Київський університет ім.Тараса Шевченка

На правах рукопису

Култаєв Турсунпулат

УДК 517.9

Факторизація та дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціальних та різницевих рівнянь

01.01.02 - Диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних
наук

Київ - 1993

Робота виконана на кафедрі вищої математики Київського інституту народного господарства ім.Д.С.Коротченка.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор ВАЛЄЄВ К.Г.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор СТРИЖАК Т.Г.
- кандидат фізико-математичних наук, доцент БУРИМ В.М.

Провідна організація - Санкт-Петербургський університет.

Захист відбудеться "26" апреля 1993 року о _______ год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.11 в Київському університеті імені Тараса Шевченка в ауд.__________. / 252127, проспект Глушкова, 6, механіко-математичний факультет/.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розіслано "12" марта 1993 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат.наук Сущанський В.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена актуальній задачі теорії лінійних диференціальних рівнянь - задачі про факторизації лінійних диференціальних та різницевих рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Метод факторизації є одним з ефективних методів дослідження лінійних диференціальних та різницевих рівнянь. Основи теорії методу факторизації були закладені в працях Г.Фробеніуса. Важливу роль в розвитку методу факторизації відіграли праці Д.Пойа, Н.Вейля, Г.Маммана, Е.Шредінгера.

В подальшому метод факторизації знайшов свій розвиток в дослідженнях А.А.Айзековича, Л.М.Берковича, К.Г.Валєєва, А.Зетте, А.Ю.Левіна, А.Л.Тептіна, Ф.Розатті, Р.Рістрофа, В.Я.Скоробагатько та інших авторів.

Дана робота присвячена питанням розщеплення системи лінійних диференціальних рівнянь на незалежні підсистеми, дослідженню збіжності рядів, що визначають розклад диференціального оператора на лінійні множники, а також дослідженню стійкості розв'язків систем диференціальних та різницевих рівнянь шляхом побудови інтегральних многовидів. Цій тематиці присвятили свої праці Р.Беллман, М.М.Боголюбов, Ю.О.Митропольський, О.Б.Ликова, А.М.Самойленко, М.О.Перестюк, І.Я.Штаерман та інші.

Мета роботи: I. Встановлення умов можливості розкладу лінійного диференціального або різницевого оператора n-го порядку на множники. 2. Побудова алгоритму розщеплення системи лінійних диференціальних та різницевих рівнянь на незалежні підсистеми.

Методи дослідження. Основним методом розв'язання поставлених задач є метод факторизації, який грунтується на побудові інтегральних многовидів розв'язків.

Наукова новизна. В роботі одержані такі нові результати:

I. Знайдені необхідні та достатні умови існування розкладу лінійного диференціального оператора n-го порядку.

2. Побудований і обгрунтований алгоритм розщеплення систем лінійних диференціальних та різницевих рівнянь на незалежні підсистеми.

3. Одержані достатні умови існування лінійної заміни, яка здійснює розщеплення і яка використовується для знаходження частинних розв'язків і для дослідження стійкості розв'язків в критичному випадку одного нульового кореня.

4. Досліджена збіжність рядів, які визначають розклад диференціальних операторів зі змінними коефіцієнтами на лінійні множники.

Практична цінність. Результати даної роботи свідчать про ефективність застосування методу факторизації до дослідження лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Вони можуть бути застосовані до розв'язування та дослідження стійкості прикладних задач, які зводяться до лінійних диференціальних або різницевих рівнянь n-го порядку або до систем таких рівнянь.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на Всесоюзній конференції з теорії та застосувань функціональних рівнянь (м.Душанбе, 1987 р.), на II школі-семінарі "Диференціальні перетворення та їх застосування" (м.Житомир, 1987 р.), на республіканських наукових конференціях "Моделювання та дослідження стійкості фізичних процесів" (м.Київ, 1990, 1991, 1992 рр.), на науковому семінарі кафедри вищої математики Київського економічного університету (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Валеєв К.Г.), на семінарі з теорії диференціальних рівнянь при Київському університеті (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Перестюк М.О.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в працях [1 - 11] .

Об'єм та структура роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, двох розділів, списка використаної літератури, який налічує 83 найменувань. Загальний об'єм роботи складає 138 сторінок машинописного тексту.

Зміст роботи. У вступі обгрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, наведен короткий огляд досліджень, які мають безпосереднє відношення до теми дисертації, приведено анотацію одержаних результатів.

В роботі дотримано такого порядку нумерації: перша цифра означає номер глави, друга - номер параграфа, третя - номер теореми, леми або формули.

