КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЕНДЖИРГЛИ МАРИНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 519.21

УМОВИ ТА ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ СТОХАСТИЧНИХ РЯДІВ ТА ІНТЕГРАЛІВ ІЗ ПРОСТОРІВ $\overline{\mathrm{Sub}}_{\varphi}(\Omega)$

01.01.05 - теорія імовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана на кафедрі теорії імовірностей та математичної статистики Київського університету ім. Т.Шевченка

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Козаченко Ю.В.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор Булдигін В.В.,

кандидат фізико-математичних наук Пашко А.О.

Ведуча організація - Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова АН України

Захист відбувся "___"___________1993 року на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.11 по наданню наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук при Київському університеті ім. Т. Шевченка /252127 м. Київ-127, пр. Академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет/.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського університету ім. Т. Шевченка /вул. Володимирська 62/.

Автореферат розісланий "___"___________1993 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради Сушанський В.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню умов та швидкості рівномірної збіжності за імовірністю стохастичних рядів та інтегралів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та використанню результатів для знаходження умов існування та оцінок розподілу супремума розв'язків задач математичної фізики з випадковими початковими умовами. Вивчення умов збіжності випадкових функціональних рядів і рядів із випадкових елементів банахових просторів бере початок у роботах Пелі Р., Вінера Н., Кахана Ж., Ханта Г. Свого розвитку воно набуло в роботах Джейна Н., Маркуса М., Ядренка М.И., Козаченка Ю.В. У роботах Іто К., Нісіо М., Булдигіна В.В. була створена теорія збіжності випадкових рядів у функціональних просторах Але тільки останнього часу з'явились роботи, в яких вивчались оцінки швидкості збіжності гауссових та субгауссових випадкових рядів та стохастичних інтегралів у різних функціональних просторах. Так, Козаченко Ю.В. розробив метод дослідження умов та оцінок швидкості рівномірної збіжності стохастичних рядів та інтегралів у нормах просторів Орліча. У роботах Козаченка Ю.В. і Пашка А.О. знайдено умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності за імовірністю гауссових і субгауссових стохастичних рядів та інтегралів.

Але із запровадженням поняття просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ Козаченком Ю.В. й Островським Є.І. виникло питання про умови та оцінки швидкості збіжності випадкових рядів, елементи яких належать $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, та стохастичних інтегралів по процесам із $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Ці питання вивчаються в дисертаційній роботі.

Природним є використання одержаних результатів для обгрунтування застосовності методу Фур'є до розв'язання задач математичної фізики з випадковими початковими умовами.

Дослідженню різних задач математичної фізики з випадковими початковими умовами присвячені роботи К. де Фер'є та ін. Загальний підхід до вивчення рівнянь математичної фізики з випадковими початковими умовами, що грунтується на розгляді збіжності за імовірністю відповідних випадкових рядів, був розроблений Булдигіним В.В. та Козаченком Ю.В. Але умови існування розв'язків таких задач та оцінки розподілу їх супремума було знайдено в припущенні, що початкові функції є гауссовими випадковими процесами або випадковими процесами з простору L_2.

У дисертації знайдено умови існування розв'язку першої крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння, в припущенні, що початкові функції є випадковими процесами з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Також одержано оцінки розподілу супремума розв'язку цієї задачі, що за порядком є непокращуваними та близькими до оптимальних.

Мета роботи.

1. Одержати достатні умови та оцінки швидкості збіжності за імовірністю в рівномірній метриці для:

випадкових рядів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$;

стохастичних інтегралів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

2. Використати одержані результати для обгрунтування застосовності методу Фур'є до розв'язання деяких крайових задач математичної фізики з випадковими початковими умовами.

Методи дослідження.

У роботі застосовано методи теорії випадкових процесів, використовувані при вивченні збіжності стохастичних рядів та інтегралів, та методи теорії випадкових процесів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Наукова новизна.

1. Знайдено достатні умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності за імовірністю випадкових рядів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

2. Знайдено умови існування та оцінки розподілу супремума розв'язків деяких крайових задач із випадковими початковими умовами.

3. Одержано достатні умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності за імовірністю стохастичних інтегралів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Теоретична та практична цінність.

