вищої математики і обчислювальної техніки Каршинського агро-економічного інституту, семінарі кафедри вищої математики Київського державного економічного університету, на республіканській конференції "Моделирование и исследование устойчивости процессов" в м.Києві в 1992 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 7 роботах, описок яких приведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох глав, розбитих на II параграфів, висновків, списку літератури, додатків, таблиць і програм.

Бібліографія включає 112 найменувань. Загальний об'єм дисертації 159 сторінок.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі подається короткий огляд літератури по розглянутих в дисертації питаннях, приведено обґрунтована актуальність теми. Дається короткий додаток змісту дисертації.

В першій главі розглядаються способи побудови інтегрального многовиду спеціальних розв'язків системи диференціально-різницевих рівнянь.

В § 1.1. вводиться лінійний нормований простір $C(\alpha, \beta, \delta)$ функції $\mathcal{X}(\pm)$ неперервний на всій осі і з нормою, визначеній

по формулі

$$\|x(t)\| = \max\{\alpha; \beta\},$$

$$\alpha = \sup_{t \leq r} |x(t) \exp\{-\alpha(r-t)\}|, \quad \beta = \sup_{t \geq r} |x(t) \exp\{-\beta(t-r)\}|. \quad (1)$$

Доведено леми про норми з різними параметрами α, β, r .

Теорема I.I. Лінійний нормований простір $C(\alpha, \beta, r)$ неперервних функцій $x(t)$ з нормою, визначеною по формулі (1) є повною.

Визначимо оператор S_τ по формулі

$$S_\tau x(t) = x(t+\tau).$$

Доведено, що $\|S_\tau\|_C = e^{\beta\tau}$ ($\tau > 0$), $\|S_\tau\|_C = e^{-\alpha\tau}$ ($\tau < 0$).

Для оператора інтегрування

$$Y_r x(t) = \int_r^t x(s) ds \quad \text{при } \alpha > 0, \beta > 0$$

отримана оцінка $\|Y_r\|_C = \max\{\alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$.

Нехай $X(t)$ - вектор-функція з проєкціями $x_j(t)$ ($j=1, \dots, m$), неперервними на всій осі. Вектор-функція $X(t)$ належить простору $C^m(\alpha, \beta, r)$, якщо при деяких $\delta > 0$ виконується нерівність

$$\|X(t)\| \leq \delta \exp\{\alpha(r-t)\}, \quad (t \leq r),$$

$$\|X(t)\| \leq \delta \exp\{\beta(t-r)\}, \quad (t \geq r).$$

Норму в $C^m(\alpha, \beta, r)$ визначаємо

по формулі

$$\|x(t)\|_c = \max \{a; b\},$$

$$a = \sup_{t \geq \delta} |x(t) \exp\{-\alpha(\delta-t)\}|, \quad b = \sup_{t \geq \delta} |x(t) \exp\{-\beta(t-\delta)\}|. \quad (2)$$

Теорема 1.2. Для того, щоб $x(t) \in C^m(\alpha, \beta, \delta)$, необхідно і достатньо, щоб $x_j(t) \in C(\alpha, \beta, \delta)$ ($j = 1, \dots, m$).

В § 1.2 наведені результати про існування і побудову інтегральних многовидів розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з загалювальним аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N A_k(t) x(t + \tau_k(t)), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

Теорема 1.3. Якщо для системи рівнянь (3) виконані умови для неперервних матриць

$$\|A_k(t)\| \leq \alpha_k \quad (k=1, \dots, N; -\infty < t < \infty) \quad (4)$$

і $-\hbar \leq \tau_k(t) \leq 0$ ($k=1, \dots, N; -\infty < t < \infty$), то при виконанні умови

$$0 \leq \hbar \sum_{k=1}^N \alpha_k < e^{-1}, \quad \alpha \equiv \hbar^{-1},$$

то існує єдиний розв'язок системи (3) $x(t) \in C^m(\alpha, \alpha, 0)$ з заданою початковою умовою $x(0) = X_0$.

Теорема 1.6. Нехай для системи (3) виконані умови (4) і

$$-\hbar_k \leq \tau_k(t) \leq g_k \quad (\hbar_k \geq 0; g_k \geq 0; k=0, 1, \dots, N).$$

Якщо нерівності

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k e^{\alpha \hbar_k} < \alpha,$$

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k e^{\beta \rho_k} < \beta$$

відносно α, β мають додатні розв'язок, то система рівнянь (3) має єдиний розв'язок $X(t) \in C^m(\alpha, \beta, \rho)$, яке задовольняє умові $X(0) = X_0$.

