МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ШУРКО Генадій Костянтинович

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ СТОХАСТИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

01.01.05 — Теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1993

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Мішура Юлія Степанівна.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор, ведучий науковий співробітник Кнопов П.С., кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Маляренко А.А.

Провідна організація: Інститут прикладної математики і механіки АН України.

Захист відбудеться "17" травня 1993 року в 14 годин на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.11 по присудженню вченого ступеня кандидата наук при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м.Київ, проспект академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету вул. Володимирська, 62 .

Автореферат розіслано "14" квітня 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Сущанський В.І.

I. Загальна характеристика роботи.

Актуальність роботи. Відомо, що теорія однопараметричних стохастичних диференціальних рівнянь була повно і всебічно розвинена в роботах Й.І.Гіхмана, А.В.Скорохода, С.Ватанабе, І.Ікеда та ін.

При розвиненні теорії стохастичного інтегрування на площині з'явилися дослідження, присвячені тим чи іншим типам двопараметричних стохастичних диференціальних рівнянь. Результати цих досліджень містяться в роботах Й.І.Гіхмана і Т.С.Пясецької, Л.Л.Пономаренко, Т.Л.Царенка, Р.Каіролі, К.Тюдора та ін.

Практично всі результати теорії однопараметричних стохастичних рівнянь суттєвим чином використовують поняття моменту зупинки. Тому розвинення теорії двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь пов'язане з чималими труднощами, веде до виникнення нових понять.

В багатьох застосуваннях випадає мати справу з випадковими полями, що є розв'язками такого типу рівнянь. Необхідність їх вивчення виникає при розв'язанні проблем теорії розпізнавання образів, астрономії, метеорології та ін.

Мета роботи. Одержання теорем існування та єдиності сильних розв'язків, існування слабких розв'язків двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь загального вигляду, дослідження їх властивостей.

Наукова новизна, теоретична і практична вагомість роботи. В дисертації доведені теореми існування та єдиності сильних розв'язків, існування слабких розв'язків двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь загального вигляду, доведені граничні теореми для розв'язків таких рівнянь, що залежать від параметра, досліджено їх диференційовність за параметром і інтегральна неперервність за параметром. Встановлена слабка збіжність за розподілами до розв'язку двопараметричного стохастичного інтегрального рівняння послідовності випадкових полей, що задовольняють певним вимогам. Доведено теорему про абсолютну неперервність мір, що відповідають розв'язкам двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь загального вигляду, виписано щільність однієї міри відносно другої. Одержані результати є новими. Вони можуть бути використані при розв'язанні різних задач з теорії двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь.

Методика дослідження. В роботі використано різні мартингальні методи §теорії випадкових процесів і полів.

Публікації. По темі дисертації надруковано чотири роботи.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на XXI і XXII всесоюзних школах-колоквіумах з теорії імовірностей і математичної статистики. (Бакуріані, 1987, 1988) , на I і II республіканських конференціях, присвячених пам'яті відомого математика Й.І.Гіхмана (1988, 1990) на спільному науковому семінарі відділу теорії ймовірностей і математичної статистики Інституту прикладної математики і механіки АН України і кафедри алгебри і теорії ймовірностей Донецького державного університету.

Обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, списку літератури (45 назв) і викладена на 135 стор. машинописного тексту.

II. Зміст роботи.

У вступі проводиться огляд робіт, присвячених двопараметричним стохастичним інтегральним рівнянням і стисло викладено зміст роботи.

Перша глава складається з трьох параграфів. Параграф I.I носить допоміжний характер. В ньому подані означення двопараметричного мартингалу, мартингальної міри на площині і твердження про деякі їх властивості, будуються звичайні і змішані інтеграли за ними, виписуються оцінки для других моментів від цих інтегралів.

