АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ЧАН ЗЫУ БОНГ

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Киев - 1993

Работа выполнена в Институте математики АН Украины

Официальные оппоненты: академик АН Украины ДАЛЕЦКИЙ Ю. Л.,
доктор физико-математических наук,
профессор КОЧУБЕЙ А. Н.,
доктор физико-математических наук,
профессор СЛЮСАРЧУК В. Е.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится "1" Июня 1993 года в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "16" апреля 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат. наук ЛУЧКА А. Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию ряда задач, связанных с ограниченными (в частности, почти периодическими) решениями линейных функционально-дифференциальных уравнений. Логика развития исследований на эту тему привела к необходимости построения теории линейных операторов в пространствах ограниченных векторных функций, определённых на бесконечном промежутке.

При рассмотрении теории операторов в пространствах функций, определённых на конечном промежутке, и связанных с ними уравнений (несингулярные краевые задачи), широко используются классические теоремы Фредгольма: неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет лишь нулевое решение; если однородная задача имеет ненулевые решения, то исходное неоднородное уравнение разрешимо в том и только в том случае, если правая часть ортогональна решениям соответствующей сопряжённой однородной задачи. Теория регулярных задач широко излагается как в журнальной так и в учебной литературе.

Теоремы Фредгольма в общем случае теряют силу при переходе к рассмотрению операторов в пространствах функций, определённых на бесконечном промежутке. Поэтому вполне актуальной является задача построения и дальнейшего развития соответствующей техники для изучения таких операторов и связанных с ними уравнений.

Цель работы состоит в изучении линейных функционально-дифференциальных операторов $L : C^{(m)} \to C = C(R, F)$ вида

$$Lx = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k x}{dt^k}, \quad x \in C^{(m)} = C^{(m)}(R, E), \qquad (1)$$

где $A_k \in [C^{(m-k)}, C]$, $0 \le k \le m$, E, F - комплексные банаховы пространства, $[E, F]$ - банахово пространство линейных ограниченных операторов, определённых на E со значениями в F $C(\mathbb{R}, F)$ - банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в F, $C^{(k)}(\mathbb{R}, E)$ - подпространство k раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с k - й производной из $C(\mathbb{R}, E)$.

Такие классы операторов включают в себя обыкновенные дифференциальные операторы с ограниченными коэффициентами, операторы, определяющие дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, с последействием и многие другие важные классы операторов.

Операторы вида (1) условно можно разбить на два класса операторов: 1) операторы с "постоянными" коэффициентами и 2) операторы с переменными коэффициентами. К первому классу отнесём операторы, перестановочные с операторами сдвигов функций из рассматриваемых пространств.

Соответствующим образом можно разбить и содержание данной диссертации: в главе I изучаются операторы с "постоянными" коэффициентами и устанавливается почти периодичность решений соответствующих уравнений, а в главах II и III изучаются вопросы обратимости и фредгольмовости операторов вида (1) с переменными коэффициентами.

Методы исследования. В работе находят широкое применение методы теории линейных операторов в банаховом пространстве, методы гармонического анализа и качественной теории решений функционально-дифференциальных уравнений.

Научная новизна заключается в выборе объекта исследования и предлагаемых методах исследования. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми.

1. Получены новые условия почти периодичности решений функционально-дифференциальных уравнений с "постоянными" коэффициентами. При этом расширен класс рассматриваемых ранее уравнений.

2. Получены новые условия обратимости функционально-дифференциальных операторов в банаховом пространстве.

3. Приведены необходимые и достаточные условия C - непрерывности и равномерной C - непрерывности линейных операторов.

4. Получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости линейных функционально-дифференциальных операторов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Предложенные в диссертации методы позволяют получать критерии почти периодичности решений широкого класса функционально-дифференциальных уравнений и, в частности, уравнений в частных производных, а также получать условия обратимости и фредгольмовости операторов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных конференциях политехнического института (г. Дананг - 1982, 1985, 1989), на 3 - м и 4 - м математических съездах Вьетнама (Ханой - 1985, 1989), на семинарах Таджикского госуниверситета (1986, 1987), Воронежского госуниверситета (1987, 1992), на научной конференции преподавателей Таджикского госуниверситета (апрель 1987), на всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений (Душанбе - 1987), в институте математики АН Украины (Киев-1993, семинар-акад. Ю.А. Митропольский).

Личный вклад и публикации. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в работах [1 - 14] . В диссертационную работу включены те результаты, изложенные в [11,12] , которые принадлежат лично автору.

О б ъ ё м и с т р у к т у р а р а б о т ы. Диссертация изложена на 255 страницах и состоит из введения, 3 глав, содержащих 15 параграфов, двух дополнений, списка литературы из 209 наименований. В автореферате используется нумерация утверждений из диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, делается обзор результатов, связанных с теорией функционально-дифференциальных операторов, и кратко излагается содержание работы.

1. В первой главе изучаются обратимость операторов вида (1) с "постоянными" коэффициентами и почти периодичность решений уравнений вида

$$Lx = \psi \tag{2}$$

с почти периодической функцией $\psi : \mathbb{R} \to F$.

