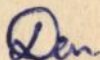


ВІННИЦЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

На правах рукопису

ДАНИЛОВ ВАЛЕРІЙ ЯКОВИЧ



МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА  
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ГІДРОАКУСТИЦІ

Спеціальність: 05.13.16 - застосування обчислювальної  
техніки, математичного моделювання та  
математичних методів в наукових  
дослідженнях

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук  
у формі наукової доповіді

Вінниця 1993



Робота виконана в КБ "ЛННБ України" 00814704 (O)

Офіційні опоненти: доктор фіз.-мат.наук, проф.  
 Єгоров О.І..  
 Доктор техн.наук, проф.  
 Волков О.А.  
 доктор техн.наук, проф.  
 Щербак Л.М.


Провідна установа : Інститут кібернетики  
 імені В.М.Глушкова АН України

Захист відбудеться "29" травня 1993 р. о 9<sup>30</sup>  
 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 068.34.01  
 в Вінницькому політехнічному інституті за адресою: 286021,  
 м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 96.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Вінницького  
 політехнічного інституту

Дисертація розіслана "28" квітня 1993р.

Вчений секретар спеціалізованої  
 вченої ради

  
 Колодний В.В.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Останнім часом в зв'язку з розв'язуванням проблем далекого акустичного зондування і акустичної томографії виникла необхідність розробки методів та побудови на їх основі гідроакустичних інформаційно-виміривальних систем для розв'язування широкого кола взвємопов'язаних задач формування заданих структур акустичних полів, синтезу гідроакустичних антен та побудови відображень розсіюючих об'єктів.

Проблемою є розв'язування задачі перерахунку звукового поля в дальню зону за вимірами в ближньому полі для хвилеводів різної конфігурації, а також задачі визначення шумності випромінюючих об'єктів в широкому діапазоні частот.

Фундаментальні теоретичні та експериментальні дослідження в цих напрямках виконані в АКІНі, ІЗФ РАН, НДІ "Славутич", ІК АНУ, ЦНДІ ім. А.Н. Крилова та інших організаціях. До них слід віднести дослідження Бреховських Л.М., Смарішева Н.Д., Гусева В.Г., Шербака Л.Н., Кравцова Д.А., Єлісеєвнина В.А., Кузькіна В.М., Бурова В.А., Таланова В.И., Бородіна В.В., Зверева В.А., Самойленка Д.І. та інших. З іноземних авторів слід відзначити Лавала Р., Лабаска І., Уїдроу В., Фроста О., Монзінго Р. та інших.

В більшості випадків при постановці і розв'язуванні задач моделювання процесів фільтрації та прогнозу стану звукових полів в неоднорідних середовищах, створенні програмного забезпечення та технічних пристроїв для визначення координат джерел, визначення параметрів середовища, формування розвиненими апертурами акустичних полів, що мають задані властивості, розв'язування задач гасіння звукових коливань і т.п., необхідно враховувати наявність невизначених факторів та властивостей оточуючого середовища для побудови гарантованих оцінок та керування.

Розвитку мінімаксного підходу до задач оцінювання та керування присвячені роботи Бублика Б.М., Наконечного О.Г., Кириченка М.Ф., Пшеничного Б.М., Іваненка В.І., Мельника В.С., Єгорова О.Г., Волкова О.А та інших.

Проте, використання цього підходу до задач керування гідроакустичними полями в океанічних хвилеводах в лінійній та нелінійній постановках, а також його розвиток для

розв'язування задач просторової обробки присвячені одиничні публікації. В зв'язку з цим створення теоретичних основ використання цього підходу до задач оптимізації в акустиці та одержання гарантованих результатів є актуальною проблемою.

Ціль, мета і завдання досліджень. Метою проведених досліджень є: розробка наукових та технічних основ створення автоматизованих систем обробки та інтерпретації результатів натурних і модельних гідроакустичних експериментів для вдосконалення методів знаходження класифікації та цілеспрямування; розробка акустичних моделей регіонів, математичних методів і на їх основі інженерних методик розв'язування задач оцінювання шумності об'єктів; локалізація зон підвищеного шумовипромінювання елементів конструкції на корпусі та ідентифікації їх джерел з урахуванням природи океанічних хвильоводів; розробка системного та прикладного матабезпечення; розробка рекомендацій по складу та архітектурі технічних засобів гідроакустичних комплексів на базі сучасних ЕОМ.

Наукова новизна та значимість роботи. В роботі вперше з позицій теорії оптимального керування та оптимізації застосований системний підхід до аналізу процесів поширення звукових хвиль в океанічних хвильоводах на основі рівнянь акустики, що містить в собі визначення цілей системи обробки: розробку методів оцінювання звукових полів, інтенсивності випромінювачих джерел, їх координат; методик визначення і локалізації джерел шумності досліджуваних об'єктів з врахуванням особливостей полігону по вимірах звукового тиску і його градієнтних характеристик гідроакустичними антенами; уточнення та синтез теоретичних моделей явищ поширення звукових хвиль на основі засвоєння даних гідроакустичних експедицій спланованих експериментів в регіонах впровадження систем обробки в широкому діапазоні частот; візуалізацію результатів обробки на сучасних засобах

Для розв'язування задачі далекого дистанційного зондування в природному водному середовищі запропонований метод синтезу гідроакустичних антен, що формуєть звукові

поля з заданими властивостями по тиску, амплітуді, фазі, енергії, градієнтних характеристиках тощо.