В § I.2 розглядається питання існування та єдиності сильних розв'язків рівнянь, що мають вигляд

$$\xi(z) = \chi(z) + \sum_{i=1}^{3} J_i(z, \xi), \qquad (I)$$

де

$$J_1(z,\xi) = \int_0^x \int_0^y a(s,t;\xi(s,t))\,\alpha(ds,dt);$$

$$J_2(z,\xi) = \int_0^x \int_0^y \big(B_1(s,t;\xi(s,t))\,\beta(ds,t)\,dt + B_2(s,t;\xi(s,t))\,\beta(s,dt)\,ds +$$

$$+ B_2(s,t;\xi(s,t))\beta(ds,dt));$$

$$J_3(z,\xi) = \int_0^x\int_0^y\int_{\Theta} \big(c_1(s,t;\xi(s,t);\theta)\mu(ds,t,d\theta)dt +$$

$$+ c_2(s,t;\xi(s,t);\theta)\mu(s,dt,d\theta)ds +$$

$$+ c_3(s,t;\xi(s,t);\theta)\mu(ds,dt,d\theta)\big).$$

Тут $a(z,g)$, $B_i(z,g)$, $c_i(z,g,\theta)$, $i=\overline{1,3}$ - випадкові функції, які визначені на $\Omega\times\Delta_0\times R^d$, $\Omega\times\Delta_0\times R^d\times\Theta$ ($\Delta_0=[0,1]^2$) і приймають значення із R^d ($a(z,g)$, $c_i(z,g,\theta)$, $i=\overline{1,3}$) і $L(R^{d_1},R^d)$ ($B_i(z,g)$, $i=\overline{1,3}$); $\beta(z)\in\mathcal{M}_2$ і приймає значення в R^{d_1}; $\langle\beta\rangle(z)$, $\langle\beta\rangle^i(z)$, $i=1,2$ м.н. неперервні; $\mu(z,\cdot)$ - мартингальна міра на площині з неперервною м.н. слабкою характеристикою $\pi(z,\cdot)$ і неперервними м.н. напівхарактеристиками $\pi_1(z,\cdot)$ і $\pi_2(z,\cdot)$; $\alpha(z)$ - узгоджене, м.н. неперервне, зростаюче поле з вариацією на $\Delta_z=[0,z]$ - $|\alpha|(z)$. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - певний ймовірністний простір, на якому, якщо не зумовлено протилежне, розглядаються всі випадкові об'єкти, $\{\mathcal{F}_z\}$ - течія σ-алгебр, що задовольняють звичайним вимогам.

Розглянемо неперервне зростаюче поле:

$$|\alpha|(z) + S_p\langle\beta\rangle(z) + \int_0^x S_p\langle\beta\rangle^2(s,y)ds + \int_0^y S_p\langle\beta\rangle^1(x,t)dt +$$

$$+ \int_0^y\int_{\Theta}\varphi_1(\theta)\pi_1(x,t,d\theta)dt + \int_0^x\int_{\Theta}\varphi_2(\theta)\pi_2(s,y,d\theta)ds +$$

$$+ \int_{\Theta}\varphi_3(\theta)\pi(x,y,d\theta) = \rho(x,y),$$

де $\varphi_i(\theta)$, $i=\overline{1,3}$ такі, що відповідні інтеграли в даному виразі - скінченні. Нехай:

$$\Gamma_1(z,A)=\frac{\Pi_1(dx,y,A)dy}{\rho(dx,dy)}\ ;\qquad \Gamma_2(z,A)=\frac{\Pi_2(x,dy,A)dx}{\rho(dx,dy)}\ ;$$

$$\Gamma_3(z,A)=\frac{\Pi(dx,dy,A)}{\rho(dx,dy)}$$

Основним результатом даного параграфу є наступна теорема.

Теорема I.2.

I. Припустимо, що:

а) коефіцієнти $a(z,g)$, $B_i(z,g)$, $c_i(z,g,\theta)$, $i=\overline{1,3}$, задовольняють разом з вимогою вимірності вимоги лінійної обмеженості і Липшиця;

в) $\chi(z)\prec \mathcal{F}_z$, $z\in\mathcal{D}_0$, $M\sup\limits_{z\in\mathcal{D}_0}|\chi(z)|^2<\infty$ і реалізації $\chi(z)$ з імовірністю 1 належать $D_2(\mathcal{D}_0, R^d)$ - простору полей без розривів другого роду із значеннями в R^d.

с) $\rho(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y h(s,t)\,ds\,dt$, де $h(z)\prec \mathcal{F}_z$ і $h(z)$ неперервна з імовірністю I.

Тоді рівняння (I) має розв'язок $\xi(z)$, який $\mathcal{F}_z$ - погоджений і не має розривів другого роду.

2. Якщо разом з умовами а) -с) виконується умова:

$d)$ $|h(z)|\le K$, $\forall z\in\mathcal{D}_0$;

то $M\sup\limits_{z\in\mathcal{D}_0}|\xi(z)|^2<\infty$ і розв'язок $\xi(z)$ - единий м.н.