Аналогічні результати доведені для нелінійних систем диференціально-різницевих рівнянь.

В § 1.3. шукаються частні розв'язки системи лінійних і нелінійних різницевих рівнянь в просторі $C^m(\alpha, \beta, \rho)$. Отримані висновки використовуються для побудови частних розв'язків системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Теорема 1.7. Нехай коефіцієнти системи лінійних різницевих рівнянь

$$X(t) = \sum_{k=1}^N A_k(t) X(t + \tau_k(t)) + F(t) \quad (5)$$

виконана умова (4) і $-\rho_k \leq \tau_k(t) \leq 0$ ($k=1, \dots, N; -\infty < t < \infty$).

Якщо $F(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$ і виконано умову

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k e^{\alpha \rho_k} < 1,$$

то система рівнянь (5) має єдиний розв'язок

$X(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$ і цей розв'язок може бути знайдено методом послідовних наближень

$$X_0(t) = F(t), \quad X_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^N A_k X_n(t + \tau_k(t)) + F(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t).$$

Теорема I.9. Нехай коефіцієнти системи рівнянь (5) неперервні і задовольняють умовам (4). Нехай $F(t)$ неперервний на всій осі і $F(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$. Нехай відхилення аргументу $\tau_k(t)$ задовольняють умовам

$$-h_k \leq \tau_k(t) \leq g_k \quad (h_k \geq 0, g_k \geq 0; k=1, \dots, N).$$

Якщо виконуються умови

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k e^{h_k \alpha} < 1, \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{g_k \alpha} < 1, \quad (7)$$

то система рівнянь (5) має єдиний розв'язок

$X(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$, який може бути знайдено методом послідовних наближень (6).

Теорема I.10. Нехай коефіцієнти системи лінійних рівнянь

$$X(t) = F(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) X(t + \tau_k(t)) + \int_0^t \sum_{k=1}^N B_k(s) X(s + \tau_k(s)) ds \quad (8)$$

неперервні на всій осі t і задовольняють умовам

$$\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, \quad \|B_k(t)\| \leq \beta_k \quad (k=1, \dots, N; -\infty < t < \infty). \quad (9)$$

Якщо $F(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$ і відхилення аргументу $\tau_k(t)$ задовольняють умовам

$$-h_k \leq \tau_k(t) \leq g_k \quad (h_k \geq 0, g_k \geq 0; k=1, \dots, N) \quad (10)$$

і при $\alpha > 0, \beta > 0$ виконані нерівності

$$\sum_{k=1}^N (\alpha_k \alpha + \beta_k) e^{\alpha \tau_k} < \alpha, \quad \sum_{k=1}^N (\alpha_k \beta + \beta_k) e^{\beta \tau_k} < \beta, \quad (II)$$

то система рівнянь (8) має єдиний розв'язок $x(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$.
Цей розв'язок може бути знайдено методом послідовних наближень

$$x_0(t) \equiv 0; \quad x_{n+1}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) x_n(t + \tau_k(t)) + \int_0^t \sum_{k=1}^N B_k(t) x_n(s + \tau_k(s)) ds, \quad x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t). \quad (I2)$$

Теорема I.II. Нехай коефіцієнти системи лінійних диференційно-різницевих рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N A_k(t) \frac{dx(t + \tau_k(t))}{dt} + \sum_{k=1}^N B_k(t) x(t + \tau_k(t)) \quad (I3)$$

неперервні і задовольняють умові (9), а відхилення аргументу $\tau_k(t)$ задовольняє умовам (10), якщо при деяких $\beta > 0$, виконані нерівності (II), то система диференціальних рівнянь (I3) має єдиний розв'язок $x(t) \in C^m(\alpha, \beta, 0)$, яке задовольняє умові $x(0) = x_0$, яке може бути знайдено методом послідовних наближень при розв'язку системи рівнянь

$$z(t) = \sum_{k=1}^N A_k(t) z(t + \tau_k(t)) + \sum_{k=1}^N B_k(t) (x_0 + \int_0^{t + \tau_k(t)} z(s) ds),$$

$$z(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}, \quad x(t) = x_0 + \int_0^t z(s) ds.$$

Отримані результати узагальнені для нелінійних диференціально-різницевих рівнянь.