Перший розділ дисертаційної роботи складається з трьох параграфів і присвячений дослідженню розкладу лінійного диференціального оператора на множники. Одержані необхідні та достатні умови існування такого розкладу. Далі розклад диференціального оператора на множники застосовано до інтегрування диференціального рівняння і дослідження стійкості його розв'язків.

В § І.І вводиться означення деякого класу функцій S і розглядається лінійне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$y'' - (p-q)y' + pqy + \mu a(t)y' + \mu b(t)y = 0, \tag{I}$$

де $a(t), b(t) \in S$, p, q - різні комплексні числа, $Re(q-p)>0$, μ - малий комплексний параметр.

Доведено теореми.

Теорема І.І.І. Нехай в рівнянні (І) $Re(q-p)>0$. Якщо виконана умова

$$2 \sup_t |\mu a(t)|(Re(q-p)+2|q|)+4\sup_t|\mu b(t)| \le [Re(q-p)]^2,$$

то послідовність функцій $\beta_n(t,\mu)$, котра визначається системою рівнянь

$$\beta_0(t,\mu)\equiv 0,\quad \beta_{n+1}(t,\mu)=-\int_{-\infty}^{t} e^{-(p-q)(t-\tau)}[b(\tau)+qa(\tau)+\mu a(\tau)\beta_n(\tau,\mu)+$$

$$+\mu\beta^2(t,\tau)]d\tau, \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

рівномірно збігається на всій осі.

$\alpha(t,\mu), \beta(t,\mu)$ - невідомі функції, які підлягають визначенню.

Теорема І.І.2. Якщо в рівнянні (І) $Re(q-p)>0$, і виконана умова

$$M_n = \sup_t|\beta_n(t,\mu)|, \quad -\infty<t<\infty, \quad M_n \le M,$$

- 2-У-30

то рівняння розщеплення

$$\frac{d\beta(t,\mu)}{dt} + (q-p)\,\beta(t,\mu) = -b(t) - q\,a(t) - \mu a(t)\beta(t,\mu) - \mu\beta^2(t,\mu) \quad (2)$$

має обмежений на всій осі розв'язок $\beta(t,\mu)$, аналітичний відносно μ в крузі:

$$|\mu| \le \frac{[\operatorname{Re}(q-p)]^2}{A\operatorname{Re}(q-p) + 2B + 2|q|A^2},$$

де $A = \sup_t |a(t)|, \quad B = \sup_t |b(t)|, \quad -\infty < t < \infty.$

Параграф I.2 містить доведення достатніх умов можливості розкладу лінійного оператора на множники. Цей розклад використовується до інтегрування лінійного диференціального рівняння, відокремлення критичних змінних при дослідженні стійкості розв'язків.

Розглядається диференціальний оператор

$$L(t,\mathcal{D},\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_{k0} + \mu\alpha_k(t,\mu)]\mathcal{D}^k, \quad \mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt} \qquad (3)$$

зі сталими коефіцієнтами a_{k0}, $a_{m0} \ne 0$, $\alpha_k(t,\mu)$ – кусково-неперервні функції t, які є сумами степеневих рядів:

$$\alpha_k(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{ks}(t)\mu^s, \quad (k=\overline{0,m}), \quad \alpha_{ks}(t) \in S.$$

Доведена теорема, яка обгрунтовує достатні та необхідні умови можливості розкладу оператора на множники.

<u>Теорема I.2.I</u>. Нехай будь-який розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$L_2(t,\mathcal{D})y = 0, \qquad L_2(t,\mathcal{D}) = \mathcal{D}^q + \sum_{k=0}^{q-1} C_k(t)\mathcal{D}^k$$

задовольняє також рівняння

$$L(t,\mathcal{D})y=0,\quad L(t,\mathcal{D})\equiv\mathcal{D}^m+\sum_{k=0}^{m-1}a_k(t)\mathcal{D}^k,\quad (m-q=p,\ q<m).$$

Тоді буде мати місце розклад

$$L(t,\mathcal{D})=L_1(t,\mathcal{D})\cdot L_2(t,\mathcal{D}),\quad L_1(t,\mathcal{D})=\mathcal{D}^p+\sum_{k=0}^{p-1}b_k(t)\mathcal{D}^k.$$

В § I.3 розроблено метод розкладу лінійного диференціального оператора на множники, який застосовано до відщеплення одного частинного розв'язку, асимптотична поведінка якого визначає стійкість розв'язків даного диференціального рівняння.