Частными случаями уравнения вида (2) являются уравнение

$$L_1 x = \frac{dx}{dt} - Ax = \psi, \tag{3}$$

где $A : D(A) \subset E \to E$ – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов, и уравнение вида (2), где в формуле (1) для оператора L операторы A_k, $0 \leq k \leq m$, принадлежат пространству $[C(\mathbb{R},E), C(\mathbb{R},F)]$ и задаются формулами

$$(A_k x)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{kj}\, x(t+h_j) + \int_{-\infty}^{\infty} Q_k(t-s)\, x(s)\, ds. \tag{4}$$

Предполагается, что операторы A_{kj}, $j \geq 1$, $k = 0, 1, \ldots, m$, принадлежат пространству $[C(\mathbb{R},E), C(\mathbb{R},F)]$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|A_{kj}\| < \infty$

$\mathcal{Q}_k \in L_1(\mathbb{R}, [E,F])$, $k = 0, 1, \ldots, m$, и (h_j) - последовательность вещественных чисел. Соответствующий оператор обозначим символом L_2 .

Рассматриваемые классы уравнений содержат большинство уравнений, для которых строилась теория Фавара (так называют теорию почти периодических решений линейных уравнений в банаховом пространстве).

Первые результаты о почти периодичности ограниченных решений функциональных уравнений были получены П. Болем, Г. Бором, С. Бохнером, Дж. фон Нейманом, Ж. Фаваром, Р. Доссом и Б.М. Левитаном. С работ С.Л. Соболева началось исследование условий почти периодичности решений параболических уравнений. Таким исследованиям посвящены работы Ю.И. Любича, К. Фойаша, С. Зайдмана, Х. Барта, А. Рао, И. Сибуйя, Г.М. Фельдмана, В.В. Жикова, Болес Босита, А.Н. Кочубея, Л. Америо, А.Г. Баскакова и многих других математиков.

Важно отметить, что в работах этих авторов существенно использовалась корректность задачи Коши для уравнения (3).

В § 1.1 рассматривается спектр функций и их структурные свойства. При этом используется

<u>Определение 1</u>. Банахово пространство $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbb{R}, Y)$ функций из линейного пространства $L_{1,loc}(\mathbb{R}, Y)$ локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве Y называется однородным пространством функций, если оно инвариантно относительно группы $S(\tau), \tau \in \mathbb{R}$ операторов сдвигов функций из $\mathcal{U}$, эти операторы изометричны и определена свёртка функций из алгебры $L_1(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ с функциями из $\mathcal{U}$.

Однородное пространство $\mathcal{U}$ называется сильно однородным, если группа $S(\tau), \tau \in \mathbb{R}$, сильно непрерывна в $\mathcal{U}$. Символом

$\mathfrak{A}_c$ обозначается подпространство $\{\varphi \in \mathfrak{A}$: функция $\tau \mapsto S(\tau)\varphi : \mathbb{R} \to \mathfrak{A}\}$ непрерывна .

Банаховы пространства $C = C(\mathbb{R}, Y)$, $L_p(\mathbb{R}, Y)$, $1 \le p \le \infty$, пространства Степанова $BS_p(\mathbb{R}, Y)$, $1 \le p < \infty$, являются однородными, причём сильно однородными являются пространства $L_p(\mathbb{R}, Y)$, $1 \le p < \infty$. Подпространство C_u состоит из равномерно непрерывных функций.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ - однородное пространство и $\mathfrak{F}$ - подпространство из $\mathfrak{A}$, являющееся сильно однородным (т.е. $\mathfrak{F}_c = \mathfrak{F}$). Спектром Бёрлинга $S(\varphi, \mathfrak{F})$ функции $\varphi \in \mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{F}$ называется множество тех чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которых из условия $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$ ($\hat{f}$ - преобразование Фурье функции f) следует, что $f * \varphi \bar{\in} \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F} = \{0\}$, то множество $S(\varphi, \mathfrak{F})$ называется спектром Бёрлинга функции φ и обозначается символом $S(\varphi)$.

Определение 3. Функцию $\varphi \in \mathfrak{A}$ назовём почти периодической (п.п.), если множество её сдвигов $S(\tau)\varphi, \tau \in \mathbb{R}$ относительно компактно в $\mathfrak{A}$.

Множество всех п.п. функций из $\mathfrak{A}$ обозначим символом $AP\mathfrak{A}$.

Теорема 1.3. Пусть $\mathfrak{A}$ - однородное пространство функций и множество $S(\varphi)$ функции $\varphi \in \mathfrak{A}_c$ не содержит предельных точек на компактах из $\mathbb{R}$.

Тогда φ - п.п. функция ($\varphi \in AP\mathfrak{A}$).

В § 1.2 рассматриваются спектральные свойства решений функциональных уравнений вида

$$Lx = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k x}{dt^k} = \psi, \; \psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F), \qquad (5)$$

где оператор $L : \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ и $A_k : \mathfrak{A}^{(m-k)}(\mathbb{R}, E) \to$

$\mathfrak{A}(\mathbb{R},F)$, $0\le k\le m$, - линейные ограниченные операторы ($\mathfrak{A}^{(m)}=\mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R},E)$ - подпространство из $\mathfrak{A}(\mathbb{R},E)$ функций, m - я производная которых в обобщённом смысле принадлежит $\mathfrak{A}(\mathbb{R},E)$).

Основные требования к оператору L (к коэффициентам A_k $0\le k\le m$) выражены в нескольких предположениях. Одно из основных предположений состоит в перестановочности операторов A_k $0\le k\le m$, с операторами $S(\tau),\tau\in\mathbb{R}$ сдвигов функций ("постоянство" коэффициентов).

Далее предполагается, что рассматриваемые однородные пространства содержат функции вида $y_0\exp i\lambda_0 t$, y_0 - вектор, $\lambda_0\in\mathbb{R}$.