Установлено також деякі оцінки для розв'язку рівняння (I) і теорему I.2 узагальнено на рівняння вигляду (I), але з коефіцієн тами, що залежать від "минулого".

В § I.3 приведено означення слабкого розв'язку рівняння I, встановлено слабку компактність мір, які відповідають розв'язкам рівнянь вигляду (I) і доведено основний результат цього параграфу - теорему про існування слабкого розв'язку рівняння (I).

Теорема I.7. Нехай коефіцієнти рівняння (I) задовольняють вимоги вимірності, лінійної обмеженості, а також умови:

I) функція $a(z,g)$ неперервна за g при всіх $z\in\mathcal{D}_0$ майже при всіх ω і стохастично неперервна за z при всіх g;

2) функції $B_i(z,g)$, $i=\overline{1,3}$, неперервні за g при всіх $z\in\mathcal{D}_0$ у середньому квадратичному і стохастично неперервні за z для всіх g;

3) існують такі σ - скінченні невипадкові міри $m_i(d\theta)$, що

$$\Gamma_i(z,A)=\int\limits_A \varphi_i(z,\theta)\,m_i(d\theta),$$

де $\varphi_i(z,\theta)$ — $\mathcal{P}\times\mathcal{E}$ - вимірні обмежені функції ($\mathcal{E}$ - $\mathfrak{S}$ - алгебра множин із Θ), $i=\overline{1,3}$;

$c_i(z,g,\theta)$ стохастично неперервні за z при фіксованому g в $L_2(m_i;\Theta)$ і неперервні у середньому квадратичному за g в $L_2(m_i;\Theta)$ при фіксованому z , $i=\overline{1,3}$;

4) функція $\chi(z)=\varphi(x)+\psi(y)$ задовольняє умову:

$$\lim_{h\to 0}\Big[P\Big\{\sup_{|x'-x|\le h}|\varphi(x')-\varphi(x)|\geq \varepsilon\Big\}+ \\ +P\Big\{\sup_{|y'-y|\le h}|\psi(y')-\psi(y)|\geq\varepsilon\Big\}\Big]=0$$

а функція $\rho(z)$ - умови c) і d) теореми I.2.

Тоді рівняння (I) має слабкий розв'язок.

Глава 2 дисертації присвячена доведенню граничних теорем для розв'язку рівнянь вигляду (I) , що залежать від параметру, досліджується диференційовність розв'язків за параметром і їх інтегральна неперервність за параметром. Розглядаються також питання про скінченнорізницеві апроксимації розв'язків і про збіжність за розподілами послідовності випадкових полей до розв'язків рівнянь. Глава складається з чотирьох параграфів.

Центральною для § 2.I є наступна теорема.

Теорема 2.I. Нехай для послідовності рівнянь

$$\xi_n(z)=\chi_n(z)+\mathcal{J}_{n,n}(z,\xi_n)= \\ =\chi_n(z)+\sum_{i=1}^{3}\mathcal{J}^i_{n,n}(z,\xi_n)$$

виконуються умови:

I) умови a), c) і d) теореми I.2;

2) для полей $\chi_n(z)$, $z\in\mathcal{Z}_0$ виконуються умови в) теореми I.2 і умова

$$\lim_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{z\in\mathcal{Z}_0}|\chi_n(z)-\chi_0(z)|>\varepsilon\Big\}=0;$$

3) $$\lim_{n\to\infty}M\Big\{\sup_{\substack{|g|\le R\\ z\in\mathcal{Z}_0}}\Big(|a_n(z,g)-a_0(z,g)|^2+ \\ +\sum_{i=1}^{3}\Big(\|B^n_i(z,g)-B^0_i(z,g)\|^2+\int_{\Theta}|c^n_i(z,g,\theta)- \\ -c^0_i(z,g,\theta)|^2\,\Gamma_i(z,d\theta)\Big)\Big\}=0,\quad\forall R>0;$$

4) для всіх $z \in \mathcal{D}_0$ $|\alpha_n - \alpha_0|(z) \to 0$ за ймовірністю при $n \to \infty$;

5) характеристики і напівхарактеристики двопараметричного мартингала $\beta_n(z) - \beta_0(z)$ і мартингальної міри $\mu_n(z,\cdot) - \mu_0(z,\cdot)$ збігаються до нуля у середньому при $n \to \infty$ для всіх $z \in \mathcal{D}_0$;

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_{z\in\mathcal{D}_0} |\xi_n(z) - \xi_0(z)| > \varepsilon\right\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Аналогічний результат має місце для рівнянь, які залежать від неперервного параметру, а також одержано аналогічні результати для рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від "минулого".