На основі синтезованих законів керування в хвилюводах заданих регіонів вивчені можливості сканування звуковими полями, досліджені вплив параметрів середовища та частоти на формування заданих звукових полів, знайдені кількісні характеристики та оцінки, що дають можливість виробити вимоги для побудови таких антен.

Крім того, застосування підходу сканування в ближній зоні з урахуванням хвилюводу дозволило розробити відповідну методіку, вклучення якої в математичне забезпечення відповідної ДКР сприяло виявленню та локалізації зон підвищеної шумності на розподіленому об'єкті.

Новизну являє собою алгоритмічне та математичне забезпечення в частині наповнення автоматизованих систем обробки результатів натурних та модельних гідроакустичних експериментів по аналізу сигнально-шумової ситуації заданого регіону, що вклучає в себе комплекси програм розв'язування рівняння Гельмгольца в заданих областях на основі модового та променевого підходу, а також параболічного наближення для швидкого розрахунку звукових полів та енергетичних характеристик (потоків акустичної потужності).

Для розв'язування задачі перерахунку звукового поля в зону Фраунгофера (дальню зону) по вимірюванню в зоні Френеля (ближній зоні) широко користуються формулою Кірхгофа, що неприпустимо як для хвилюводів, так і для інфразвукового діапазону частот. Тому, для перерахунку поля в дальню зону, побудови індикатриси розсіювання був запропонований метод, що враховує хвилювод і підвищує ефективність системи обробки гідроакустичної інформації по виявленню та локалізації джерел підвищеної шумності.

Для створення математичного забезпечення, підвищення надійності та вдосконалення методів знаходження координат цілеспрямування та класифікації шумових об'єктів розроблена концепція одержання гарантованого результату на основі мінімаксного підходу, коли випадкові збурення в рівняннях моделей та в результатах вимірів є випадковими процесами з певними характеристиками. Це дає змогу знайти грубі гарантовані оцінки координат.

Крім того, запропоновано методи розв'язування задач керування рівняннями гідроскустики в звичайній та нелінійній постановці.

Використані методи. В проведених дослідженнях та розробках широко використовувались методи функціонального та наближеного аналізу, мінімаксного керування та оцінювання. Проводились чисельне моделювання, обробка гідроскустичної і віброінформації з використанням спецобладнання та ЕОМ.

Практична цінність результатів та впровадження. Практична цінність досліджень полягає в розробці нових методів, підходів та математичного забезпечення для знаходження, класифікації та цілеспрямування координат шумових гідроскустичних об'єктів в системах автоматизованої обробки акустичної інформації.

Результати теоретичних розробок доведено до алгоритмічного рівня, проведено широке математичне моделювання по адаптації використовуваних моделей поширення звуку на основі результатів експедицій для аналізу сигнально-шумової обстановки в вибраному районі та частотному діапазоні.

Запропоновані способи визначення координат об'єктів в ближній та дальній зонах; мінімаксні методи обробки гідроскустичної інформації та синтезу антен реалізовані у вигляді методик та відповідного математичного забезпечення і ввійшли як складові частини важливих держбюджетних, госпдоговірних та дослідно-конструкторських розробок "Кола", "Міранда-УВО", "Міранда-2-УВО", "Мінерал", "Бензол", "Сангар", "Вимірвач", "Альдебярв", "Мезень" та інших, виконаних КБ "Шторм", Київським університетом ім.Т.Шевченка, Інститутом загальної фізики РАН (м.Москва) в період з 1979 по 1992 роки. Це:

- алгоритми та програми по визначенню полів та їх характеристик океанічних хвилеводів модовим методом, променевим методом та методом параболічного рівняння;

- метод аналізу та синтезу акустичних полів лінійних антен, що мають задані властивості;

- алгоритми та програми по визначенні координат джерел в хвилеводі на основі мінімаксних методів оцінки

інтенсивності джерел та власних функцій при неповних даних векторних антен;

- метод та комплекс програм визначення зон підвищеної шумності розподіленого об'єкту в ближній зоні;

- метод розрахунку шумності об'єкту в зоні Фраунгофера на основі вимірів в ближній зоні в широкому діапазоні частот.

Для звукового діапазону частот до 500 Гц в основу розробок покладена модова теорія, а більше 500 Гц - променева теорія.

На основі результатів роботи сформульовані загальні вимоги до вибору рекомендацій по складу та архітектурі технічних засобів комплексу обробки гідроакустичної інформації.

Апробація роботи і публікації. Головні концепції, ідеї, положення і результати досліджень доповідались на: Всесоюзних акустичних конференціях та міжгалузевих семінарах по проблемі "Акустика мілкого моря" 1989 р. (Акустичний інститут (АКІН), м.Москва), Всесоюзних конференціях "Числові методи в сучасних хвильових задачах акустики" (АКІН м.Москва, 1988 р.), 4-тій Республіканській конференції "Проблеми гидромеханики в освоєнии Мирового океана" (м.Київ, 1987р.), Всесоюзних конференціях по керуванню в механічних системах (4-та м.Москва, 1982 р. 5-та, м.Казань, 1985 р., 6-та, м.Львів, 1988 р.), Науково-технічній конференції країн СНД "Контроль та керування в технічних системах" (м.Вінниця, 1992 р.), Всесоюзних школах-семінарах "Керування в розподілених системах" (м.Ялта, 1986 р., 1988 р., 1990 р.), Всесоюзній науково-технічній конференції "Актуальні проблеми моделювання і керування системами з розподіленими параметрами" (м.Одеса 1987 р.), 2-й конференції "Техніка і методика акустичного зондування океану" (м.Наманган, 1987 р.), 6-му Всесоюзному з'їзді по теоретичній та прикладній механіці (1986 р., м.Ташкент), Міжнародних радянсько-польських конференціях "Комплексна автоматизація промисловості" (м.Київ, 1986 р., м.Вроцлав, 1988 р., м.Київ, 1990 р.), Міжнародній конференції по диференціальним рівнянням (м.Руссе, Болгарія, 1985 р.), 10-тій Всесоюзній нараді з проблем керування