<u>Определение 4</u>. Функцию $\hat{A}:\mathbb{R}\to[E,F]$ назовём преобразованием Фурье оператора $A\in[\mathfrak{A}^{(k)}(\mathbb{R},E),\mathfrak{A}^{(\ell)}(\mathbb{R},F)]$, перестановочного со сдвигами функций, если она определяется формулой
$\hat{A}(\lambda)x_0=A(x_0e_\lambda)(0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x_0\in E$, $e_\lambda(t)=\exp i\lambda t$

Делается ещё одно предположение о локальной принадлежности преобразований Фурье $\hat{A}_k$, $0\le k\le m$, операторных коэффициентов оператора L пространству $\hat{L}_1=\hat{L}_1(\mathbb{R},[E,F])$ преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R},[E,F])$.

<u>Определение 5</u>. Множество $\rho(\hat{L})$ тех чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, для которых оператор $\hat{L}(\lambda)$, определённый формулой

$$\hat{L}(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}(i\lambda)^k\hat{A}_k(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

обратим, назовём регулярным множеством преобразования Фурье оператора L . Множество $\mathbb{R}\setminus\rho(\hat{L})$ назовём сингулярным множеством функции $\hat{L}$ и обозначим символом $S(\hat{L})$.

Обобщённым решением уравнения (5) называется функция $\varphi\in\mathfrak{A}(\mathbb{R},E)$, для которой функция вида $f*\varphi$ ($f\in L_1(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp}\hat{f}$ – компакт), принадлежащая пространству $\mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R},E)$ есть решение уравнения $Lx = f*\psi$.

Следующая лемма играет ключевую роль при доказательстве последующих утверждений.

Лемма 2.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – подпространство из $\mathfrak{A}(\mathbb{R},E)$, инвариантное относительно сдвигов функций. Тогда для любого обобщённого решения φ уравнения (5) имеют место следующие свойства: 1) $S(\varphi,\mathfrak{F}) \subset S(\hat{L})\ \forall \psi \in \mathfrak{F}$; 2) $S(\varphi) \subset S(\hat{L}) \cup S(\psi)$ $\forall \psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R},F)$.

Теорема 2.2. Пусть множество $S(\hat{L})$ не более чем счётно и ψ – п.п. функция. Тогда каждое обобщённое решение $\varphi \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R},E)$ уравнения (5) почти периодично ($\varphi \in AP\mathfrak{A}$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathfrak{A}(\mathbb{R},E) = C(\mathbb{R},E)$ и пространство E не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0 , сходящихся к нулю числовых последовательностей;

2) множество $S(\hat{L}) \cup S(\psi)$ не имеет предельных точек на компактах из $\mathbb{R}$.

В этом параграфе теорема 2.2 применяется к уравнению (3), причём снимается условие корректности задачи Коши. Важно отметить, что в этом частном случае множество $S(\hat{L}_1)$ совпадает с множеством $\mathbb{R} \cap i\sigma(A)$, где $\sigma(A)$ – спектр оператора A .

В § 1.3 получены некоторые приложения к конкретным классам уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$u''(t) = Au'(t) + B(t)u(t) + f(t), \tag{7}$$

где $A : D(A) \subset E \to E$ – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $B : \mathbb{R} \to [E,E]$ и $f : \mathbb{R} \to E$ – п.п. функции

Степанова.

Следующая теорема обобщает один результат А. Рао.

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть $u: \mathbb{R} \to E$ – сильное решение уравнения (7). Если u, u' – п.п. функции Степанова, то $u, u' \in AP(\mathbb{R}, E)$.

В § 1.4 рассматриваются вопросы обратимости и α – регулярности функционально-дифференциальных операторов. Эти вопросы примыкают к исследованиям В.Е. Слюсарчука и А.Н. Кочубея. Изучение обратимости оператора L ведётся с привлечением преобразования Фурье $\hat{L}$ оператора L в предположении, что множество $\rho(\hat{L}) = \mathbb{R} \setminus S(\hat{L})$ непусто.

<u>Теорема 4.1</u>. Пусть множество $S(\hat{L})$ пусто. Тогда

1) оператор $L: \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ инъективен;

2) уравнение (5) имеет единственное решение $\varphi \in \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E)$ для любой функции $\psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$, имеющей компактный спектр Бёрлинга $S(\psi)$, причём $S(\varphi) \subset S(\psi)$.

Необходимое условие обратимости оператора L выражается в следующей лемме.

<u>Лемма 4.1</u>. Если оператор $L: \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ обратим, то

1) $S(\hat{L}) = \varnothing$; 2) $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\hat{L}(\lambda)^{-1}\|_{[F,E]} < \infty$

<u>Теорема 4.3</u>. Если оператор $L: \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ непрерывно обратим, то непрерывно обратимым является его сужение $L_0: AP(\mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E)) \to AP(\mathfrak{A}(\mathbb{R}, F))$ на подпространство п.п. функций.

<u>Теорема 4.4</u>. Для непрерывной обратимости оператора $L: AP(\mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E)) \to AP(\mathfrak{A}(\mathbb{R}, F))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $S(\hat{L}) = \varnothing$;

2) семейство операторозначных функций $\hat{F}_\varepsilon: \mathbb{R} \to [F, E]$ вида

$$\widehat{F}_\varepsilon(\lambda) = \widehat{g}_\varepsilon(\lambda)\,\widehat{L}(\lambda)^{-1},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,$$

где $\widehat{g}_\varepsilon(\lambda) = \widehat{g}(\varepsilon\lambda)$ ($\widehat{g}$ - преобразование Фурье функции $g \in L_1(\mathbb{R})$ со свойствами: $supp\,\widehat{g} \subset [-1,1]$, $\widehat{g}(0) = 1$ является преобразованиями Фурье суммируемых операторозначных функций $F_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}, [F, E])$, $\varepsilon > 0$, таких, что интегральные операторы свёртки вида

$$L_\varepsilon x = F_\varepsilon * x,\ x \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$$

равномерно ограничены.