В § 1.4. розглядається лінійні диференціально-різницеві рівняння з постійними коефіцієнтами і постійними відхиленнями аргументу. Будується система лінійних диференціальних рівнянь без відхилень аргументу, яка описує спеціальні розв'язки. Виведені матричні рівняння, які визначають цю систему і знайдено умови збіжності методу послідовних наближень для розв'язку матричних рівнянь.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{k=1}^N A_k \frac{dx(t+\tau_k)}{dt} + \sum_{k=1}^N B_k x(t+\tau_k) \quad (14)$$

і шукається інтегральний многовид розв'язків системи (14), які є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C x(t) \quad (15)$$

При цьому матриця C в розв'язком рівняння

$$C = B_0 + \sum_{k=1}^N (A_k C + B_k) \cdot \exp\{C \tau_k\}. \quad (16)$$

Теорема 1.13. Якщо існує додатній розв'язок нерівності

$$\|B_0\| + \sum_{k=1}^N (\|A_k\| \alpha + \|B_k\|) e^{\alpha |\tau_k|} < \alpha, \quad (17)$$

то існує система рівнянь (15) і матриця C може бути знайдена

при цьому збіжним методом послідовних наближень

$$c_0 = 0, \quad c_{n+1} = B_0 + \sum_{k=1}^N (A_k c_n + B_k) \exp\{c_n \tau_k\}, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

В § 1.5 досліджуються лінійні диференціально-різницеві рівняння з змінними коефіцієнтами і змінними відхиленнями аргументу.

Теорема 1.17. Якщо для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t)x(t - \tau_k(t)) \quad (18)$$

виконується нерівність

$$h \sum_{k=1}^N \alpha_k \leq \exp\{-1 - h\alpha_0\}, \quad (19)$$

де позначено

$$\alpha_k = \sup_t \|A_k(t)\| \quad (k=0, 1, \dots, N);$$

$$h = \max_k \left\{ \sup_t |\tau_k(t)| \right\} \quad (-\infty < t < \infty),$$

то існує сім'я спеціальних розв'язків системи (18), які є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x(t), \quad (20)$$

де матриця $B(t)$ є границею рівномірно збіжної послідовності матриць $B_n(t)$. де

$$B_{n+1}(t) = A_0(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) N_n(t + \tau_k(t), t); \quad B_0(t) \equiv 0,$$

$$N_n(s, t) = E + \int_t^s B_n(u) N_n(u, t) du, \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Теорема I.18. Нехай для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) \frac{dx(t + \tau_k(t))}{dt} + \sum_{k=1}^N B_k(t)x(t + \tau_k(t)) \quad (21)$$

виконана нерівність

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \beta e^{\beta R_k} + \sum_{k=1}^N \beta_k e^{\beta R_k} < \beta,$$

де $\alpha_k = \sup_t \|A_k(t)\|$, $\beta_k = \sup_t \|B_k(t)\|$ ($k=0, 1, \dots, N$).

При цьому існує система лінійних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) \quad (22)$$

всі розв'язки якої є розв'язками системи (21), а матриця

$C(t)$ є границею рівномірно збіжної послідовності матриць

$C_n(t)$, де

$$C_0(t) \equiv 0, \quad C_{n+1}(t) = B_0(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) C_n(t + \tau_k(t)) N_n(t + \tau_k(t), t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N B_k(t) N_n(t + \tau_k(t), t), \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$N_n(s, t) = E + \int_t^s a_n(u) N_n(u, t) du.$$

У другій главі здійснюється дослідження асимптотики розв'язків системи диференціально-різницевої рівнянь з загаловальним аргументом.

В § 2.1 розглядається система лінійних диференціальних рівнянь з загаловальним аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t) X(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) X(t - \tau_k(t)), \quad (23)$$

де виконані умови

$$\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, \quad 0 \leq \tau_k \leq h_k \quad (k=1, \dots, N; -\infty < t < \infty). \quad (24)$$

Теорема 2.1. Якщо для системи (23) з неперервними коефіцієнтами і загалованнями аргументу виконані умови (24) і при деякому $\alpha > 0$

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{h_k \alpha} < \alpha,$$

то існує система рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t) X(t) \quad (25)$$

всі розв'язки якої є розв'язком системи (23) і для кожного розв'язку $X = X_0(t)$ системи (23) існує певний розв'язок $X = X_1(t)$ системи (25) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X_0(t) - X_1(t)\| = 0. \quad (26)$$

Теорема 2.2. Нехай виконана умова теореми 2.1. Для того, щоб був стійкий нульовий розв'язок системи (23), необхідно і достатньо, щоб був стійкий нульовий розв'язок системи (25).