Одержані результати можуть бути використані при вивченні різних властивостей процесів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, в теорії моделювання випадкових процесів, при моделюванні розв'язків задач математичної фізики з випадковими початковими умовами, при вивченні аналітичних властивостей процесів і полів, що можуть бути зображені у вигляді стохастичних інтегралів, а також у різних застосуваннях теорії випадкових процесів у статистичній фізиці та метеорології.

Апробація роботи та публікації.

Основні результати роботи доповідались на Київському міському семінарі по гауссовим випадковим процесам (Київ, 1993), на міжреспубліканському семінарі "Прикладні задачі теорії випадкових еволюцій"(Київ, 1990), на Республіканській школі молодих учених "Математичні методи в природознавстві: теоретичні та прикладні аспекти (Алушта, 1990), на конференціях молодих учених у Київському університеті та Київському політехнічному інституті.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-3].

Структура та об'єм роботи.

Дисертація складається зі вступу, шести параграфів, поділених на два розділи та списку літератури, містить 130 сторінки друкованого тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність задач дисертації, наведений огляд результатів, які пов'язані з темою дисертації, а також перелічені основні результати роботи.

Перший розділ присвячений вивченню умов та швидкості рівномірної збіжності за імовірністю випадкових рядів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

У § 1 наведені необхідні означення та приклади.

Нехай $\mathbb{C}(T)$ є простір неперервних та обмежених функцій на T, $T = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d$, де $T_k = \mathbb{R}$ або $T_k = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $k = \overline{1,d}$, із нормою $\| g(t) \|_{\mathbb{C}} = \sup\limits_{t \in T} |g(t)|$, $g \in \mathbb{C}(T)$.

Означення 1.1. Будемо казати, що послідовність функцій $\{g_k(t)\}$ із $\mathbb{C}(T)$ належить класу B_0, якщо існує така неперервна функція $c(t)$, що $|c(t)| < 1$, $c(t) \to 0$, $|t| \to \infty$, $\int\limits_T |c(t)| dt < \infty$, і така числова послідовність $\{f_n\}$, що $f_n > 0$, $n \geq 1$, $f_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, і для будь-якого n, для довільної числової послідовності $\{r_k\}$ виконується нерівність

$$|c(t)\sum_{k=1}^{n} r_k g_k(t) - c(s)\sum_{k=1}^{n} r_k g_k(s)| \leq f_n \| c(t) \sum_{k=1}^{n} r_k g_k(t) \|_{\mathbb{C}} |t-s| .$$

Класу B_0 належать, наприклад, послідовність тригонометричних функцій $\{\cos \lambda_k t, \sin \lambda_k t\}$, де $\lambda_k > 0$, $k \geq 1$, $\lambda_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, послідовності обмежених цілих функцій експоненціального типу, послідовності тригонометричних поліномів та послідовність ортонормованих власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

Означення 1.2. N-функцією Орліча називається неперервна парна опукла функція $\varphi(x)$, що задовольняє умовам

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\infty .$$

Означення 1.3. N-функція Орліча $\varphi(x)$ така, що $\varphi(x)=x^2/2$ коли $|x|\le x_0$, називається стандартною N-функцією Орліча.

Нехай $\varphi(x)$ є стандартною N-функцією Орліча.

Означення 1.5. Будемо казати, що $\{\xi_k\}$ є послідовністю сумісно $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, якщо для будь-якого n, для довільного набору $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$M\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\Big\}\le\exp\Big\{\varphi\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j M\xi_i\xi_j\Big)^{1/2}\Big)\Big\}, \text{ і } M\xi_k=0.$$

Означення 1.6. Будемо казати, що $\xi(t),\ t\in T$, є випадковою функцією з простору $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$, якщо для довільної послідовності $\{t_k\}\subset T$, $\{\xi(t_k)\}$ є послідовністю сумісно $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, і $M\xi(t)=0$.

Означення 1.10. Будемо казати, що функція $r(u),\ u\ge 1$, має r - властивість, якщо вона є неперервною монотонно неспадною функцією такою, що $r(e^u)$ є опуклою.

У § 2 одержано умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності зв імовірністю радів

$$S_m^n(t)=\sum_{k=m}^{n}\xi_k g_k(t)$$

де $\{\xi_k\}$ є послідовністю сумісно $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, а послідовність функцій $\{g_k(t)\}$ належить класу B_0.

