

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ПРОС ВІКТОР МИХАЙЛОВИЧ

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ p -ГРУП
НАД ДЕЯКИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

01.01.06 - математична логіка, алгебра і теорія чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

ЛНА ім. В. Стефа
НА України



00814767 (X)

Робота виконана у відділі алгебри Інституту математики АН України та кафедрі алгебри Ужгородського державного університету.

Наукові керівники – доктор фізико-математичних наук,
професор ГУДИВОК П.М.

– доктор фізико-математичних наук,
професор РОЙТЕР А.В.

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук,
професор КИРИЧЕНКО В.В.

– кандидат фізико-математичних наук,
ст. наук. співробітник
БОНДАРЕНКО В.М.

Провідна організація – Інститут кібернетики АН України

Захист відбудеться " 7 " червне 1993р. о 14⁰⁰
годині на засіданні спеціалізованої ради 20.01.01
по присудженню ученого ступеня доктора фізико-математичних
наук в Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адре-
сою: 252¹²⁷, Київ-127, проспект академіка Глушкова, д. 6,
механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київ-
ського університету ім. Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий " 5 " травне 1993 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради

Оле

ОВСІЄНКО С.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія зображень скінченних груп над комутативними кільцями почала інтенсивно розвиватись в 50-ті роки. Марандюк, Гріном, Хеллером, Д.К.Фаддеевим, З.І.Боревичем та ін. були започатковані основи локальної теорії цілочислових зображень скінченних груп. Зокрема, З.І.Боревич і Д.К.Фаддеев довели справдливність теореми Крулля-Шмідта для зображень скінченних груп над нетеровими повними локальними кільцями.

На початку 60-х років зусиллями С.Д.Бермана, П.М.Гудивка, А.В.Рейтера, Райнера і Хеллера була розв'язана задача про число $n(\mathbb{Z}_p G)$ нееквівалентних нерозкладних зображень скінченної групи G над кільцем \mathbb{Z}_p цілих p -адичних чисел. Виявилося, що число $n(\mathbb{Z}_p G)$ скінченне тоді і тільки тоді, коли символічна p -підгрупа групи G є циклічною групою порядку p^r ($r \leq 2$). Аналогічна задача для зображень скінченних груп над повним дискретно нормованим кільцем розв'язана П.М.Гудивком і Якобінським. Л.О.Назарова і А.В.Яковлев описали відповідно всі нерозкладні \mathbb{Z}_2 -представлення четвірної групи і циклічної групи восьмого порядку.

Скінченна група G називається дикою над комутативним кільцем K з одиницею, якщо описання з точністю до K -еквівалентності матричних K -зображень групи G включає задачу класифікації з точністю до подібності пар $n \times n$ -матриць над деяким полем F (n - довільне натуральне число).

П.М.Гудивок показав, що скінченна p -група G не є дикою над кільцем \mathbb{Z}_p тоді і тільки тоді, коли виконується одна із

умов:

- 1) G - абелева група типу $(2,2)$;
- 2) G - циклічна група порядку p^r ($r \leq 2, p > 2$);
- 3) G - циклічна група порядку 2^r ($r \leq 3$).

У даній дисертаційній роботі вивчаються зображення скінченних p -груп над кільцем формальних степеневих рядів від багатьох змінних з цілими p -адичними коефіцієнтами, а також над деякими факторіальними кільцями.

Мета роботи. Вивчення питання про дикість скінченної p -групи над кільцем $\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_m]]$ формальних степеневих рядів від змінних x_1, \dots, x_m з коефіцієнтами із кільця \mathbb{Z}_p , а також дослідження незвідних зображень скінченної p -групи G порядку $|G| > 1$ над нетеровими факторіальними кільцями характеристики $p > 0$, які не є областями головних ідеалів.

Методика дослідження. В роботі використовуються методи і техніка теорії цілочислових зображень скінченних груп.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі повністю розв'язана задача про дикість скінченної p -групи над кільцем формальних степеневих рядів від багатьох змінних з цілими p -адичними коефіцієнтами.

Описані всі нееквівалентні нерозкладні $\mathbb{Z}_p[[x]]$ -зображення циклічної групи порядку p .

У роботі також показано, що для довільного натурального числа n існує незвідне L -зображення скінченної p -групи

G порядку $|G| > 1$ степеня n (L - нетерове факторіальне кільце характеристики $p > 0$, яке не є областю головних ідеалів).