(м.Алма-Ата, 1988 р.), семінарах лабораторії мілкого моря (ІЛФ РАН м.Москва, 1980-1990 рр.), 7-му Міжнародному семінарі конгресу ІФАК (м.Тбілісі, 1988 р.), Міжнародному радянсько-польському семінарі (м.Мінск, 1989 р.), 5-му Всесоюзному симпозіумі по ідентифікації та метрології (м.Новосибірськ, 1989 р.), Всесоюзній конференції "Математичні методи в еколого-економічних та космічних дослідженнях" (м.Баку, 1989 р.), Республіканському семінарі "Моделювання та оптимізація складних систем" (м.Київ, КУ) на наукових семінарах КУ, ІК АНУ, КПІ.

Основний зміст роботи опублікований в одному учбовому посібнику та публікаціях, які приведені у переліку робіт.

## І. РІВНЯННЯ АКУСТИКИ ТА ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ПРОСТОЇ ОБРОБКИ

### ГІДРОАКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ.

В гідравкустиці звукове поле (звукова хвиля) характеризується такими параметрами: тиском  $P$ , густиною  $\rho$ , трьома складовими швидкості  $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ , та ентропією  $S$ , які задовільняють такі системи нелінійних рівнянь.

$$P = f(\rho, S); \quad (1)$$

$$\vec{P}_t + dtv \rho \vec{V} = 0; \quad (2)$$

$$\rho (\vec{V}_t + (\vec{V} \nabla) \vec{V}) - \nu \Delta \vec{V} + A(\vec{V}) = \vec{f}_1 - \nabla p, \quad (3)$$

де  $A(\vec{V}) = -\text{grad} [(\xi + \nu/3) dtv \vec{V}]$ ,  $\xi, \nu$  - відповідно об'ємна та зсуви вязкості середовища,  $\vec{f}_1$  - збурююча сила.

$$\begin{aligned} \rho T [S_t + (\vec{V} \nabla) S] = \chi \Delta T + \xi (dtv \vec{V})^2 + \\ + \eta/2 (V_{ix} + V_{kx} - \frac{2}{3} \delta_{ik} V_{ox})^2 \end{aligned} \quad (4)$$

де  $T$  - температура середовища,  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера,  $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ .

Покладаючи для води  $\rho = \text{const}$ , із (1) - (4) - одержимо модифіковану систему Нав'є-Стокса.

$$\vec{V}_t + I/\rho_0 (A(\vec{V}) - \nu \Delta \vec{V}) + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = I/\rho_0 (\vec{f}_1 - \nabla p), dtv \vec{V} = 0. \quad (5)$$

Для випадку нерухомого неоднорідного та нестационарного середовища лінійне наближення (1)-(4) дає

$$-\partial/\partial t (I/\rho c) \partial p/\partial t - dtv (\Delta p/\rho) = -f(x), f = dtv (I/\rho \vec{f}_1).$$

у випадку однорідного нерухомого та стаціонарного

середовища, позначаючи  $V = -\text{grad } \tilde{\Phi}$ , одержимо стандартне хвильове рівняння  $1/c^2 \ddot{\tilde{\Phi}} = \Delta \tilde{\Phi} - f(x, t)$  (6)

де  $\tilde{\Phi}$  - звуковий потенціал,  $\rho = \rho(\vec{x})$  - швидкість звуку у воді,  $\Delta$  - оператор Лапласу.

На лінії розподілу вода-повітря  $S$  потенціал дорівнює нулеві, тобто  $\tilde{\Phi}|_S = 0$ , а на лінії розподілу двох середовищ гранична умова визначається умовами неперервності звукового тиску та вертикальної складової швидкості:

$$[p]|_S = 0, [1/\rho \partial p / \partial n]|_S = 0, \quad (7)$$

де - дужки  $[f]$  означають стрибок функції  $f$ . Для абсолютно м'якої верхньої та абсолютно жорсткої нижньої поверхні

$$p|_S = 0 \quad \partial p / \partial n|_S = 0. \quad (8)$$

Якщо звукові хвилі породжуються джерелами, що включаються в момент  $t = t_0$ , то крайова задача доповнюється нульовими початковими умовами  $P|_{t=t_0} = 0$ ,  $P_t|_{t=t_0} = 0$ . Для стаціонарних середовищ, в яких час дії джерел можна вважати від  $-\infty$  до  $+\infty$ , перетворенням Фур'є із (6) одержимо рівняння Гельмгольца  $\Delta \Phi + n(x) \Phi = -g(x, \omega)$  (9)

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x, \omega) e^{i\omega t} dt, \quad g(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{i\omega t} dt. \quad (10)$$

При цьому  $\tilde{\Phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}, \omega) d\omega$ .