В § 2.2 вивчається система лінійних диференціальних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^N A_k(t) \frac{dx(t+\tau_k(t))}{dt} + \sum_{k=1}^N B_k(t)x(t-\tau_k(t)) \quad (27)$$

для якої при виконанні нерівності

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{h_k \alpha} + \sum_{k=1}^N \beta_k e^{h_k \alpha} < \alpha, \quad (28)$$

де при $-\infty < t < \infty$, $k=0, 1, \dots, N$ виконані умови

$$\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, \quad \|B_k(t)\| \leq \beta_k, \quad 0 \leq \tau_k \leq h_k$$

існує спеціальна система лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(t)x(t), \quad \|c(t)\| \leq \alpha \quad (29)$$

всі розв'язки якої є розв'язками системи (27).

Теорема 2.3. Нехай для системи рівнянь (27) виконується умова (28). Тоді для кожного розв'язку $X = X_0(t)$ системи (27) існує розв'язок системи (29) $X = X_1(t)$, таке, що виконано співвідношення (26) і виконана оцінка виду

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq \nu(r) r^{-1} e^{-rt} \sup_{-h \leq t < 0} \left\| \frac{dx_0(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right\|, (r > 0).$$

В § 2.3 пропонується метод дослідження стійкості розв'язків систем виду (23), (27) за допомогою функції Ляпунова, яка буде для спеціальних систем без загаввального аргументу (25), (29).

У третій главі розроблюється додаток принципу зведення для дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь загаввальним аргументом.

В § 3.1 розглядається система лінійних диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \mu \sum_{k=1}^N (A_k x(t+\tau_k) + B_k y(t+\tau_k)); \quad (30)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = By(t) + \mu \sum_{k=1}^N (C_k x(t+\tau_k) + D_k y(t+\tau_k))$$

з постійними коефіцієнтами і постійними відхиленнями аргументу. Шукається інтегральний многовид розв'язків системи (30) виду

$$y(t) = \kappa(\mu) x(t), \quad \frac{dx(t)}{dt} = H(\mu) x(t). \quad (31)$$

Пропонуємо, що при $\mu \neq 0$ для системи рівнянь виконані оцінки

$$\|e^{Bs}\| \leq c_1 e^{-\lambda s}, \quad \|e^{-As}\| \leq c_2 e^{\epsilon s}, \quad (\lambda > \epsilon, s \geq 0). \quad (32)$$

Теорема 3.1. Якщо для системи (30) виконані оцінки (32), то при $|\mu| < \mu_0$, де позначимо

$$\mu_0 = \frac{2(\sqrt{h^2 + \nu g^2} + h)}{P(\sqrt{h^2 + \nu g^2} + h + 2g)^2} \exp\left\{-h\alpha_0 - \frac{2h}{\sqrt{h^2 + \nu g^2} + h + 2g}\right\};$$

$$\alpha_0 = \|A\|, \quad h = \max_k |\tau_k|, \quad \alpha = \sum_{k=1}^N \|A_k\|, \quad \beta = \sum_{k=1}^N \|B_k\|,$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^N \|C_k\|, \quad \delta = \sum_{k=1}^N \|D_k\|, \quad \rho = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \quad g = \frac{c_1 c_2}{\lambda - \varepsilon},$$

то для системи (30) існує інтегральний многовид розв'язків, визначений системою рівнянь (31). При цьому матриця $K(\mu)$, $H(\mu)$ аналітичні залежать від μ при $|\mu| < \mu_0$.

Теорема 3.2. Нехай виконані умови теореми 3.1 для системи (30) з загальним аргументом при $-h \leq \tau_k \leq 0$. При цьому стійкість нульового розв'язку системи (30) рівносильна стійкості нульового розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (31).