В § 2.2 , використовуючи результати § 2.I , доведено теорему про існування похідної за параметром від розв'язку двопараметричного стохастичного інтегрального рівняння вигляду (I) і виписано стохастичне рівняння, якому задовольняє ця похідна.

В § 2.3 будуються скінченнорізницеві апроксимації Ейлера для розв'язків рівнянь вигляду (I), доводиться збіжність цих апроксимацій до розв'язку рівнянь. З використанням одержаних результатів доводиться теорема про інтегральну неперервність за параметром розв'язків. Як приклад одержано один із варіантів принципу усереднення для двопараметричних стохастичних інтегральних рівнянь:

$$\xi(z) = \int_0^x \varphi(\tau)d\tau + \int_0^y \psi(\tau)d\tau + \int_0^x\int_0^y \Big(a(s,t;\xi(s,t))ds\,dt +$$

$$+ B(s,t;\xi(s,t))\beta(ds,dt) + \int_{\Theta} c(s,t;\xi(s,t);\theta)\mu(ds,dt,d\theta)\Big).$$

В § 2.4 розглядається послідовність випадкових полей $\xi_n(z)$, які приймають значення в R^d , мають регулярні траєкторії, визначені на різних імовірнісних просторах і які задовольняють умову:

$$M \sup_{z\in\mathcal{D}_0} |x_n(z)|^2 < c,$$

де $\chi_n(z) = \xi_n(x,0) + \xi_n(0,y) - \xi_n(0,0)$.

Для цих полей встановлено зображення вигляду:

$$\Delta\xi^n_{rq} = a^n_{rq}\,\Delta x^n_r\,\Delta y^n_q + B^n_{rq}\,\Delta\psi^n_{rq} + \int_\Theta f^n_{rq}(\theta)\mu^n_{rq}(d\theta) + \alpha^n_{rq},$$

де α^n_{rq}, $f^n_{rq}(\theta)$, a^n_{rq}, B^n_{rq} – $\mathcal{F}^n_{rq}$ - вимірні випадкові величини, перші три з них приймають значення в R^d, а B^n_{rq} – оператори, які відображають R^d в R^d; $\Delta\psi^n_{rq}$ – послідовність випадкових величин, які приймають значення в R^d і мають скінченні моменти другого порядку; $\mu^n_{rq}(d\theta)$ – послідовність випадкових мір, які теж мають скінченні моменти другого порядку; α^n_{rq} – певні випадкові величини, "малі" в порівнянні з $\Delta\xi^n_{rq}$.

При певних припущеннях, які в цілому аналогічні однопараметричному випадку, доведено, що поля $\xi_n(z)$ слабо збігаються за розподілами до розв'язку стохастичного рівняння:

$$\xi(z) = \chi(z) + \int_0^x\int_0^y \big(a(s,t;\xi(s,t)\big)ds\,dt +$$

$$+ B(s,t;\xi(s,t))\,W(ds,dt) + \int_\Theta f(s,t;\xi(s,t),\theta)\,\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta), \qquad (2)$$

де $W(x,y)$ – вінерівське поле, а $\tilde{\nu}(dx,dy,d\theta)$ – центрована пуассонівська міра на площині, $M\tilde{\nu}^2(dx,dy,d\theta) = m(d\theta)dx\,dy$

Основні результати третьої глави базуються на узагальненій формулі Іто для семимартингалів на площині, яка одержана Ю.С.Мішурою.