Замість початкових умов для однозначного виділення розв'язку використовуються умови випромінювання.

В методі параболічного рівняння крайова задача для (6)-(7) з  $f = \delta(x - x_0)$  апроксимується задачею з початковими даними (по координаті  $r$ ).

$$\Phi_r - ik_0 \Phi = ik_0 A \Phi, \quad (11)$$

де  $\tilde{\Phi} = \Phi H_c^{(1)}(k_0 r) e^{-i\omega t}$ ,  $A = (1 + D)^{1/2}$ ,  $D = (\pi^2 - 1 + (1 + i/k_0^2)) \cdot d^2 / \partial r^2$ ,  $n = c_0 / c$ ,  $k_0 = \omega / c_0$ ,  $c_0 = 1500$  м/сек,  $H_c^{(1)}(\cdot)$  - функція Ханкеля.

Початкові умови для рівняння (11) задається по лінії  $r = r_0$ ,  $r_0 > 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $p|_{r=r_0} = p_0(z)$ . Важливу роль для визначення всіх основних характеристик звукового поля відіграє вектор коливальної швидкості, який визнається через

потенціал  $\vec{V} = -\text{grad } \Phi = \{V_x, V_y, V_z\}$ ,  $V_x = -\Phi_x$ ,  $V_y = -\Phi_y$ ,  $V_z = -\Phi_z$ .  
 Так для гармонічних хвиль потік активної та реактивної акустичної потужності енергії в напрямку  $\vec{l}$  визначиться за формулами  $P = \frac{I}{2} \text{Re } P(x)V(x)l$ ,  $W = -\frac{I}{2} \text{Im } P(x)V(x)l$ . Риска означає комплексне спряження. Крім того, віддаль до джерела звуку визначається по різниці фаз між звуковим тиском та коливальною швидкістю. Шляхом вимірів звукового потенціалу та вектора коливальної швидкості одержуємо дані спостережень, які після перетворення Фур'є можемо записати так:

$$\vec{Y}_k(\omega) = \vec{p}(x_k, \omega) + \xi_k(x_k, \omega), \quad k=1, \dots, m, \quad (12)$$

$$\text{де } \vec{Y}_k(\omega) = \text{col}(Y_{0k}, Y_{1k}, Y_{2k}, Y_{3k}),$$

$$\vec{p}(x_k, \omega) = \text{col}(\Phi(x_k, \omega), V_x(x_k, \omega), V_y(x_k, \omega), V_z(x_k, \omega)),$$

$$\xi(x_k, \omega) = \text{col}(\xi_{1k}, \xi_{2k}, \xi_{3k}, \xi_{4k}) \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

Оцінювання інтенсивності джерел, їх параметрів, звукового потенціалу та вектора коливальної швидкості. Розробка методів просторової обробки, що дають гарантовані результати. Розглянемо найпростішу задачу визначення координат джерела. Вважаємо, що інтенсивність гармонічного джерела  $g(x)$  в (9) невідома і належить заданій області  $G_0$ .

$$G_0 = \{g(x) : \int_K g^2(x) |g(x)|^2 dx \leq I\}, \quad (13)$$

де  $g^2(x)$  - відома функція така, що  $g^2(x)$  існує та інтегровна, а  $\xi_k$  в (12)  $k=1, \dots, m$  - випадкові величини з заданими математичними сподіваннями та невідомими другими моментами, що належать області

$$G = \{\xi_k : \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^4 (g_{ik}^2 M |\xi_{ik}|^2) \leq I\}, \quad (14)$$

$g_{ik}^2$  - відомі числа, для яких існують  $g_{ik}^2$ ,  $K$  - область, занята хвилеводом (далі  $g(x, \omega) = g(x)$ ).

Як показано в [7, 18, 23, 24, 25] гарантовану оцінку координат джерела виромінювання дає мінімаксна оцінка

звукового потенціалу  $\hat{\Phi}$  та інтенсивності  $\hat{g}$  на основі вимірів (12), при умовах (9), (13)–(14). При цьому точки максимуму функцій  $|\hat{\Phi}|$  чи  $\hat{g}$  в  $K$  і будуть давати координати джерела,  $\hat{\Phi}$  – оцінку акустичного поля,  $|\hat{g}|^2$  – інтенсивності джерела,  $\text{Re } \hat{\Phi} \vec{V}$  – оцінку вектора потоку потужності на частоті  $\omega$ . Віддаль до джерела в циліндричній системі координат, визначається через різницю фаз між оцінками тиску та коливальної швидкості:

$\hat{r} = -1/(k \text{tg } \Delta\hat{\Phi})$ ,  $\text{tg } \Delta\hat{\Phi} = \hat{V}_y / \hat{V}_x$ . При цьому як показано в [7],  $\hat{\Phi}$  є розв'язок рівняння спряженого до рівняння (9) і його структура визначається структурою хвилеводу і граничними умовами через функції Гріна – тобто просторова обробка даних узгоджена з середовищем по аналогії з узгодженими фільтрами.