Теперь рассмотрим оператор L в условиях, когда множество $S(\widehat{L})$ не обязательно является пустым.

<u>Определение 7</u>. Пусть α - подмножество из $\mathbb{R}$. Оператор $L : \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ называется α - регулярным, если для любой функции $\psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ со спектром Бёрлинга $S(\psi) \subset \alpha$ уравнение (5) имеет единственное обобщённое решение $\varphi \in \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E)$ со спектром $S(\varphi)$ из множества α.

<u>Теорема 4.5</u>. Пусть α - компактное множество из $\mathbb{R}$. Для того чтобы оператор $L : \mathfrak{A}^{(m)}(\mathbb{R}, E) \to \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ был α - регулярным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $S(\widehat{L}) \cap \alpha = \varnothing$.

Заметим, что если $\alpha = \mathbb{R}$, то α - регулярность оператора L означает, что он непрерывно обратим. В общем случае α -регулярность оператора L означает обратимость его на подпространстве $\mathfrak{A}^{(m)}(\alpha)$ функций, спектр Бёрлинга которых содержится в множестве α.

<u>Теорема 4.6</u>. Если α - компакт из $\mathbb{R}$, то

$$\sigma(L \mid \mathfrak{A}^{(m)}(\alpha)) = \bigcup_{\lambda \in \alpha} \sigma(\widehat{L}(\lambda)),$$

где $L|\mathfrak{A}^{(m)}(\alpha)$ – сужение оператора L на подпространство $\mathfrak{A}^{(m)}(\alpha)$.

При рассмотрении в правой части уравнения (5) произвольной функции $\psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ уравнение может не иметь решения. Здесь приведём некоторые дополнительные условия существования решения уравнения (5).

Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{f}(0)=1$, $\operatorname{supp}\hat{f}$ – компакт. Тогда из сделанных предположений следует, что все функции $\hat{F}_\mu : \mathbb{R} \to [F, E]$, $\mu \in \mathbb{R}$, вида

$$\hat{F}_\mu(\lambda) = (\hat{L}(\lambda)^{-1})\hat{f}(\lambda+\mu),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

являются преобразованиями Фурье функций $F_\mu \in L_1(\mathbb{R}, [F, E]), \mu \in \mathbb{R}$. Положим

$$\ell(\mu) = \| F_\mu \|,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для каждой функции $\psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ рассмотрим функцию $\alpha_\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, определённую формулой

$$\alpha_\psi(\mu) = \| f^\mu * \psi \|,\ \mu \in \mathbb{R},$$

где $f^\mu(t) = f(t)\exp(i\mu t),\ t \in \mathbb{R}$

<u>Теорема 4.7</u>. Если $S(\hat{L}) = \varnothing$, то для функции $\psi \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, F)$ уравнение (5) имеет

1) единственное обобщенное решение, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\psi(\mu)\,\ell(\mu)\,d\mu < \infty;$$

2) единственное решение, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^m \alpha_\psi(\mu)\,\ell(\mu)\,d\mu < \infty.$$

В § 1.5 приводится (без доказательства) ряд полученных в предыдущих параграфах результатов на уравнения в пространствах функций нескольких переменных.

Во второй главе изучаются вопросы обратимости операторов вида (1) с "переменными" коэффициентами $A_0, A_1, \dots, A_m$, которые принадлежат специально выделяемым классам линейных операторов (C - непрерывных, равномерно C - непрерывных, C-вполне непрерывных операторов). Большое внимание уделяется описанию этих специальных классов операторов.

Как известно, выполнение условия

$$\operatorname{Ker} L = \{0\} \tag{8}$$

не влечёт непрерывной обратимости оператора L. Поэтому требуются некоторые дополнительные условия, которые гарантировали бы обратимость оператора L. Такие дополнительные условия впервые были сформулированы в задаче о п.п. решений Фаваром и в существенно более общих проблемах В.М. Миллионщиковым. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории Фавара был сделан Э. Мухамадиевым, доказавшим, что условие существования ограниченного решения в теореме Фавара является излишним.

Дальнейшее развитие теории Фавара осуществлялось по линии расширения класса рассматриваемых операторов. Так Э. Мухамадиевым соответствующие результаты были перенесены на дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, на дифференциальные операторы с частными производными, действующими в пространствах Гёльдера, и другие классы операторов. Отметим ещё результаты Ю.С. Колесова для уравнений с запаздывающим аргументом и последействием, М.А. Шубина для уравнений с частными производными в пространствах $L_2(\mathbb{R}^n)$ и пространстве Безиковича, В.Г. Курбатова для операторов в пространствах $L_p(G)$, $1<p<\infty$, где

G локально компактная абелева группа.

Важный вклад в развитие теории Фавара был сделан В.Е. Слюсарчуком, в исследованиях которого условие (8) было заменено условием

$$\inf_{\|x\|_{C^{(m)}}=1} \|Lx\| > 0. \tag{9}$$

Важно отметить, что во всех названных работах предполагалось, что E - конечномерное банахово пространство.