В § 3.I, застосовуючи цю формулу при виконанні умов, які аналогічні однопараметричному випадку, доведено, що поле $\rho(x,y) = \exp\{\xi(x,y)\}$ має вигляд:

$$\rho(x,y) = \exp\Big\{\int_0^x\int_0^y \beta(s,t)W(ds,dt) + \int_0^x\int_0^y\int_\Theta \psi(s,t,\theta)\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta) -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y |\beta(s,t)|^2 ds\,dt - \int_0^x\int_0^y\int_\Theta \big(e^{\psi(s,t,\theta)} - 1 - \psi(s,t,\theta)\big)m(d\theta)ds\,dt,$$

де

$$\xi(x,y) = \int_0^x\int_0^y \alpha(s,t)\,ds\,dt + \int_0^x\int_0^y \beta(s,t)\,w(ds,dt) + \int_0^x\int_0^y\int_{\Theta} \psi(s,t,\theta)\,\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta)$$

Також в цьому параграфі доведено, що для того, щоб мартингальне поле

$$\gamma(z) = \int_0^x\int_0^y \beta^*(s,t)\,w(ds,dt) + \int_0^x\int_0^y\int_{\Theta} \varphi(s,t,\theta)\,\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta),$$

що задане на ймовірністному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ перетворити в мартингальне поле на просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P^*\}$, де $dP^*/dP = 1$, достатньо до нього додати поле

$$\int_0^x\int_0^y \alpha^*(s,t)\,ds\,dt,$$

де $\alpha^*(z)$ задовольняе рівнянню

$$\alpha^*(z) = -\beta(z)\cdot\beta^*(z) - \int_{\Theta} \left(e^{\psi(z,\theta)} - 1\right)\varphi(z,\theta)\,m(d\theta).$$

В § 3.2 доведено, застосовуючи результати § 3.І., що при виконанні ряду умов міра $\mu^*(\cdot)$, яка відповідае полю $\xi^*(z)$ на просторі полей без розривів другого роду, де $\xi^*(z)$ виходить із (2) заміной $x \to x^*$, $a \to a^*$, $w \to w^*$, $f \to f^*$, $\tilde{\nu} \to \tilde{\nu}^*$, абсолютно неперервна відносно міри $\mu(\cdot)$, яка відповідае розв'язку рівняння (2) на просторі полей без розривів другого роду.

Автор глибоко вдячний своему науковому керівнику доктору фізико-математичних наук Мішурі Юлії Степанівні за постійну підтримку і увагу до роботи.

Основні результати надруковано в роботах:

I. Шурко Г.К. Об интегральной непрерывности по параметру решения одного двупараметрического интегрального уравнения. XXI Всесоюз. шк.-кол. по теории вероятности и матем. стат. Тез. докл., с.52, Тбилиси, 1987.

2. Шурко Г.К. Интегральная непрерывность по параметру решений одного класса двупараметрических стохастических интегральных уравнений. Деп. Укр НИИНТИ 25.09.87, № 2732-Ук 87, Донецк, ДонГУ, 1987, 27 с.

3. Шурко Г.К. О сходимости решений одного класса двупараметрических стохастических интегральных уравнений. Теория случ. процессов, 1988, в. 16, с. 97 - 105.

4. Шурко Г.К. Абсолютная непрерывная замена меры в двупараметрическом стохастическом интегральном уравнении. Вторая Донецкая конференция "Вероятностные модели процессов в уравнении и надежности". Тез. докл., с. 72, Донецк, 1990.

Основні результати надруковано в роботах:

1. Бурко Г.К. Об интегральной непрерывности по параметру решения одного двупараметрического интегрального уравнения. XII Всесоюзн. школа по теории вероятностей и матем. статист. Тез. докл., с.52, Тбилиси, 1987.

2. Бурко Г.К. Интегральная непрерывность по параметру решений одного класса двупараметрических стохастических интегральных уравнений. Деп. в УкрНИИНТИ 25.09.87, № 2732-Ук 87, Донецк, ДонГУ, 1987, 27 с.

3. Бурко Г.К. О сходимости решений одного класса двупараметрических стохастических интегральных уравнений. Теория случ. процессов, 1990, вып.18, [illegible]

4. Бурко Г.К. Абсолютная непрерывность пленеа меры в двупараметрическом стохастическом интегральном уравнении. Тезисы Донецкой конференции "Вероятностные модели процессов в управлении и надежности". Тез. докл., с. [illegible], Донецк, [illegible]

Підп. до друку 05.04.93. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Папір друк. № 2. Офсетний друк. Умовн. друк. арк. 0,70 Умовн. фарб.-відб. 0,81. Облік.-вид. арк. 0,60 Тираж 100 прим. Замовлення № 4-6817.

252127, м.Київ, проспект академіка Глушкова, 6

ДМОПП, 340050, Донецьк, вул. Артема, 96

465035