Якщо  $g(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ , то звичайно є задача пошуку (оцінювання) координат точкового джерела по даних (9), (13)–(14). Гарантований результат дає мінімаксна оцінка власних функцій  $\hat{\varphi}_i(z_0)$  хвилеводу, звідси  $\hat{z}_0 = \hat{\varphi}_i^{-1}(\hat{\varphi}_i(z_0))$  (тут  $z_0$  – глибина джерела). Зрозуміло, що важливим, перш за все, є розробка програмних засобів для побудови функції Гріна, що моделюють хвилеводи різної конфігурації (клин, плоско-паралельний, плоско-паралельний з клином, з похилим дном і т.п.) з урахуванням неоднорідностей, що входять до  $c(\vec{x})$ , впливу границь, поглинання тощо. Через це розробка методів та програм розв'язування рівняння Гемгольца для області інфразвукових частот (1:500 Гц) та області високих частот (більше 0,5 кГц), та перевірка їх на реальних гідрологіях і порівняння результатів розрахунків з даними гідроакустичних експедицій є надзвичайно важливою задачею при розв'язуванні обернених чи оптимізаційних задач гідроакустики та побудові систем просторової обробки.

Формування заданих звукових полів в океанічних хвилеводах розвиненими акустичними антенами. Розв'язування задач томографії в океані, далекого зондування неможливе без розробки методів, що дозволяють фокусувати звукову енергію в задану область хвилеводів з урахуванням властивостей поширення акустичних хвиль, впливу неоднорідностей, дна,

поверхні, частотних особливостей і т.п.

Задача сканування хвилеводу фокальним пятном по вертикалі та по горизонталі важлива і для ближньої зони, коли потрібно озвучити певну точку розподіленого об'єкту, або настроїти розвинену апертуру на прийом акустичної енергії, що випромінюється з заданої точки області чи розподіленого об'єкту. Найпростішим способом буде обчислення поля на антені, яке створено допоміжним, скажемо, точковим джерелом розташованим в заданій фокальній точці, а потім застосування обернення фази обчисленого поля. Але при цьому якість фокусування не обумовлюється. Найпростішою задачею такого типу є створення в заданій точці чи області звукового поля, близького до заданого  $\Phi_0(\vec{x})$  в середньо-квадратичному сенсі по амплітуді та фазі. При цьому витрати на енергію вирівнювання повинні бути мінімальними. Крім того, виникає задача вибором амплітуд та фаз (чи тільки амплітуд, або тільки фаз) на антені погасити в заданій області звукове поле, створене іншим джерелом. Такі проблеми актуальні і майже не вивчені в гідроакустиці на відміну від радіотехніки. Важливим є визначення такого розподілу елементів антени з обмеженням по енергії, щоб її потужність в дальній зоні була максимальна з урахуванням властивостей середовища, а також створення поля з заданим розподілом  $\vec{V}$ . Ці та ряд близьких задач розв'язані в [21-23, 26, 28, 29, 34, 40, 42-45].

Розробка методів перерахунку поля в дальню зону хвилеводу звукових полів на основі вимірів у ближній зоні.

Для визначення поля в зоні Фраунгофера ( $r \gg 2L^2/\lambda$ ,  $L$  - максимальний розмір антени,  $\lambda$  - довжина хвилі) по вимірах  $p(\vec{x})$  на деякій контрольній поверхні  $S$ , що охоплює джерела, широко користується формулою Кіргофа для вільного простору 
$$P(\vec{x}) = \frac{ik}{4\pi} \int_S (1 + \cos\beta) \exp(ikR) / R \cdot P ds$$
 де  $\beta$  - кут між зовнішньою нормаллю до поверхні  $S$  та лінією, що зв'язує  $\vec{x}$  з точкою поверхні  $S$ ,  $R$  - віддаль між точкою на  $S$  та  $\vec{x}$ . Недоліком такого підходу є область високих частот та неможливість врахування хвилеводного поширення. Це задача є важливою при визначенні шумності розподіленого об'єкту  $D$  в зоні Фраунгофера, визначенні характеристик направленості,

коли вдається виміряти на  $S$  звуковий потенціал чи коливальну швидкість.

Для хвилеводу задача еквівалентна такій: Знайти функцію  $\Phi(\vec{x}) \in O^2(K \setminus D) \cap C(K \cap D)$ , що задовільняє крайовій задачі для однорідного рівняння (9) з граничними умовами (8), умовами випромінювання на нескінченності  $\text{Im} \mu \geq 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, z, \varphi) = 0$ , та умовою типу Діріхле.  $\Phi(r, z, \varphi)|_{\partial D} = f$ . Тут  $f$  - функція, що являє собою виміряні значення звукового тиску на контрольній поверхні  $\partial D$ , причому виміри тиску проводяться точно без похибок як для інфразвукової області, так і для області високих частот. Ця задача розв'язана в [35, 45].

Для розв'язування вказаних вище проблем в [7, II, 23, 28, 36] була розроблена концепція мінімаксного оцінювання та керування гідроакустичними полями в лінійній і нелінійній постановці, на основі яких сформульовані вимоги до технічних засобів, розроблена архітектура прикладного та системного програмного забезпечення, проведено широке математичне моделювання, узгоджене з обробкою результатів експериментальних даних в залежності від виправлення в конкретній НДР чи ДНР.