Результаты, полученные в § 2.1, можно рассматривать как дальнейшее развитие в этом направлении соответствующих результатов В.Е. Слюсарчука.

<u>Определение 8</u>. Оператор $A \in [C^{(p)}, C^{(q)}]$, где $C = C(\mathbb{R}, E)$, называется C - непрерывным, если для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждого $T > 0$ найдутся $\delta > 0$, $N > 0$ такие, что

$$\max_{0 \le j \le q} \|(Ax)^{(j)}(t)\|_E < \varepsilon, \quad t \in [-T, T],$$

если $\max\limits_{0 \le j \le p} \|x^{(j)}(t)\|_E < \delta \quad \forall t \in [-N, N]$ и $\|x\|_{C^{(p)}} \le 1$.

<u>Определение 9</u>. Оператор $A \in [C^{(p)}, C^{(q)}]$ называется равномерно C - непрерывным, если для каждых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ найдутся $\delta > 0$, $N > 0$ такие, что для произвольных $\tau \in \mathbb{R}$ и $x \in C^{(p)}$, для которых

$$\max_{0 \le j \le p} \|x^{(j)}(t)\|_E < \delta \quad \forall t \in [-N+\tau, N+\tau] \text{ и } \|x\|_{C^{(p)}} \le 1,$$

выполняется неравенство

$$\max_{0 \le j \le q} \|(Ax)^{(j)}(t)\|_E < \varepsilon, \quad \forall t \in [-T+\tau, T+\tau].$$

Аналогичные определения даются в случае, когда $A \in [L_\infty^{(p)}, L_\infty^{(q)}]$, где $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}, E)$, $L_\infty^{(k)}$ - образ оператора $(D+I)^{-k}: L_\infty \to L_\infty$, D - оператор дифференцирования.

Через X обозначим одно из пространств C, C_0, L_∞ ($C_0 = C_0(\mathbb{R}, E)$ - подпространство функций из C, убывающих на бесконечности). Символом $T_p(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) обозначим линейный ограниченный оператор из $[X^{(p)}, X^{(p)}]$, определённый формулой

$$(T_p(\lambda)x)(t) = e^{i\lambda t}x(t),\ x \in X^{(p)},\ t \in \mathbb{R}.$$

Определение 10. Оператор $A \in [X^{(p)}, X^{(q)}]$ называется равномерно C - непрерывным, если операторозначная функция

$$\widetilde{A}: \mathbb{R} \to [X^{(p)}, X^{(q)}],\ \widehat{A}(\lambda) = T_q(\lambda)\, A\, T_p(-\lambda)$$

непрерывна в равномерной операторной топологии.

Теорема I.1. Определения 9 и 10 равномерно C - непрерывного оператора эквивалентны.

Определение 10 во многих отношениях более удобнее определения 9 для некоторых классов операторов. Так с его помощью легко доказывается следующая

Теорема I.2. Если оператор $A \in [X^{(p)}, X^{(q)}]$ непрерывно обратим и равномерно C - непрерывен, то обратный оператор A^{-1} также равномерно C - непрерывен(В условиях следующих трёх теорем E - конечномерное пространство).

Теорема I.3. Каждый C - непрерывный оператор из $[C, C]$ может быть представлен в виде

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mu(t)(ds)\, x(t+s),\ x \in C, \qquad (10)$$

где функция $\mu: \mathbb{R} \to M(\mathbb{R}, [E, E])$ ограничена, $M = M(\mathbb{R}, [E, E])$-

– банахова алгебра ограниченных борелевских мер (со свёрткой мер в качестве умножения) и имеют место оценки

$$\alpha_0 \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mu(t)\|_M \le \|A\| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mu(t)\|_M,$$

где $\alpha_0 > 0$ – некоторая постоянная.

Теорема 1.4. Для того чтобы оператор $A \in [C, C]$ был равномерно C – непрерывным оператором, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление вида (10) и выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mu_\lambda(t) - \mu(t)\|_M = 0,$$

где мера $\mu_\lambda(t) \in M$ (для каждого $t \in \mathbb{R}$) есть произведение функции $\exp(-i\lambda s),\ s\in\mathbb{R}$ на меру $\mu(t) \in M$.

Несколько другой результат содержит следующая

Теорема 1.5. Для того чтобы оператор $A \in [C, C]$ был равномерно C – непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой ограниченной аппроксимативной единицы (f_n) из алгебры $L_1(\mathbb{R})$ имело место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mu_n(t) - \mu(t)\|_M = 0.$$

где мера $\mu_n(t) \in M$ имеет вид $\mu_n(t) = \hat{f}_n \mu(t),\ t\in\mathbb{R},\ n \ge 1.$

Полученные в теоремах 1.4 и 1.5 результаты естественным образом обобщаются на C – непрерывные операторы (теоремы 1.6, 1.7).

В § 2.2 изучаются п.п. операторы, действующие в пространстве X, где $X = C, C_0, L_p, 1 \le p \le \infty$. При этом используется

Определение 11. Оператор $A \in [X^{(p)}, X^{(q)}]$ называется почти периодическим, если семейство операторов вида

$$S(\tau) A S(-\tau), \tau \in \mathbb{R},$$

предкомпактно в пространстве $[X^{(p)}, X^{(q)}]$.

Символами $[X^{(p)}, X^{(q)}]_c$, $[X^{(p)} X^{(q)}]_{AP}$ обозначим соответственно множества равномерно C - непрерывных и п.п. операторов из $[X^{(p)}, X^{(q)}]$.