Нехай $S_m^\infty(t)=\sum\limits_{k=m}^{\infty}\xi_k g_k(t)$, $S(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k g_k(t)$,

$$\Delta_m^n=\Big(\sup_{t\in T}\sup_{m\le k\le n}M\Big(\sum_{i=m}^{k}b_i\xi_i g_i(t)\Big)^2\Big)^{1/2},$$

де $\{b_k\}$ є деякою числовою послідовністю.

Теорема 1.1. Нехай існує така числова послідовність $\{b_k\}$, $b_k>0,\ k\ge m,\ b_k\uparrow\infty,\ k\to\infty$, що виконується умова

$$\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k \frac{\ln f_k}{\varphi^{(-1)}(\ln f_k)} < \infty$$

Тоді $\|c(t)(S(t)-S_1^m(t))\|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $m \to \infty$, причому при всіх $x > (1-\theta)^{-1}(d+1)D_2(m,\infty)$, $0<\theta<1$, має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_m^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}} > x\} \le D_0 \exp\left\{-\varphi^{s}\left(\frac{(1-\theta)x-(d+1)D_2(m,\infty)}{D_1(m,\infty)}\right)\right\}$$

де $D_0 = \frac{2}{K_d\theta^d}\int_T |c(t)|dt$, $K_d = 2\pi^{d/2}(d\Gamma(d/2))^{-1}$

$D_1(m,\infty) = \sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k$, $D_2(m,\infty) = \sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k \frac{\ln f_k}{\varphi^{(-1)}(\ln f_k)}$

$\varphi^{s}(\cdot)$ є доповняльною N-функцією до N-функції $\varphi(\cdot)$, $\varphi^{(-1)}(\cdot)$ є оберненою функцією до N-функції $\varphi(\cdot)$.

<u>Теорема 1.2</u>. Нехай виконується умова

$$\Gamma(m,\infty) = \left(\sup_{t\in T}\sup_{m\le k<\infty} M\left(\sum_{i=m}^{k}\xi_i g_i(t)\right)^2\right)^{1/2} < \infty, \quad (1)$$

та існує така числова послідовність $\{l_k\}$, $l_k>0$, $k\ge m$, $l_k \uparrow \infty$, $k\to\infty$, що

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left(l_k^{1-\gamma}-l_{k+1}^{1-\gamma}\right)\frac{\ln f_k}{\varphi^{(-1)}(\ln f_k)} < \infty, \quad 1<\gamma\le 2,$$

для якої виконується умова

$$\Gamma_l(m,\infty) = \left(\sup_{t\in T}\sup_{m\le k<\infty} M\left(\sum_{i=m}^{k} l_i\xi_i g_i(t)\right)^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді $\|c(t)(S(t)-S_1^m(t))\|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $m\to\infty$, і при $x > \max\{2, (2(d+1)(\Sigma_1^{(\gamma)}+\Sigma_2^{(\gamma)}))^{\gamma}\}$ має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_m^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}} > x\} \le D x^d \exp\left\{-\varphi^{s}\left(\frac{x-1}{\Gamma(m,\infty)}\right.\right. -$$

$$-\frac{\left[\Gamma^{-1}(m,\infty)\Gamma_{\ell}(m,\infty)+(d+1)\Sigma_1^{(\gamma)}\right]\cdot x^{1-1/\gamma}+(d+1)\Sigma_2^{(\gamma)}\cdot x^{1-2/\gamma}-\Gamma^{-1}(m,\infty)\Gamma_{\ell}(m,\infty)\cdot x^{-1/\gamma}}{\Gamma(m,\infty)+\Gamma_{\ell}(m,\infty)\cdot x^{-1/\gamma}}\Big)\Big\},$$

де D , $\Sigma_1^{(\gamma)}$ і $\Sigma_2^{(\gamma)}$ є визначеними в дисертації сталими.

Теорема 1.3. Нехай функція $r(u), u \geq 1$ має r - властивість.