В § 3.2 вивчається система лінійних диференціальних рівнянь з загальним аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \mu \sum_{k=1}^N (A_k(t)x(t - \tau_k(t)) + B_k(t)y(t - \tau_k(t))), \quad (33)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = B(t)y(t) + \mu \sum_{k=1}^N (C_k(t)x(t - \tau_k(t)) + D_k(t)y(t - \tau_k(t))).$$

Припускається, що для неперервних матриць $A_k(t), B_k(t), C_k(t), D_k(t)$ при $t \in (-\infty; \infty)$ виконані умови

$$\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, \|B_k(t)\| \leq \beta_k, \|C_k(t)\| \leq \delta_k, \|D_k(t)\| \leq \delta_k \quad (k=1, \dots, N), \quad (34)$$

а загалвання аргументу неперервні і задовольняють умовам

$$0 \leq \tau_k(t) \leq h_k, \quad h_k = \max_k \{h_k\}, \quad (k=1, \dots, N). \quad (35)$$

Припускаємо також, що фундаментальні матриці розв'язків $P(t, \tau)$ $N(t, \tau)$ систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = B(t)y(t)$$

задовольняють наступним умовам

$$\|P(t, \tau)\| \leq c_2 e^{\varepsilon(t-\tau)}, \quad \|N(t, \tau)\| \leq c_1 e^{-\lambda(t-\tau)} \quad (\lambda > 0, \varepsilon > 0). \quad (36)$$

При цьому знайдено достатні умови існування спеціальних розв'язків із яких випливає, що при достатньо малих значеннях

$|\mu| > 0$ система рівнянь (32) має інтегральний многовид розв'язків, визначаючий системою рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t, \mu)x(t), \quad y(t) = K(t, \mu)x(t) \quad (37)$$

Знайдені рівняння для визначення матриць $C(t, \mu), K(t, \mu)$ і досліджена збіжність методу послідовних наближень, яка визначає матриці $C(t, \mu), K(t, \mu)$.

При цьому доведено, що будь-який розв'язок системи (37) експоненціально притягується до інтегрального многовиду (33), і стійкість нульового розв'язку системи (33) рівносильна стійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь (37).

В § 3.3 розглядається система диференціальних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \mu \sum_{k=1}^N (A_k(t)x(t-\tau_k(t)) + B_k(t)y(t-\tau_k(t)) + G_k(t) \frac{dx(t-\tau_k(t))}{dt}); \quad (38)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = B(t)y(t) + \mu \sum_{k=1}^N (C_k(t)x(t-\tau_k(t)) + D_k(t)y(t-\tau_k(t))).$$

Припустимо, що виконані умови (33)-(36), а також

$$\|G_k(t)\| \leq \mu_k \quad (k=1, \dots, N; \quad t \in (-\infty, \infty)).$$

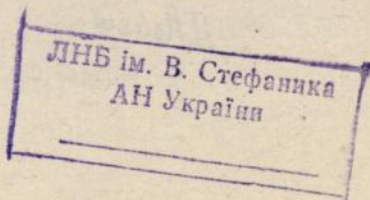
В роботі знайдені достатні умови існування спеціальних розв'язків, із яких виходить, що при достатньо малих значеннях

$|\mu| \geq 0$ система рівнянь (38) має інтегральний многовид розв'язків, який визначається системою рівнянь виду (37).

При цьому стійкість нульового розв'язку системи (38) рівносильно стійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь виду (37).

В додатках розглянуто чисельні приклади побудови інтегральних многовидів спеціальних розв'язків, досліджується збіжність методів послідовних наближень і досліджується стійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь, наводяться графіки і таблиці, а також програма на мові **GWBASIC**.

Основні результати дисертаційної роботи відображені в 7 публікаціях.