Теорема 2.1. Если $A \in [X^{(p)}, X^{(q)}]_{AP}$ - непрерывно обратимый оператор, то оператор $A^{-1} \in [X^{(q)}, X^{(p)}]$ также почти периодичен.

Теорема 2.3. Каждый почти периодический C - непрерывный оператор $A \in [C, C]$ равномерно C - непрерывен, если E - - конечномерное пространство.

В § 2.3 исследуются условия обратимости п.п. C - непрерывных функционально-дифференциальных операторов вида

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + A + B : X^{(m)} \to X,$$

где $A, B : X^{(m)} \to X$ - C - непрерывные операторы и X - одно из пространств $C, C_0, L_\infty, AP(\mathbb{R}, E)$. Далее символами $X_\omega^{(m)}$ и X_ω обозначим подпространства ω - периодических функций из пространств $X^{(m)}$ и X соответственно.

Определение 12. Оператор $B \in [X^{(m)}, X]$ называется C - вполне непрерывным, если он C - непрерывен и для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R})$ оператор fB, определённый формулой $(fBx)(t) = f(t)(Bx)(t), x \in X^{(m)}$, является вполне непрерывным оператором.

Оператор B называется условно C - вполне непрерывным, если он C - непрерывен и множество функций вида $\{Bx : \|x\| \leq 1\} \subset X$ имеет предкомпактное множество значений в E.

Теорема 3.1. Пусть A - C - непрерывный оператор, B - C - вполне непрерывен, оператор $d^m/dt^m + A : X^{(m)} \to X$ обратим и выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Ker} L = \{x \in X^{(m)} : Lx = 0\} = \{0\}$;

2) существуют семейства C - непрерывных операторов A_ω, $B_\omega : X_\omega^{(m)} \to X_\omega$, $\omega > 0$, такие, что B_ω, $\omega > 0$, - вполне непрерывные операторы и

$$\lim_{\omega\to\infty} \sup_{\|x\|_{X_\omega^{(m)}} \le 1} \|f(A - A_\omega)x\|_X + \|f(B - B_\omega)x\|_X = 0 \qquad (11)$$

для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R})$, и, кроме того,

$$\overline{\lim_{\omega\to\infty}} \inf_{\|x\|_{X_\omega^{(m)}} = 1} \sup_{t \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]} \|x^{(m)}(t) + (A_\omega + B_\omega)x(t)\|_E > 0. \qquad (12)$$

Тогда оператор $L = d^m/dt^m + A + B : X^{(m)} \to X$ обратим и обратный C - непрерывен.

Следующая теорема является фактическим следствием теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Пусть для операторов $A, B \in [X^{(m-1)}, X]$ выполнены следующие условия:

1) B - условно C - вполне непрерывный оператор;

2) $\operatorname{Ker} L = \{0\}$;

3) существуют семейства операторов $A_\omega, B_\omega \in [X_\omega^{(m-1)}, X_\omega]$, $\omega > 0$, для которых выполнены предельные соотношения (11) и (12).

Тогда оператор $L = d^m/dt^m + A + B : X^{(m)} \to X$ имеет C - непрерывный обратный.

Теорема 3.4. Пусть операторы $A, B \in [X^{(m)}, X]$ являются равномерно C - непрерывными почти периодическими операторами и, кроме того, выполнены следующие условия:

1) B - C - вполне непрерывный оператор;

2) оператор $d^m/dt^m + A : X^{(m)} \to X$ непрерывно обратим и

$$\inf_{\|x\|_{X^{(m)}}=1} \|Lx\| > 0.$$

Тогда оператор $L = d^m/dt^m + A + B$ непрерывно обратим и обратный оператор является почти периодическим равномерно C - непрерывным оператором.

В § 2.4 рассматриваются C - непрерывные операторы, действующие в пространстве $l_\infty = L_\infty(\mathbb{Z}, E)$ ограниченных последовательностей векторов из E. Здесь наблюдается определённый параллелизм в понятиях и результатах, которые рассматривались в §§ 2.1 - 2.3.

В § 2.5 приводятся результаты, связанные со структурой функции Грина оператора $L = d^m/dt^m + A : X^{(m)} \to X$ ($X = C$ или $X = L_\infty$), который предполагается (непрерывно) обратимым. А именно, при определённых условиях на оператор A оператор $L^{-1} : X \to X^{(m)}$ допускает представление вида

$$(L^{-1}x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)\,x(s)\,ds, \quad x \in X,$$

и доказывается, что функция Грина $G : \mathbb{R}^2 \to [E, E]$ оператора L удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\|G(t,s)\|_{[E,E]} \le M \exp(-\gamma|t-s|), \quad t,s \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

где $M, \gamma > 0$ - постоянные.

Такие вопросы рассматривались В.Г. Курбатовым, В.Е. Слюсарчуком для функционально-дифференциальных операторов и многими другими авторами для различных классов линейных операторов. В частности, интересные исследования были проведены М.А. Шубиным для операторов с частными производными.

Определение 13. Оператор $A \in [X^{(p)}, X^{(q)}]$ отнесём к классу $\mathcal{Э}(\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$, если операторозначная функция $\widehat{A} : \mathbb{R} \to [X^{(p)}, X^{(q)}]$, определённая формулой

$$\widehat{A}(\lambda) = T_q(\lambda) A T_p(-\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

допускает аналитическое расширение в полосу $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon_0\}$ из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (далее будет использована запись $A \in \mathcal{Э}(\varepsilon_0)$).