Крім цього доведено, що існує нескінченне число неспряжених силовських p -підгруп групи $GL(n, L)$ ($n > 1$).

Теоретична і практична цінність. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в теорії зображень скінченних груп, а також при читанні спеціальних курсів з алгебри.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на XIX Всесоюзній алгебраїчній конференції (Львів, 1987 р.), XI Всесоюзному симпозиумі з теорії груп (Свердловськ, 1989 р.), а також на алгебраїчних семінарах Ленінградського відділу математичного інституту ім. В.А.Стеклова АН СРСР і Ужгородського державного університету.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 5 робіт, список яких приведений в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, трьох параграфів і списку використаної літератури. Загальний об'єм роботи складає 54 сторінки машинописного тексту. Бібліографія вміщує 42 назви. Використовується послідовна нумерація тверджень.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дано короткий огляд робіт по темі дисертації, обґрунтована актуальність теми і коротко сформульовано основні результати роботи.

У першому параграфі дисертаційної роботи дається повне описання зображень циклічної групи порядку p над кільцем формальних степеневих рядів від одної змінної з цілими p -адичними коефіцієнтами. Доведена наступна

Т е о р е м а 1. Нехай $H = \langle a \rangle$ - циклічна p -група порядку p і $K_p = \mathbb{Z}_p[[x]]$. З точністю до K_p -еквівалентності всі нерозкладні матричні K_p -зображення групи H вичерпуються наступними зображеннями:

$$\Delta_1: a \rightarrow 1; \Delta_2: a \rightarrow \tilde{\varepsilon}; \Gamma_i: a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & A_i \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (i \in \mathbb{N} \setminus \{0\});$$
$$\Gamma'_j: a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & B_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}),$$

де $\tilde{\varepsilon}$ - матриця, яка відповідає оператору множення на ε в K_p -базисі $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-2}$ кільця $K_p[[\varepsilon]]$ (ε - первісний корінь степеня p із 1); $A_i = (0, \dots, 0, x^i)$; B_j - матриця, транспонована до матриці $(x^j, 0, \dots, 0)$; \mathbb{N} - множина натуральних чисел.

Нехай $\Gamma: a \rightarrow \Gamma(a)$ - матричне K_p -зображення групи $H = \langle a \rangle$. Зображення Γ можна записати у вигляді

$$a \rightarrow \Gamma(a) = A + x^\tau B, \quad \tau \geq 0,$$

де A - матриця над \mathbb{Z}_p , а B - така матриця над K_p , що

$B=0$ при $r=0$ і $B \neq 0 \pmod{xK_p}$ при $r \geq 1$. З використанням вигляду Z_p -зображень $\Delta: \alpha \rightarrow A$ групи H , описаних Дідеріксенем, доведення теореми 1 зводиться до послідовного розв'язання ряду матричних задач над кільцем K_p .

Зазначимо, що для $Z_p[[x_1, \dots, x_m]]$ -зображень скінченної групи G справедлива теорема Крулля-Шмідта. Тому достатньо описувати тільки нерозкладні $Z_p[[x_1, \dots, x_m]]$ -зображення групи G .

У другому параграфі роботи вивчаються зображення скінченної p -групи над кільцем формальних степеневих рядів від багатьох змінних з цілими p -адичними коефіцієнтами.

Розв'язане питання про дикість скінченної p -групи над кільцем $K_p^{(m)} = Z_p[[x_1, \dots, x_m]]$. Доведена наступна

Т е о р е м а 2. Скінченна p -група G порядку $|G|$ є дикою над кільцем $K_p^{(m)}$, якщо виконується одна із наступних умов:

- 1) $|G| > p, m=1$; 2) $|G| > 1, m > 1$.

Доведення зводиться до розгляду ряду випадків. Для кожного з них будуються відповідні $K_p^{(m)}$ -зображення, за допомогою яких показується, що описання з точністю до $K_p^{(m)}$ -еквівалентності матричних $K_p^{(m)}$ -зображень групи G включає задачу про пару матриць над деяким полем F .

Таким чином, в §1 і §2 показано, що описання нееквівалентних $K_p^{(m)}$ -зображень скінченної p -групи G порядку $|G| > 1$ не включає в себе задачу про пару матриць тоді і тільки тоді, коли G - циклічна група порядку p і $m=1$.