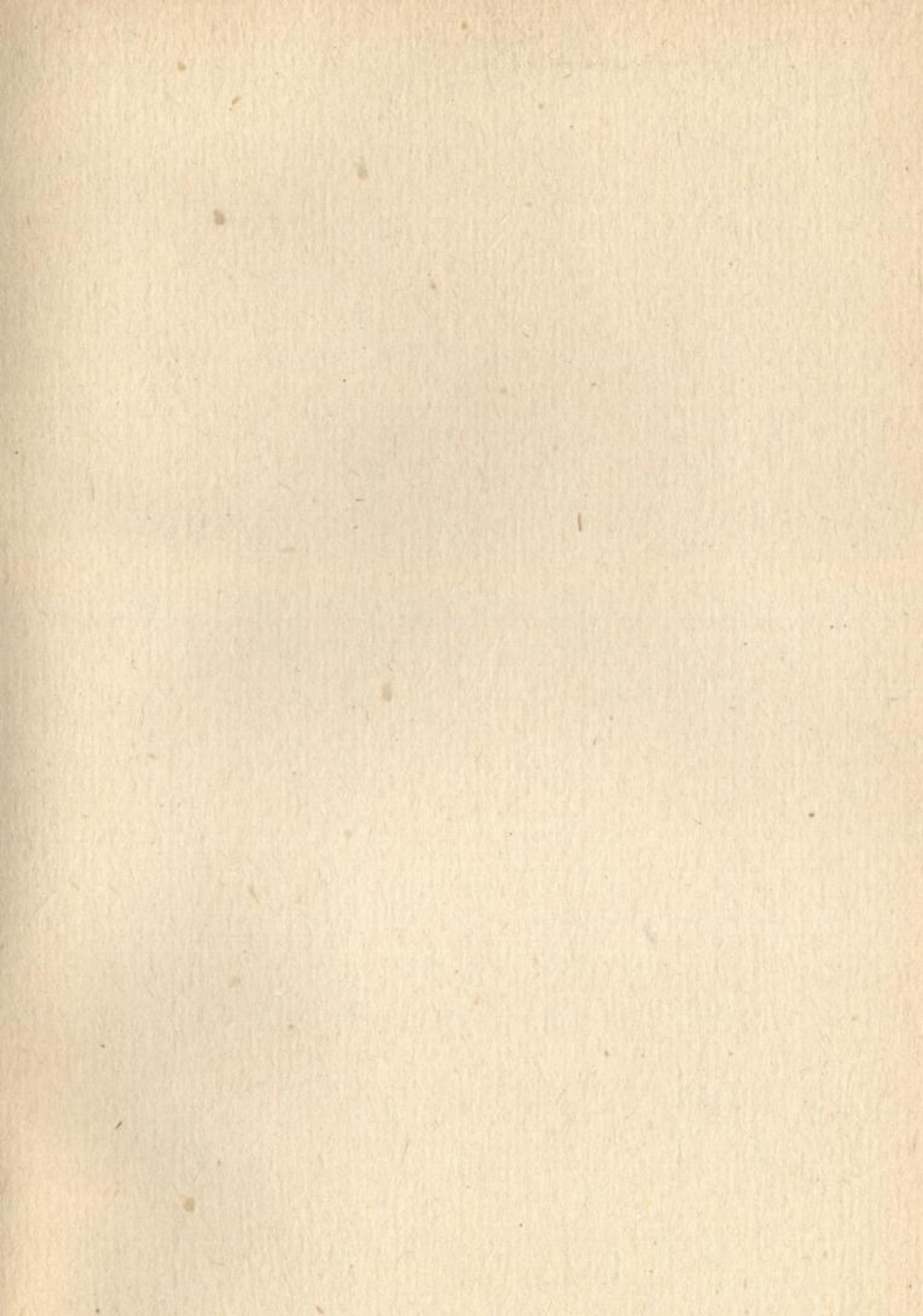


Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Валеев К.Г., Азизов Г. Построение асимптотического интегрального многообразия решений системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук. 1986. - № 5. - С.5-9.
2. Валеев К.Г., Азизов Г. Об асимптотическом характере специальных решений системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук, 1987 - № 6. - С.9-13.
3. Азизов Г., Валеев К.Г. Принцип сведения для дифференциально-разностных уравнений. Деп. в УкрНИИТИ, 01.04.92, № 409-Ук 92.
4. Валеев К.Г., Азизов Г. Построение интегрального многообразия решений системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Деп. в УкрНИИТИ, 21.03.91., № 352 - Ук 91.
5. Азизов Г. Численный способ построения интегрального многообразия решений системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Деп. в УкрНИИТИ, 01.04.92, № 411-Ук92.
6. Азизов Г. Построение решений экспоненциального роста системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Деп. в УкрНИИТИ, 01.04.92., № 410- Ук 92.
7. Азизов Г. Построение асимптотического интегрального многообразия решений системы линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Тезисы докладов конференции "Моделирование и исследование устойчивости процессов" Ч.1. Киев, 1992, - стр. 4-5.

Г. Азизов

УБВНТЗ, 1993, зам. 152, тир. 120



AB 27.062