Следующий результат является одним из основных в этом параграфе.

Теорема 5.2. Пусть оператор $A \in [X, X]$ принадлежит классу $\mathcal{Э}(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, и непрерывно обратим. Тогда существует такое число $\gamma_0 > 0$, что оператор A^{-1} принадлежит классу $\mathcal{Э}(\gamma_0)$.

Рассмотрим интегральный оператор $A : X \to X$ вида

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)\, x(s)\, ds, \; x \in X, \tag{14}$$

где $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [E, E]$ - функция, удовлетворяющая условию (12).

Теорема 5.3. Пусть оператор A имеет вид (14) и $A : X^{(m-1)} \to X$ - оператор класса $\mathcal{Э}(\varepsilon_0)$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, $m \geq 1$, E - конечномерное пространство и оператор

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + A : X^{(m)} \to X$$

непрерывно обратим.

Тогда найдутся такие числа $\gamma_0 > 0$, $M_0 > 0$ и функция $G_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [E, E]$, принадлежащая $L_1(\mathbb{R}, [E, E]$ по второй переменной (при каждом фиксированном значении первого аргумента), что имеет место представление

$$(L^{-1}f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_0(t,s)f(s)\,ds,\ f\in X,$$

и

$$\|G_0(t,s)\|_{[E,E]}\leq M\exp(-\gamma_0|t-s|)\ \forall t,s\in\mathbb{R}.$$

3. <u>В третьей главе</u> приведены критерии фредгольмовости некоторых классов линейных функционально-дифференциальных операторов, действующих в пространствах функций, определённых на вещественной оси $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве.

Этот вопрос изучался в работах С.М. Никольского, Ф.В. Аткинсона, И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна, В.Г. Кравченко и Г.С. Литвинчука, Э. Мухамадиева, И.Б. Симоненко, Б.Я. Штейнберга, Х. Кордеса, Б.В. Ланге и В.С. Рабиновича, В.Г. Курбатова и других математиков. Заметим, что условия фредгольмовости получены с применением метода Э. Мухамадиева, в основе которого лежит использование предельных операторов, построенных по исследуемому оператору.

Всюду в этой главе E - конечномерное пространство.

В § 3.1 рассматриваются некоторые дополнительные свойства линейных C - непрерывных операторов.

В § 3.2 рассматриваются линейные операторы в пространствах последовательностей и матричное представление линейных операторов.

В § 3.3 получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости функционально-дифференциальных операторов вида

$$L=\frac{d^m}{dt^m}+A:X^{(m)}\to X,$$

где X - одно из пространств $C=C(\mathbb{R},E)$, $L_\infty=L_\infty(\mathbb{R},E)$, $A:X^{(m)}\to X$ - равномерно C - вполне непрерывный оператор.

Линейный оператор $B:Y\to Z$ (Z,Y - банаховы пространства) называется Φ_+ - оператором, если он нормально разрешим (т.е. его множество значений $\operatorname{Im} B$ замкнуто в Z) и его ядро $\operatorname{Ker} B$ конечномерно. Оператор B называется Φ_- - оператором, если он нормально разрешим и размерность коядра $Z/\operatorname{Im} B$ конечна.

Оператор B называется фредгольмовым или Φ - оператором, если он одновременно является Φ_+ и Φ_- - оператором.

Исследования проводятся при выполнении следующего предположения относительно оператора A. Семейство операторов $S(\tau)AS(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, предкомпактно в следующем смысле: для любой последовательности (τ_n) из $\mathbb{R}$ такой, что $|\tau_n| \to \infty$, из неё можно выделить такую подпоследовательность (τ_{n_k}), что последовательность операторов $A_k = S(\tau_{n_k}) A S(-\tau_{n_k})$, $k \geq 1$, обладает свойством: для любой функции $x \in X^{(m)}$ последовательность функций $(A_k x)$ C - сходится к некоторой функции y из X, т.е. $\| f(A_k x - y)\|_X \to 0$ для любой $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Из этого предположения следует существование оператора $\widehat{A} \in [X^{(m)}, X]$ такого, что $y = \widehat{A} x \quad \forall x \in X^{(m)}$. Этот оператор $\widehat{A}$ назовём предельным оператором для оператора A. Множество всех предельных для A операторов обозначим символом $H(A)$.

Следующая теорема является одним из основных результатов главы.

<u>Теорема 3.I</u>. Следующие условия эквивалентны:

а) оператор L является Φ_+ - оператором;

б) $\operatorname{Ker} \widehat{L} = \{0\} \quad \forall \widehat{L} \in H(L)$;

в) существует число $M > 0$ и функция $f \in C_0(\mathbb{R})$ с компактным носителем такие, что

$$\|x\|_{X^{(m)}} \leq M(\|Lx\|_X + \|fx\|_{X^{(m)}}) \quad \forall x \in X^{(m)}.$$

Имеет место аналогичный результат, когда $X=\ell_\infty=L_\infty(\mathbb{Z},E)$ и $X=c_0=C_0(\mathbb{Z},E)$.

Каждый равномерно c - непрерывный оператор B обладает свойством: $Bx_0\in C_0\ \ \forall x_0\in C_0$. Поэтому оператор B можно рассматривать действующим одновременно в двух пространствах в ℓ_∞ и в C_0 , что и делается в условиях следующей теоремы.

Теорема 3.4. Операторы $L=I+A:\ell_\infty\to\ell_\infty$, $L=I+A:c_0\to c_0$, где $A\in[\ell_\infty,\ell_\infty]_c\cap[c_0,c_0]_c$ c - вполне непрерывный оператор, являются Φ_+ - операторами одновременно.