Розглядається лінійне квазістаціонарне диференціальне рівняння

$$L_0(\mathcal{D})y+\mu L_1(t,\mathcal{D})y=0, \tag{3}$$

$L_0(\mathcal{D})$ – диференціальний оператор n-го порядку

$$L_0(\mathcal{D})=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathcal{D}^k,\quad L_0(0)\neq 0,$$

μ – малий комплексний параметр, $L_1(t,\mathcal{D})$ – нестаціонарний диференціальний оператор

$$L_1(t,\mathcal{D})=\sum_{k=0}^{n}b_k\mathcal{D}^k,$$

$b_k(t)$ – кусково-неперервні, обмежені на всій осі функції.

Мають місце такі теореми.

<u>Теорема I.3.I</u>. Якщо коефіцієнти $b_k(t)$, $(k=\overline{0,n})$ є періодичними функціями із спільним періодом T, то обмежений на всій осі розв'язок рівняння розщеплення

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\beta^{(k-1)}+b_0(t)+\mu R(t,\beta,\beta',\ldots,\beta^{(n-1)},\mu)=0 \tag{4}$$

при $|\mu|<\mu_1$ буде періодичною функцією періода T.

2*

<u>Теорема I.3.2</u>. Якщо коефіцієнтами $b_k(t)$, $(k=\overline{0,n})$ в рівнянні (3) є обмежені на всій осі функції з класу C_s $(s\geq 0)$, то обмежений на всій осі розв'язок рівняння розщеплення (4) при $|C|<C_1$ буде обмеженою на всій осі функцією з класу C_s.

<u>Зауваження I.3.I</u>. C_s -клас неперервних функцій, які мають неперервні похідні до порядку s включно.

<u>Розділ II</u> присвячений розщепленню систем лінійних диференціальних та різницевих рівнянь на незалежні підсистеми. Одержано достатні умови існування лінійної заміни змінних, яка здійснює таке розщеплення. Побудований та обгрунтований алгоритм розщеплення. Розщеплення системи диференціальних рівнянь на підсистеми використовується для відшукання частинних розв'язків та для дослідження стійкості розв'язків системи диференціальних рівнянь.

В § 2.I розглядається система лінійних диференціальних рівнянь, умовно розкладена на дві підсистеми

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+B(t)Y, \quad \frac{dY}{dt}=C(t)X+\mathfrak{D}(t)Y, \tag{5}$$

де $A(t), B(t), C(t), \mathfrak{D}(t)$ - кусково-неперервні обмежені на всій осі t або півосі $t\geq 0$ матриці.

Припускаємо, що матриця $A(t)$ розміру $q\times q$, а матриця $\mathfrak{D}(t)$ має розмір $p\times p$, $q+p=m$.

Для рівняння (5) доведена теорема.

<u>Теорема 2.I.I</u>. Нехай $K=K(t)$ довільний розв'язок матричного рівняння розщеплення

$$\frac{dK(t)}{dt}=C(t)+\mathfrak{D}(t)K(t)-K(t)A(t)-K(t)B(t)K(t). \tag{6}$$

Тоді система рівнянь (5) має інтегральний многовид, який визначається системою рівнянь

$$Y=K(t)X, \tag{7}$$

де $K(t)$ - матриця розміру $p\times q$.

<u>Теорема 2.I.2</u>. Нехай матричне квадратне диференціальне рів-

няння (6)має обмежений на всій осі (півосі) розв'язок (7) і нехай при цьому фундаментальні матриці розв'язків $N(t,\tau)$ і $G(t,\tau)$ систем лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dU}{dt} = (A(t) + B(t)K(t))U(t),$$
$$\frac{dV}{dt} = (D(t) - K(t)B(t))V(t), \tag{8}$$

задовольняють умову дихотомічності

$$\int_{-\infty}^{\tau} \|N(t,\tau)\| \cdot \|G(t,\tau)\| dt \leq \theta = const.$$

Тоді існує заміна розщеплення

$$U = X - L(t)V, \quad V = V,$$

яка перетворює систему (5) в систему (8).

В § 2.2 знайдено умови існування лінійної заміни змінних, яка здійснює розщеплення системи лінійних диференціальних рівнянь на дві незалежні підсистеми.

Побудова заміни зводиться до розв'язання матричних інтегральних рівнянь, до яких застосовано метод послідовних наближень.

В § 2.3 вказаний і обгрунтований алгоритм побудови інтегрального многовиду розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Цей алгоритм дозволяє в деяких випадках спростити дослідження стійкості розв'язків системи лінійних диференційних рівнянь.