## II. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ.

Гідроакустичні системи відносяться до складу об'єктів з розподіленими параметрами (ОПР). Значний прогрес в вивченні нелінійних граничних задач для рівнянь з частинними похідними пов'язаний з глибоким розвитком методів нелінійного аналізу. Останнім часом стало звичаєм зводити ці задачі до нелінійних операторних та диференціально-операторних рівнянь в функціональних просторах. При такому підході результати для конкретних ОПР одержуються як наслідок операторних методів. Тому в роботах [36, 39] запропоновані та розроблені методи оцінювання та керування операторними та диференціально-операторними рівняннями гідроакустичного типу.

### 1. Задачі керування для нелінійних операторних рівнянь.

Нехай  $V$  - рефлексивний банаховий простір, неперервний і щільно вкладений в гільбертовий простір  $H$ ;

$$X = L_{p_1}(a; V) \cap L_{p_0}(a; H), \quad 1 < p_1 \leq p_0 < \infty, \quad a \in [0, T], \quad T < \infty; \quad X^* -$$

простір, топологічно спряжений з  $X$ ;  $U$  - простір керувань, спряжений з деяким банаховим простором  $V$ ,  $U$ -\*-слабо (\*-сл.) замкнута підмножина  $U$ ;  $Y$  - напіввпорядкований банаховий простір  $A:U \times X \rightarrow X$ ,  $F:U \times X \rightarrow Y$  - нелінійні оператори;

$L:U \times X \rightarrow \bar{R}$  - цільовий функціонал. Розглядається задача мінімізації функціоналу

$$L(u, y(u)) \rightarrow \inf, u \in U \quad (15)$$

на розв'язках рівнянь

$$y' + A(u, y(u)) = f + g, \quad (16)$$

$$y(t=0) = y_0 \in H, \quad f, g \in X^*$$

з обмеженнями  $u \in U$ ,  $y \in K$ ,  $F(u, y) \geq 0$ . (17)

Тут  $y'$  - похідна елемента  $y \in K$  в сенсі простору розподілень  $D^*(s; V^*)$ . Отже,  $y' \in X^*$  і умова  $y(0) \in H$  має сенс;  $f$  - зафіксований елемент, а відносно  $g$  відомо тільки деяка допустима множина  $G \subset X^*$  ( $g \in G$ );  $K$  - сл. замкнута множина.

Оскільки відносно  $g \in G$  немає інших допущень, то природньо розглядати мінімаксну постановку [7], тобто необхідно знайти

$$\inf \sup L(u, y(u; g)) \quad (18)$$

на розв'язках рівняння (16) з обмеженнями (17).

Визначення 1. Задача мінімаксного керування (16)-(18) називається регулярною, якщо при фіксованих  $y_0$ , і  $f$  для довільного  $g \in G$  знайдеться таке  $\omega \in U$  (не залежне від  $g \in G$ , що при  $u = \omega$  рівняння (16) має розв'язок (можливо не єдиний)  $y(\omega; g)$ , причому пара  $(\omega; y(\omega; g))$  задовільняє обмеженням (17)  $\forall g \in G$ .

Визначення 2. Оператор  $A:U \times K \rightarrow X^*$  називається квазімонотоним, якщо із  $U \ni u_n \rightarrow u$  \*-сл. в  $U$ ,  $K \ni y_n \rightarrow y$  сл. в  $X$  та  $\lim \sup (A(u_n, y_n), y_n - y)_x \leq 0$ , випливає  $\lim \inf (A(u_n, y_n), y_n - \xi)_x \geq (A(u, y), y - \xi)_x \forall \xi \in X$ . Тут і далі  $(\dots)_x$  - злиття просторів  $X$  і  $X^*$ .

Теорема 1. [36] Нехай  $G$  - сл. замкнута обмежена підмножина в рефлексивному банаховому просторі  $Z$ , цілком неперервно вкладеному в  $X^*$ ;  $A:U \times K \rightarrow X^*$  - квазімонотоний обмежений оператор; функціонал  $L:U \times K \rightarrow \bar{R}$  - сл. напівкомпактний

знизу (\*-сл.п.к.сн), в відображення  $F:U \times K \rightarrow Y$  \*-сл.компактне (\*-сл.к.); множина  $U$  обмежена і або оператор  $A$  коерцитивний, або множина  $K$  обмежена. При цих умовах задача (16)-(18) розв'язується в тому і тільки в тому випадку, якщо вона регулярна.

Зауваження I. Аналогічно досліджується випадок, коли невизначеність міститься в коефіцієнтах оператора  $A$ , тобто  $A:U \times D \times X \rightarrow X^*$ , де  $D$  - деяка підмножина банахового простору  $E$ , і розглядається функціонал  $\text{var} L(u, y(u; \xi))$  на розв'язках рівняння

$$y' + A(u, \xi, y) = f, \quad y(0) = y_0 \quad (19)$$

при обмеженнях (17).

Розглянемо тепер окремий випадок операторних рівнянь гідродинамічного типу.