Теперь перейдём к формулировке результатов, связанных с получением условий, когда рассматриваемый оператор является Φ_- - оператором.

Вначале мы рассматриваем оператор $L:X\to X$ вида $L=I+A$, где A - равномерно c - вполне непрерывный оператор (X - - одно из пространств $\ell_p=L_p(\mathbb{Z},E)$, $1\le p\le\infty$, или $X=c_0$). Вводится множество $H(A)$ предельных операторов для оператора A . Заметим, что в данном случае имеет место важное свойство: $H(A^*)=\{\hat{A}^*:\hat{A}\in H(A)\}$.

Теорема 3.6. Оператор $L=I+A\in[\ell_\infty,\ell_\infty]_c\cap[\ell_1,\ell_1]_c$ является Φ_+ - оператором в пространствах ℓ_∞ и ℓ_1 одновременно.

Теорема 3.7. Для оператора $L=I+A\in[\ell_\infty,\ell_\infty]_c\cap[\ell_1,\ell_1]_c$ следующие условия эквивалентны:

а) оператор L является Φ_- - оператором;

б) $\operatorname{Im}(I+\hat{A})=c_0$, $L:c_0\to c_0$.

Результаты, полученные в предыдущих теоремах, являются вспомогательными для исследования изучаемого функционально-дифференциального оператора $L=\frac{d^m}{dt^m}+A:X^{(m)}\to X$ ($X=L_\infty$ или $X=L_{\infty,0}$). Они используются при доказательстве фредгольмовости оператора L с помощью построения соответствующего оператора в пространстве l_∞ двусторонних последовательностей функций из банахова пространства $L_\infty([0,1], E)$.

Теорема 3.8. Для того чтобы оператор $L = \frac{d^m}{dt^m} + A : X^{(m)} \to X$ был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы все предельные операторы $\widehat{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \widehat{A} : X^{(m)} \to X$, $\widehat{A} \in H(A)$ были обратимы (здесь X - одно из пространств $L_\infty, L_{\infty,0}$).

В § 3.4 рассматриваются примеры фредгольмовых операторов.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Чан Хыу Бонг. О сохранении экспоненциальной дихотомии решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // Вестн. политехн. ин-та (г. Дананг).-1981.- № 5.- С. 5-10 (Вьетнам).

2. Tran huu Bong. Sur la conservation de la dichotomie exponentielle de la solution de l'equation différentielle avec argument retardé dans l'espace de banach.- Actes de la 3 ence conf. de Mathematiques du Vietnam, 22-25 juil. 1985.-Hana, 1986.- 11.- P. 326-330.

3. Чан Хыу Бонг. Об оценке решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве // Вестн. политехн. ин-та (г. Дананг).-1985.-№ 9.- С. 22-24 (Вьетнам).

4. Чан Хыу Бонг. О нормальной разрешимости линейных дифференциальных операторов с запаздывающим аргументом в пространстве ограниченных на оси функций //Докл. АН ТаджССР.- 1987.- 30, №6.- С. 343-345.

5. Чан Хыу Бонг. О фредгольмовости линейных дифференциальных операторов с запаздывающим аргументом в пространстве ограниченных на оси функций // Докл. АН ТаджССР.-1987.-30, №7.-С. 409-411.

6. Чан Хыу Бонг. О нётеровости линейных дифференциальных операторов с запаздыванием в пространстве ограниченных на оси функций // Тез. докл. всесоюз. конф. по теории и прил. функционально-дифференциальных уравнений, 28 - 30 сент. 1987 г. Ч. II. - Душанбе, 1987. - С. 138.

7. Чан Хыу Бонг. Необходимое условие фредгольмовости линейных дифференциальных операторов с запаздывающим аргументом в пространстве ограниченных на оси функций // Вестн. политехн. ин-та (г. Дананг).-1989.-№ 12.- С. 35-37 (Вьетнам).

8. Tran Huu Bong. On the Fredholm property of linear differential operators with delay in the space of functions bounded on the real axis. The 4th Congress of Vietnamese Mathematicians. Hanoi, September 4-7, 1990.-P. 51.

9. Чан Хыу Бонг. О фредгольмовости линейных дифференциальных операторов с запаздыванием и с малым параметром // Изв. АН Тадж. ССР. Отд-ние физ.-мат., хим. и геол. наук.-1990.-№ 1.- С.64-66.

10. Чан Хыу Бонг. Фредгольмовость дифференциально-функциональных операторов.- Киев, 1992.- 49 с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики ; 92.17).

11. Баскаков А.Г., Чан Хыу Бонг. О почти периодичности решений линейных функциональных уравнений // Докл. АН СССР.- 1992.- 324, № 1. - С. 16-19.

12. Баскаков А.Г., Чан Хыу Бонг. Спектральные свойства ограниченных решений линейных дифференциально-функциональных уравнений.- // Докл. АН СССР. - 1992.- 325, № 4. - С. 647-651.

13. Чан Хыу Бонг. О фредгольмовости линейных дифференциально-функциональных операторов // Докл. АН СССР.-1992.-324, №4.-С. 757-759.

14. Чан Хыу Бонг. О некоторых условиях обратимости С - непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.- 1993. - 329, № 3.

Подп. в печ. 22.03.93. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 1,63. Усл. кр.-отт. 1,63. Уч.-изд. л. 1,3.
Тираж 100 экз. Зак. 133. Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3