Нехай H - скінченна група, L - область цілості з одиницею і \tilde{L} - поле відношень кільця L . Якщо L є областю

головних ідеалів, то відомо, що матричне L -зображення групи H є звідним тоді і тільки тоді, коли воно звідне над полем \tilde{L} . Звідси випливає, що в цьому випадку степені незвідних L -зображень групи H не перевищують її порядку. У випадку, коли L не є областю головних ідеалів вищеприведене твердження не має місця.

Нехай H - скінченна p -група порядку $|H| > 1$, K - нетерове факторіальне кільце характеристики $p > 0$, яке не є областю головних ідеалів. У третьому параграфі роботи показано, що існують незвідні матричні K -зображення групи H як завжди високого степеня n . Доведена

Т е о р е м а 3. Нехай H - скінченна p -група порядку $|H| > 1$ і K - нетерове факторіальне кільце характеристики $p > 0$, яке не є областю головних ідеалів. Для довільного натурального числа n існує незвідне K -зображення групи H степеня n .

Зазначимо, що при доведенні теореми будуються в явному вигляді незвідні K -зображення степеня n циклічної групи H порядку p .

У даному параграфі досліджується також питання про число силовських p -підгруп групи $GL(n, K)$ ($n > 1$).

Як відомо, якщо L - область головних ідеалів характеристики p , то довільна силовська p -підгрупа групи $GL(n, L)$ спряжена з унітрикутною групою $UT(n, L)$. У випадку, коли L не є областю головних ідеалів, дане твердження не має місця.

Т е о р е м а 4. Існує нескінченне число неспряжених силовських p -підгруп групи $GL(n, K)$ ($n > 1$), де K - нетерове факторіальне кільце характеристики $p > 0$, яке не є об-

ластю головних ідеалів.

Доведення теореми 4 ґрунтується на побудові серії неспряжених силовських p -підгруп групи $GL(n, K) (n > 1)$ за допомогою незвідних K -зображень циклічної групи H порядку p , описаних в теоремі 3.

Зауважимо, що результати третього параграфу узагальнюють аналогічні результати, одержані П.М.Гудивком і Є.Я.Погоріляк у випадку, коли $L = F[x_1, \dots, x_m]$ - кільце поліномів від m змінних x_1, \dots, x_m з коефіцієнтами із поля F характеристики $p > 0$.

Основні результати, отримані в дисертації, опубліковані в наступних роботах:

1. Гудивок П.М., Орос В.М., Ройтер А.В. О представлениях конечных p -групп над кольцом формальных степенных рядов с целочисленными p -адическими коэффициентами // В кн.: XI Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы сообщ. - Свердловск, 1989. - С. 39.
2. Гудивок П.М., Орос В.М., Ройтер А.В. О представлениях конечных групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p -адическими коэффициентами // Докл. АН УССР. - 1990. - 314, 315. - С. 49-52.
3. Гудивок П.М., Орос В.М., Ройтер А.В. О представлениях конечных p -групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p -адическими коэффициентами // Укр. матем. журн. - 1992. - 44, №. - С. 758-765.
4. Орос В.М. О модулярных неприводимых представлениях конечных p -групп над нетеровыми факториальными кольцами // В кн.:

Д-р ін. В. Стефан
АН України

XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщ. -
Львов, 1987. - Ч. I. - С. 207.

6. Орос В. М. О силовских p -подгруппах полной линейной группы
над нетеровыми факториальными кольцами // Деп. в УкрНИИТИ.
- 1989. - № 627-Укр89. - С. 8.

Зам. № 198. Тир. 100. Ксерокс-лабораторія "Aqua bild",
м. Ужгород-17, вул. Насипна, 24

As 57.504

468364

Ав 27.204

III Всесоюзная конференция

Львов, 1987. -- Ч.1. -- С.207.

6. Орос Е.А. О цикловых ρ -подгруппах простой левинской группы над алгебрами факториальных колец // Док. в Харьк. Ун-те. 1989. -- 5 с. -- Укр. -- С.8.

Ин-т Мат. Наук НАН Украины-лабораторія "Групи ліній"
Львівський ун-т. Львів, 24

Бібліотека ім. В. Стефани
АН України

202204