Нехай  $V_\sigma, V$  - рефлексивні банахові простори,  $H$  - гільбертів і  $V_\sigma \subset V \subset H$ , де кожне вкладення топологічно щільне,

$$S = [0, T], T > 0, X^* = L_{p_1}(S; V^*) \cap L_{p_2}(S; H) = X_1^* \cap X_2^*, Z^* = L_{q_1}(S; V_\sigma) \cap L_{q_2}(S; H) = Z_1^* \cap Z_2^*,$$

$$1 < p_1, d_1 < \infty, p_1 \leq p_2 \leq \infty, d_1 \leq d_2 \leq \infty, d_1 \geq p_1,$$

$$t = 0, 1, \quad U = B^*, \quad B - \text{банаховий простір, } U - \text{підмножина } U,$$

$$K^* \subset X^*. \text{ Розглянемо нелінійні відображення } A: U \times K^* \rightarrow \bar{X},$$

$$B: K^* \rightarrow Z, \quad X = L_{q_1}(S; V^*) + L_{q_2}(S; H) = X_1 + X_2, \quad Z = L_{q_1}(S; V_\sigma) + L_{q_2}(S; H) =$$

$$= Z_1 + Z_2, \quad p_1^{-1} + q_1^{-1} = d_1^{-1} + g_1^{-1} = 1, \quad t = 1, 2.$$

Покладемо  $\bar{W}^* = \{y \in X^* \mid y \in Z\}$  и  $\bar{W}_1^* = \{y \in X_1^* \mid y \in Z\}$ , де  $y'$  - похідна елемента  $y$  в сенсі простору розподілу  $D^*(S; Y^*)$ ,

$\bar{W}^*, \bar{W}_1^*$  - банахові простори відносно норми-графіка,  $G(S; V_\sigma^*)$ .

Вивчимо екстремальні властивості розв'язків диференціально-операторного рівняння

$$y' + A(u, y) + B(y) = f, \quad f \in X_1, \quad y(0) = y_0 \in H \quad (20)$$

$$\text{при умові} \quad y' \in K^*. \quad (21)$$

Нехай  $\rho: U \times N \rightarrow Z^{X^*}$  - розв'язувий, взагалі кажучи багатозначний оператор рівняння (15), де  $N = E_1 \times E_2 \subset H \times X_1$ ,  $\alpha = (y_0; f) \in N$ . Розглянемо функціонал  $L: U \times K^* \rightarrow \mathbb{R}$  і через  $U_0$

позначимо сукупність  $\omega \in \text{dom } \rho(\cdot, \alpha)$ , при якій  $\exists y(\omega) \in \rho(\omega, \alpha) \cap K^*$ . Покладемо  $U_1 = \{v \in U \mid \rho(v, \alpha) \cap K^* \neq \emptyset \forall \alpha \in N\}$ , а  $\rho_1$ -максимально допустиме підвдображення відносно (I6) [39], тобто  $\rho_1(v, \alpha) \subseteq \rho(v, \alpha) \forall (v, \alpha) \in U_0 \times N$  і із того, що  $y(\omega) \in \rho(\omega, \alpha) K^* \Rightarrow y(\omega) \in \rho_1(\omega, \alpha)$ .

Нехай  $R: U \times N \rightarrow 2^{U \times X}$  ( $R(u, \alpha) = (u; \rho_1(u, \alpha))$ ), тоді суперпозиція  $J(u) = L(R(u, \alpha))$  - багатозначна функція.

1)  $\alpha$  - фіксовано  $J_1(u) = \inf_{r \in R} L(r(u)) \rightarrow \inf_{u \in U_0} J$ ;

2)  $\alpha \in N$  - невизначено  $J_2(u) = \sup_{\alpha \in N} \inf_{r \in R} L(r(u, \alpha)) \rightarrow \inf J$ .

В першому випадку серед перетинів  $r \in R$  вибирається «найкраще», а в другому - розглядається мінімаксна задача.

Визначення 3. Оператор  $A: U \times K^* \rightarrow X$  називається оператором з рівномірно напівобмеженою варіацією, якщо  $\forall y_1, y_2 \in K^*$  і деякого  $R > 0$  такого, що  $\|y_i\|_X \leq R$ ,  $i=1, 2$ , справедлива нерівність

$$(A(u, y_1) - A(u, y_2), y_1 - y_2)_X \geq \inf_{v \in \alpha} C(v, R, \|y_1 - y_2\|_{\bar{v}})$$

$\forall u \in G$ , де  $\forall v \in U C(v, \cdot, \cdot): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  - неперервна функція і така, що  $\tau^{-1} C(v, r_1, \tau u_2) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow +0 \forall r_1, r_2 \geq 0, G$  - довільна обмежена підмножина  $U$ , а  $\|\cdot\|_{\bar{v}}$  - норма, компактна відносно  $\|\cdot\|_{\bar{v}}$ ; коерцитивним, якщо  $\|y\|_{\bar{v}}^{-1} (A(u, y))_X \rightarrow +\infty$  рівномірно по  $u \in G$  при  $\|y\|_{\bar{v}} \rightarrow \infty$ .

Введемо ряд припущень:  $\pi_1) A: U \times K^* \rightarrow X$  - обмежений коерцитивний оператор з рівномірно напівобмеженою варіацією, причому  $\forall v \in U A(v, \cdot): K^* \rightarrow X$  - радіально неперервне відображення і із  $U$  з $U_n$ - $u \in U$  \*-слабо в  $U$ ,  $K^*$  з  $y_n \rightarrow y \in K^*$  \*-слабо в  $X \Rightarrow (A(u_n, \xi), y_n - \xi)_X \rightarrow (A(u, \xi), y - \xi)_X \forall \xi \in X$ ;

$\pi_2) B: K^* \rightarrow Z_1$  \*-слабе компакте відображення і таке, що  $\forall y, \xi \in K^*$ ,  $(By)(t) \in V^*$  м.с.  $\forall t \in S$ , функція  $t \mapsto ((By)(t), \xi(t))_V$  класу  $L_1(S)$ , п.в.  $((By)(t), y(t))_V \geq 0$  і якщо  $y_n \rightarrow y$  \*-слабо в

$X^*$ ,  $Bu_n \rightarrow Bu$  слабо в  $X_1$ , то  $\forall t \in S \int_0^t ((By_n)(s), y_n(s))_V ds \rightarrow \int_0^t ((By)(s), y(s))_V ds$ .