Розглядається система лінійних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k Y(t)}{dt^k} = 0, \tag{9}$$

де $A_k(t), (k=\overline{0,n})$ матриці неперервні і обмежені при $-\infty < t < \infty$.
Припускаємо, що система лінійних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t) \frac{d Y^{k-1}(t)}{dt^{k-1}} = \Phi(t)$$

має частинний розв'язок вигляду

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau,$$

де матриця Гріна $G(t,\tau)$ задовольняє нерівність:

$$\| G(t,\tau) \| \leq C e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad C = const.$$

Поклавши в системі лінійних рівнянь (9)

$$\frac{d Y(t)}{dt} = z(t), \qquad \Phi(t) = A_0(t) Y(t),$$

дістанемо

$$\frac{d Y(t)}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) A_0(\tau) Y(\tau)\, d\tau. \tag{I0}$$

Шукаємо інтегральний многовид розв'язків системи рівнянь (9), який визначається системою рівнянь першого порядку

$$\frac{d Y(t)}{dt} = B(t) Y(t), \tag{II}$$

будь-який розв'язок цієї системи є водночас і розв'язком системи інтегро-диференціальних рівнянь (I0).

Для рівняння (9) доведена справедливість принципа зведення, який сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 2.3.I. Нехай нульовий розв'язок системи

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t) \frac{d^{k-1} z(t)}{dt^{k-1}} = 0 \tag{I2}$$

експоненціально асимптотично стійкий. Якщо нерівність

$$\Psi(\beta)<\beta, \quad \Psi(\beta)\equiv \int_{-\infty}^{t} \|G(t,\tau)\|\,\|A_0(\tau)\|\,e^{\beta(\tau-t)}\,d\tau, \tag{13}$$

$$\beta=\sup_t \|B(t)\|$$

має додатній розв'язок, то стійкість нульового розв'язку (9) рівносильна стійкості нульового розв'язку системи (11).

З теореми 2.3.1 випливає можливість спрощення дослідження стійкості розв'язків системи рівнянь (9). Для цього будується попередньо система рівнянь (11), порядок якої нижчий ніж порядок системи (9), а далі досліджується стійкість нульового розв'язку системи (11).

Параграф 2.4 присвячений системі лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt}=AY+\mu\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k}B_k(t)Y, \tag{14}$$

де елементами $B_k(t)$, $(k=0,1,2,3,\ldots)$ є функції деякого класу S [8].

Припускаємо, що матричний ряд в системі (14) збігається абсолютно і рівномірно при $|\mu|<\mu_0$.

Розглянемо породжуючу систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dY}{dt}=AY. \tag{15}$$

Припустимо, що характеристичне рівняння

$$f(z)\equiv \det[Ez-A] \tag{16}$$

має простий корінь $z=z_0$, а дійсні частини інших коренів рівняння (16) відмінні від $\operatorname{Re} z_0$.

Мають місце такі теореми.

<u>Теорема 2.4.1</u>. Нехай всі корені $z_1, z_2, \ldots, z_m$ характеристичного рівняння (16) породжуючої системи при $\mu=0$ мають різні дійсні частини. Якщо матриця $B(t,\mu)$ в системі (14) належить класу S, та при досить малих $|\mu|$ загальний розв'язок системи (14) може бути представлений у вигляді

$$y = C(t,\mu)\exp\left\{\int_0^t H(t,\mu)dt\right\}C, \quad C = const,$$

де матриці $C(t,\mu)$, $H(t,\mu)$ належать класу S, причому $H(t,\mu)$ – діагональна матриця.

Теорема 2.4.2. Нехай всі корені $z_1, z_2, \ldots, z_m$ характеристичного рівняння (I6) породжуючої системи при $\mu = 0$ мають різні дійсні частини. Якщо матриця в системі (I4) розкладається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд

$$B(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_k(t),$$

де елементи матриць $B_k(t)$ – майже періодичні функції, то фундаментальна матриця $N(t,\mu)$ системи (I4) представляється у вигляді

$$N(t,\mu) = C(t,\mu)\left\{\int_0^t H(t,\mu)dt\right\}.$$

Тут матриці $C(t,\mu)$, $H(t,\mu)$ розкладаються при досить малих $|\mu|$ в степеневі ряди

$$C(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k C_k(t), \qquad H(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H(t),$$

в яких елементи $C_k(t)$, $H_k(t)$ – майже періодичні функції.

З теорем 2.4.I та 2.4.2 випливає при вказаних умовах відшукання частинного розв'язку – можна звести до інтегрування рівняння першого порядку, що приводить до інтегрування функцій класу S.