Якщо існує така числова послідовність $\{b_k\}$, $b_k > 0$, $k \geq m$, $b_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, що

$$\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k r(f_k^d) < \infty$$

то $\|c(t)(S(t)-S_1^m(t))\|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $m \to \infty$,

причому при всіх $x > 0$, $0 < \theta < 1$, має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_m^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}} > x\} \leq D_0 \exp\left\{-\varphi^{*}\left(\frac{(1-\theta)x}{\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k}\right)\right\}\times$$

$$\times r^{(-1)}\left(\frac{\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k r(f_k^d)}{\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k}\right),$$

де $r^{(-1)}(\cdot)$ є оберненою функцією до функції $r(\cdot)$.

Теорема 1.4. Нехай функція $r(u)$, $u \geq 1$, має r- властивість.

Якщо виконується умова (1), та існує така числова послідовність $\{\ell_k\}$, $\ell_k > 0$, $k \geq m$, $\ell_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, що

$$\sum_{k=m}^{\infty}(\ell_k^{1-\gamma}-\ell_{k+1}^{1-\gamma})r(f_k^d) < \infty \quad , \quad 1 < \gamma \leq 2 ,$$

для якої виконується умова

$$\Gamma_{\ell}(m,\infty) = \Big(\sup_{t\in T}\ \sup_{m\leq k<\infty} M\Big(\sum_{i=m}^{k}\ell_i \xi_i g_i(t)\Big)^2\Big)^{1/2} < \infty ,$$

то $\|c(t)(S(t)-S_1^m(t))\|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $m \to \infty$

причому при всіх $x > \max\{1, x_0\}$, де $x_0 = \min\{v : vq(v) \geq 1\}$, має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_m^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}}>x\} \le D\,x^{d}\exp\Big\{-\varphi^{g}\Big(\frac{x-1}{\Gamma(m,\infty)}-$$

$$-\frac{\tilde{\Gamma}^{-1}(m,\infty)\Gamma_{\ell}(m,\infty)(x-1)\,x^{-1}q^{-1}(x)}{\Gamma(m,\infty)+\Gamma_{\ell}(m,\infty)\,x^{-1}q^{-1}(x)}\Big)\Big\}\,r^{(-1)}\Big(\frac{\tilde{\Sigma}_1^{(\gamma)}+\tilde{\Sigma}_2^{(\gamma)}}{\Gamma(m,\infty)}(x\,q(x))^{\gamma-1}\Big),$$

де $\tilde{\Sigma}_1^{(\gamma)}$ та $\tilde{\Sigma}_2^{(\gamma)}$ є визначеними в дисертації сталими, $q(\cdot)$ є функцією зображення доповняльної N-функції $\varphi^{g}(\cdot)$.

У § 3 обгрунтовується застосовність методу Фур'є до розв'язання першої крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами. Початкові функції, за припущенням, є випадковими процесами з просторів $\overline{\mathrm{Sub}}_{\varphi}(\Omega)$. Крім того, обмеження на коефіцієнти розглядуваної задачі забезпечують додатність власних значень відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Нехай $\{X_\kappa(x)\}$ та $\{\lambda_\kappa\}$ є послідовностями ортонормованих власних функцій та власних значень відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Позначимо

$$U_m^{\infty}(x,t)=\sum_{\kappa=m}^{\infty}X_\kappa(x)\Big\{A_\kappa\cos\sqrt{\lambda_\kappa}\,t+\frac{B_\kappa}{\sqrt{\lambda_\kappa}}\sin\sqrt{\lambda_\kappa}\,t\Big\},$$

$$0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T,\ T>0,$$

де A_κ та B_κ є коефіцієнтами розкладу випадкових початкових функцій за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля. Зауважимо, що $\{A_\kappa\}$ та $\{B_\kappa\}$ є послідовностями сумісно $\overline{\mathrm{Sub}}_{\varphi}(\Omega)$ випадкових величин.

<u>Теорема 1.5</u>. Нехай виконується умова

$$\tilde{\Gamma}(m,\infty)=\Big(\sup_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le t\le T}}\ \sup_{m\le\kappa<\infty}M\Big(\sum_{i=m}^{\kappa}\lambda_i X_i(x)\Big\{A_i\cos\sqrt{\lambda_i}\,t+\frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\Big\}\Big)^2\Big)^{1/2}<\infty,$$

та існує така числова послідовність $\{\ell_\kappa\}$, де $\ell_\kappa=\ell(\lambda_\kappa)$, $\ell_\kappa>0$, $\kappa\ge m$, $\ell_\kappa\uparrow\infty$, $\kappa\to\infty$, що

$$\sum_{\kappa=m}^{\infty}\big(\ell_\kappa^{1-\gamma}-\ell_{\kappa+1}^{1-\gamma}\big)\frac{\ln(c_0\lambda_\kappa+\sqrt{\lambda_\kappa}+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(c_0\lambda_\kappa+\sqrt{\lambda_\kappa}+1))}<\infty,$$

$$1<\gamma\le 2,$$

для якої виконується умова

$$\tilde{\Gamma}_{\ell}(m,\infty)=\Big(\sup_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le t\le T}}\ \sup_{m\le k<\infty} M\Big(\sum_{i=m}^{k}\ell_i\lambda_i X_i(x)\Big\{A_i\cos\sqrt{\lambda_i}t+\frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}}\sin\sqrt{\lambda_i}t\Big\}\Big)^2\Big)^{1/2}<\infty.$$

Тоді з імовірністю одиниця існує вибірково двічі неперервно диференційований розв'язок розглядуваної задачі, зображуваний у вигляді рівномірно збіжного за імовірністю в області $0\le x\le\pi$, $0\le t\le T$ ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\Big\{A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\Big\}.$$

Якщо, крім того,

$$\Gamma(m,\infty)=\Big(\sup_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le t\le T}}\ \sup_{m\le k<\infty} M\Big(\sum_{i=m}^{k}X_i(x)\Big\{A_i\cos\sqrt{\lambda_i}t+\frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}}\sin\sqrt{\lambda_i}t\Big\}\Big)^2\Big)^{1/2}<\infty,$$

та існує така функція $r(u)$, $u\ge 1$, що має γ-властивість і задовольняє умові

$$\sum_{k=m}^{\infty}\Big((\lambda_k\ell_k)^{1-\gamma}-(\lambda_{k+1}\ell_{k+1})^{1-\gamma}\Big)r\big((c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)^2\big)<\infty,$$

то для всіх $z\ge\max\{2,z_0+1\}$, де $z_0=\min\{v: vq(v)\ge 1\}$ при $T\ge\pi$ має місце нерівність

$$P\Big\{\sup_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le t\le T}}|u_m^{\infty}(x,t)|>z\Big\}\le\frac{2\pi T}{\sqrt{3}}z^{5/2}\exp\Big\{-\varphi^{*}\Big(\frac{z-2}{\Gamma(m,\infty)}-$$

$$-\frac{\Gamma^{-1}(m,\infty)\tilde{\Gamma}_{\ell}(m,\infty)(z-2)\big(\frac{z}{2}q(\frac{z}{2})\big)^{-1}}{\Gamma(m,\infty)+\tilde{\Gamma}_{\ell}(m,\infty)\big(\frac{z}{2}q(\frac{z}{2})\big)^{-1}}\Big)\Big\}r^{(-1)}\Big(\frac{\tilde{\Sigma}_1^{(\gamma)}+\tilde{\Sigma}_2^{(\gamma)}}{\Gamma(m,\infty)}(zq(z))^{\gamma-1}\Big),$$

де c_0, $\tilde{\Sigma}_1^{(\gamma)}$ та $\tilde{\Sigma}_2^{(\gamma)}$ є визначеними в дисертації сталими.

У § 4 розглянуто більш частинну задачу та наведено умови на кореляційні функції випадкових процесів, що є початковими функціями, при виконанні яких мають місце твердження теореми 1.5.

У розділі 2 досліджується рівномірна збіжність за імовірністю стохастичних інтегралів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Нехай $\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ є простір неперервних, обмежених на $\mathbb{R}^d$ функцій з нормою $\|g(t)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{t\in\mathbb{R}^d} |g(t)|$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$.

Розглянемо випадковий процес $\eta(\lambda)$ з вимірними на будь-якому відрізку $[a,b]$, $0 \le a < b$, траєкторіями. Під $\int_a^b B(\lambda)d\eta(\lambda)$, де $B(\lambda)$ є функцією обмеженої варіації, будемо розуміти інтеграл, визначений з імовірністю одиниця за формулою

$$\int_a^b B(\lambda)d\eta(\lambda) = B(\lambda)\eta(\lambda)\Big|_a^b - \int_a^b \eta(\lambda)dB(\lambda)$$

де $\int_a^b \eta(\lambda)dB(\lambda)$ є інтеграл Лебега за узагальненою мірою, породженою функцією $B(\lambda)$.