В § 2.5 методи, запропоновані в попередніх параграфах, застосовуються до різницевих операторів.

Одержано необхідні та достатні умови розкладу лінійних різницевих операторів зі змінними коефіцієнтами на операторні множники.

В основу такого розкладу покладено існування спеціального многовиду системи різницевих рівнянь.

Зокрема, одержано теорему.

Теорема 2.5.I. Для того, щоб лінійний різницевий оператор

$$L(t,T)y(t)=0, \qquad L(t,T)=T^m+\sum_{k=0}^{m-1} a_k(t)T^k \tag{I7}$$

можна було розкласти на множники вигляду

$$L(t,T)=L_1(t,T)\cdot L_2(t,T),$$

$$L_1(t,T)\equiv T^p+\sum_{k=0}^{p-1} b_k(t)T^k, \quad L_2(t,T)\equiv T^q+\sum_{k=0}^{q-1} C_k(t)T^k$$

$$(p\geq 1,\ q\geq 1,\ m=p+q),\ C_0(t)\neq 0,\ b_k(t)\neq 0$$

необхідно і достатньо, щоб всі розв'язки різницевого рівняння

$$L_2(t,T)y(t)=0$$

були також розв'язками даного рівняння (I7); тут функції $a_k(t), b_k(t)$ – неперервні і визначені на всій осі t .

Зазначимо, що завдяки своїй ефективності метод факторизації знаходить використання в теорії і застосуваннях диференціальних та різницевих рівнянь і залишається об'єктом дослідження багатьох вчених.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Валеєву К.Г. за велику увагу до даної роботи.

Публікації з теми дисертації

I. Валеев К.Г., Култаев Т. Разложение дифференциального уравнения второго порядка на множители. - Киев, I984. - II с. - Деп. в Укр.НИИНТИ.2I.08.84, № I486-Ук 84.
2. Валеев К.Г., Култаев Т. Разложение дифференциального оператора на множители. - Киев, I984. - 3I с. - Деп.в Укр.НИИНТИ. 2I.I2.84, № 2147 - УК 84.

3. Валеев К.Г., Култаев Т. Исследование устойчивости решений линейного квазистационарного дифференциального уравнения в случае одного нулевого корня. - Киев, 1985. - I6 с. - Деп.в Укр.НИИНТИ.2I.08.85, № 82 - Ук 85.
4. Валеев К.Г., Култаев Т. Численно-аналитические методы устойчивости решений линейного дифференциального уравнения периодическими коэффициентами в случае одного нулевого характеристического показателя. - Киев, 1985. - I6 с. - Деп. в Укр. НИИНТИ.I3.06.1985, № I282 - Ук 85.
5. Валеев К.Г., Култаев Т. Достаточные условия существования расщепляющей замены для системы линейных дифференциальных уравнений. - Изв.АН УзССР, сер.физ.-мат.наук. - 1986, № 2.- С. I3-I5.
6. Валеев К.Г., Култаев Т. Об одном алгоритме расщепления системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. - Киев, 1986. - I5 с. - Деп.в Укр.НИИНТИ.I9.04. 1986, № II09 - Ук 86.
7. Валеев К.Г., Култаев Т. О построении и свойствах линейных интегральных многообразий системы линейных дифференциальных уравнений. - Киев, 1984. - 23 с. - Деп.в Укр.НИИНТИ.2I.I2. 1984, № 2149 - Ук 84.
8. Култаев Т. О построении частных решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Укр.мат.журн. - 1987. - 39, № 4. - С. 523-526.
9. Култаев Т. Разложение линейного дифференциального уравнения второго порядка на множители в случае периодических или почти периодических коэффициентов. - Киев,1985. - I0 с. - Деп. в Укр.НИИНТИ.30.05.1985, № II69 - Ук 85.
I0. Валеев К.I.,Култаев Т. Исследование устойчивости решений линейного дифференциального уравнения в критических случаях // Тез.докл.науч.школы-семинара "Моделирование и исследование устойчивости физических процессов". - Киев, 1990. - С.I0.
II. Валеев К.Г., Култаев Т. Численно-аналитические исследования устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Тез.докл.науч.школы-семинара "Моделирование и исследование устойчивости физических процессов". - Киев,1991. - I0 с.

Підп. до друку 03. 03. 93 . Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Папір друк. № 3 , Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,70 .
Умовн. фарбо-відб. 0,93 . Обл.-вид. арк. 1,0 .
Тираж 100 . Зам. № У-30 . Безплатно.

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

Бесплатно