Означення 2.1. Будемо казати, що функція $T(t,\lambda)$, $t\in\mathbb{R}^d$, $\lambda \ge 0$, належить класу B_0, якщо $T(t,\lambda)$ є неперервною за t і λ, та для майже всіх траєкторій $\eta(\lambda)$ виконуються умови:

а) для будь-якої функції обмеженої варіації $g(\lambda)$, $\lambda \ge 0$, існують та є неперервними функціями на $\mathbb{R}^d$ інтеграли

$$\int_a^b g(\lambda)T(t,\lambda)d\eta(\lambda), \quad 0 \le a < b \quad;$$

б) існує неперервна на $\mathbb{R}^d$ функція $c(t)$ така, що $|c(t)| < 1$, $c(t) \to 0$, $|t| \to \infty$, $\int_{\mathbb{R}^d} |c(t)|dt < \infty$, і така неперервна на $\mathbb{R}$ функція $f(v) > 0$, $v > 0$, $f(v) \uparrow \infty$, $v \to \infty$, що при всіх $t, s \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$\left|c(t)\int_a^b g(\lambda)T(t,\lambda)d\eta(\lambda) - c(s)\int_a^b g(\lambda)T(s,\lambda)d\eta(\lambda)\right| \le$$

$$\le f(b)\cdot\left\|c(t)\int_a^b g(\lambda)T(t,\lambda)d\eta(\lambda)\right\|_{\mathbb{C}}\cdot|t-s|.$$

Класу B_0 належать функції $T(t,\lambda)$ такі, що при фіксованому $\lambda > 0$ вони є функціями експоненціального типу λ, обмеженими на $\mathbb{R}^d$, для яких виконуються деякі додаткові припущення.

Нехай $\eta(\lambda)$ є випадковим процесом із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

У § 5 знайдено умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності за імовірністю інтегралів $S_a^b(t) = \int_a^b T(t,\lambda)\, d\eta(\lambda)$.

Нехай $S_a^\infty(t) = \int_a^\infty T(t,\lambda)\, d\eta(\lambda)$, $S(t) = \int_0^\infty T(t,\lambda)\, d\eta(\lambda)$,

$$\Delta_a^b = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{a\le c\le b} M\left(\int_a^c T(t,\lambda) g(\lambda)\, d\eta(\lambda)\right)^2\right)^{1/2},$$

де $g(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, є деякою функцією обмеженої варіації.

Теорема 2.1. Нехай існує така неперервна функція $g(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, $g(\lambda)\uparrow\infty$, $\lambda\to\infty$, що виконується умова

$$\int_a^\infty \Delta_a^u \frac{\ln f(u)}{\varphi^{(-1)}(\ln f(u))}\, d(-g^{-1}(u)) < \infty .$$

Тоді $\| c(t)(S(t) - S_0^a(t))\|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $a\to\infty$, і для всіх $x > (1-\theta)^{-1}(d+1) D_2(a,\infty)$, $0<\theta<1$, має місце нерівність

$$P\left\{\|c(t) S_a^\infty(t)\|_{\mathbb{C}} > x\right\} \le D_0 \exp\left\{-\varphi\left(\frac{(1-\theta)x - (d+1) D_2(a,\infty)}{D_1(a,\infty)}\right)\right\}$$

де $D_0 = \frac{2}{K_d\, \theta^d} \int_{\mathbb{R}^d} |c(t)|\, dt$,

$$D_1(a,\infty) = \int_a^\infty \Delta_a^u\, d(-g^{-1}(u)) ,$$

$$D_2(a,\infty) = \int_a^\infty \Delta_a^u \frac{\ln f(u)}{\varphi^{(-1)}(\ln f(u))}\, d(-g^{-1}(u)) .$$

Теорема 2.2. Нехай виконується умова

$$\Gamma(a,\infty) = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{a\le c<\infty} M\left(\int_a^c T(t,\lambda)\, d\eta(\lambda)\right)^2\right)^{1/2} < \infty \quad (2)$$

та існує така неперервна функція $S(u) > 0$, $u \ge a$, $S(u)\uparrow\infty$, $u\to\infty$, що

$$\left|\int_a^\infty \frac{\ln f(u)}{\varphi^{(-1)}(\ln f(u))}\, d S^{1-\gamma}(u)\right| < \infty , \quad 1<\gamma\le 2 ,$$

для якої виконується умова

$$\Gamma_s(a,\infty)=\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{a\le c<\infty} M\Big(\int_a^c s(\lambda)T(t,\lambda)\,d\eta(\lambda)\Big)^2\Big)^{1/2}<\infty .$$

Тоді $\|c(t)(S(t)-S_0^a(t))\|_{\mathbb{C}}\to 0$ за імовірністю, коли $a\to\infty$, і при $x>\max\{2,(2(d+1)(C_1^{(\gamma)}+C_2^{(\gamma)}))^{\gamma}\}$ має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_a^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}}>x\}\le D\,x^d\exp\Big\{-\varphi^s\Big(\frac{x-1}{\Gamma(a,\infty)}-$$

$$-\frac{[\Gamma^{-1}(a,\infty)\Gamma_s(a,\infty)+(d+1)C_1^{(\gamma)}]\cdot x^{1-1/\gamma}+(d+1)C_2^{(\gamma)}x^{1-2/\gamma}-\Gamma^{-1}(a,\infty)\Gamma_s(a,\infty)\cdot x^{-1/\gamma}}{\Gamma(a,\infty)+\Gamma_s(a,\infty)\cdot x^{-1/\gamma}}\Big)\Big\}$$

де D, $C_1^{(\gamma)}$ та $C_2^{(\gamma)}$ є визначеними в дисертації сталими.

<u>Теорема</u> <u>2.3</u>. Нехай функція $r(u)$, $u\ge 1$, $r(1)=0$, має r-властивість.

Якщо існує така неперервна функція $g(u)>0$, $u>0$, $g(u)\uparrow\infty$, $u\to\infty$, що

$$\int_a^{\infty} r(f^d(u))\,\Delta_a^u\,d(-g^{-1}(u))<\infty ,$$

то $\|c(t)(S(t)-S_0^a(t))\|_{\mathbb{C}}\to 0$ за імовірністю, коли $a\to\infty$ і для всіх $x>0$, $0<\theta<1$ має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_a^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}}>x\}\le D_0\exp\Big\{-\varphi^s\Big(\frac{(1-\theta)x}{\int_a^{\infty}\Delta_a^u\,d(-g^{-1}(u))}\Big)\Big\}\times$$

$$\times\, r^{(-1)}\Big(\frac{\int_a^{\infty} r(f^d(u))\,\Delta_a^u\,d(-g^{-1}(u))}{\int_a^{\infty}\Delta_a^u\,d(-g^{-1}(u))}\Big).$$

<u>Теорема</u> <u>2.4</u>. Нехай виконується умова (2).

Якщо існує така неперервна функція $s(u)>0$, $u \geq a$, $s(u) \uparrow \infty$, $u \to \infty$, що

$$\left| \int_a^\infty r(\xi(u))\, d\, s^{1-\gamma}(u) \right| < \infty , \quad 1 < \gamma \leq 2 ,$$

для якої виконується умова

$$\Gamma_s(a,\infty) = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^d} \sup_{a\leq c<\infty} M\left(\int_a^c s(\lambda) T(t,\lambda)\, d\eta(\lambda)\right)^2 \right)^{1/2} < \infty ,$$

то $\| c(t)(S(t) - S_0^a(t)) \|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $a \to \infty$ і для $x > \max\{1, x_0\}$, де $x_0 = \min\{v : v q(v) \geq 1\}$ має місце нерівність

$$P\{ \| c(t) S_a^\infty(t) \|_{\mathbb{C}} > x \} \leq D \cdot x^d \cdot \exp\left\{ - \varphi^s \left(\frac{x-1}{\Gamma(a,\infty)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\Gamma^{-1}(a,\infty)\Gamma_s(a,\infty)(x q(x))^{-1}(x-1)}{\Gamma(a,\infty)+\Gamma_s(a,\infty)(x q(x))^{-1}} \right)\right\} r^{(-1)}\left(\frac{\tilde{C}_1^{(\gamma)} + \tilde{C}_2^{(\gamma)}}{\Gamma(a,\infty)} (x q(x))^{\gamma-1} \right),$$

де сталі D, $\tilde{C}_1^{(\gamma)}$ та $\tilde{C}_2^{(\gamma)}$ визначені в дисертації.

У § 6 досліджується рівномірна збіжність за імовірністю спектральних зображень стаціонарних процесів, що можуть бути зображені у вигляді стохастичних інтегралів за процесами із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Нехай $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ є стаціонарним випадковим процесом, що може бути зображений у вигляді

$$\xi(t) = \int_0^\infty \cos\lambda t\, d\eta_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin\lambda t\, d\eta_2(\lambda) ,$$

де $\eta_i(\lambda)$, $i=1,2$ є процесами з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. За припущенням, спектральна функція $F(\lambda)$ випадкового процесу $\xi(t)$ є неперервною.

Нехай

$$S_a^b(t) = \int_a^b \cos\lambda t \, d\eta_1(\lambda) + \int_a^b \sin\lambda t \, d\eta_2(\lambda) ,$$

$$S_a^\infty(t) = \int_a^\infty \cos\lambda t \, d\eta_1(\lambda) + \int_a^\infty \sin\lambda t \, d\eta_2(\lambda) .$$

Теорема 2.6. Нехай спектральна функція випадкового процесу $\xi(t)$ задовольняє умові

$$\left| \int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} \, d(1-F(u))^\beta \right| < \infty , \quad 0 < \beta \leq 1/2 .$$

Тоді $\| c(t)(\xi(t) - S_0^a(t)) \|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $a \to \infty$, і для всіх $x > \max\{2, (8C_a^\beta)^{2\beta+1}\}$ має місце нерівність

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \|_{\mathbb{C}} > x\} \leq \frac{\pi}{e} x \exp\Big\{ -\varphi^{*}\Big(x - 1 -$$

$$- \frac{(\frac{\pi}{2} + 2C_a^\beta) \cdot x^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} + 2C_a^\beta \, x^{\frac{2\beta-1}{2\beta+1}} - \frac{\pi}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2\beta+1}}}{1 + \frac{\pi}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2\beta+1}}} \Big) \Big\} ,$$

де $C_a^\beta = -\frac{1}{\beta} \cdot \int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} \, d(1-F(u))^\beta$.

Теорема 2.8. Нехай функція $r(u)$, $u \geq 1$, $r(1)=0$ має r - властивість.

Якщо спектральна функція випадкового процесу $\xi(t)$ задовольняє умові

$$\left| \int_a^\infty r(u+1) \, d(1-F(u))^\beta \right| < \infty , \quad 0 < \beta \leq 1/2 ,$$

то $\| c(t)(\xi(t) - S_0^a(t)) \|_{\mathbb{C}} \to 0$ за імовірністю, коли $a \to \infty$, причому для всіх $x > \max\{1, x_0\}$, де $x_0 = \min\{v : v q(v) \geq 1\}$, має місце нерівність

$$P\{\|c(t)S_a^{\infty}(t)\|_{\mathbb{C}} > x\} \leq \frac{\pi}{\varepsilon} \times \exp\left\{-\varphi^{s}\left(x - \frac{1+\frac{\pi}{2}q^{-1}(x)}{1+\frac{\pi}{2}(x\,q(x))^{-1}}\right)\right\} \times$$

$$\times\, r^{(-1)}\left(2\tilde{C}_a^{\beta}(x\,q(x))^{2\beta}\right),$$

де $\tilde{C}_a^{\beta} = -\frac{1}{\beta}\int_a^{\infty} r(u+1)\, d(1-F(u))^{\beta}$.

На закінчення автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику Козаченку Юрію Васильовичу за постійну підтримку та увагу до роботи.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В ТАКИХ РОБОТАХ

1.Енджиргли М.В. Про рівномірну збіжність кратних стохастичних інтегралів у нормах просторів Орліча //Вісник Київського ун-ту.1991.Вип.1.С.3-7.
2.Энджиргли М.В. Об оценках распределения супремума одного класса стационарных случайных процессов //Укр. мат. журн. 1991.,т.43, 12.С.1628-1638.
3.Енджиргли М.В. Про оцінку імовірності перевищення рівня деякими випадковими рядами //Теорія імовірностей та мат. статистика.1992.Вип.47.С.23-29.

УБЕНТЗ,1993,зам.I29,тир.II5

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]

[illegible]

Ab 27.125