Теорема 2. Нехай виконані умови  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $p_0 = \infty$ ;  $U$ ,  $K^*$  — слабо замкнуті підмножини, причому  $U$  обмежена, функція  $L: U \times K^* \rightarrow \mathbb{R}$  — слабо напівкомпактна знизу і  $U_0 \neq \emptyset$ . Тоді  $\exists u \in U_0$ , таке що  $J_1(u) \leq J_1(v) \forall v \in U_0$ .

Зуваження 2. Якщо  $K^*$  — обмежена множина, то коерцитивність в  $K_1$  можна опустити. Крім того, якщо  $L(u, y) \rightarrow +\infty$  рівномірно по  $y \in K^*$  при  $\|u\|_U \rightarrow \infty$ , то теорема 2 справедлива для необмежених  $U$ .

Зуваження 3. Умову  $U_0 \neq \emptyset$  в деяких випадках важко перевірити, але якщо  $U$  необмежене, то, вибравши  $\tilde{y} \in K^* \cap W^*(\tilde{y}(0) = y_0)$ , приходимо до рівняння  $\tilde{y}' + A(u, \tilde{y}) + B\tilde{y} = f$ , яке в більшості випадків вдається розв'язати відносно  $u \in U$ , що еквівалентно  $U_0 \neq \emptyset$ .

Теорема 3. Нехай в умовах теореми 3 (або зауваженні 2)  $U_1 \neq \emptyset$ . Тоді  $\exists u \in U_1, J_2(u) \leq J_2(w) \forall w \in U_1$ .

Як додаток в [36] розглянуто задачу керування в модифікованій системі Нав'є-Стокса.

2. Задачі керування та мінімаксного оцінювання для лінійних операторних рівнянь. Нехай  $A$  — лінійний оператор, діючий із банахового простору  $X$  в банаховий простір  $F$ , область визначення якого щільна в  $X$ , і для якого існує обмежений обернений. Тут і далі будемо вважати, що простори комплексні. Через  $L(E_1, E_2)$  будемо позначати множину лінійних неперервних операторів, а через  $L_1(E_1, E_2)$  — множину лінійних додатних неперервних операторів, для яких існують обмежені обернені.

Нехай задано вектор  $y$  банахового простору  $Y$  вигляду  $y = Cx + Df_2^*$ , де  $x$  — розв'язок операторного рівняння

$$Ax = B_0 f_0 + B_1 f_1, \quad C \in L(X, Y), \quad D \in L(F_2, Y), \quad (22)$$

$$B_0 \in L(F_0, F), \quad B_1 \in L(F_1, F).$$

Тут  $f_1, f_2$  — некорельовані випадкові величини із т.д. ертовних

просторів  $F_1$  і  $F_2$  відповідно з середніми значеннями  $Mf_1 = m_1$ ,  $Mf_2 = m_2$  і з другими моментами, які належать області

$$G_0 = \{(f_1, f_2) : M(Q_1 \tilde{f}_1, \tilde{f}_1) \leq 1, M(Q_2 \tilde{f}_2, \tilde{f}_2) \leq 1\}, \quad (23)$$

де  $Q_1 \in L_1(F_1, F_1)$ ,  $Q_2 \in L_1(F_2, F_2)$ ,  $\tilde{f}_1 = f_1 - m_1$ ,  $\tilde{f}_2 = f_2 - m_2$ .

Вектор  $f_0$  невідомий, належить області  $G_0$  банахового простору  $F_0$ . Назвемо вирази  $l_1(x) = u_1(y) + C_1$ ,  $l_2(f_0) = u_2(y) + C_2$ , де  $(u_i, C_i)$  визначаються із розв'язків задач

$\sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M |l_i - u_i(y) - C_i| - i \mu f$  мінімаксними середньоквадратичними оцінками (МОК-оцінками) лінійних неперервних функціоналів,  $l_1(x)$ ,  $l_2(f_0)$  а величини,

$$\sigma_1 = \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M |l_1 - \hat{l}_1|^2, \quad \sigma_2 = \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M |l_2 - \hat{l}_2|^2 \quad (24)$$

МОК-похибками.

Введемо вектори,  $z_l, p_l, l=1,2$ , як розв'язки рівнянь  $A^* z_l = l - C^* u$ ,  $A^* z_2 = -C^* u$ ,  $A p_l = Q \hat{z}_l$ . Тут  $\hat{z}_l$  визначається як розв'язки рівнянь при  $u = \hat{u}_l$  в рівнянні для  $z_l$  і  $u = \hat{u}_2$  для  $z_2$ .  $\hat{Q}_1 = B_1 Q_1^{-1} R_1 B_1^*$ ,  $R_1$  - канонічний ізоморфізм простору  $F_1$  на  $F_1$ . Введемо також функціонали  $\Phi_l(u)$ ,  $l=1,2$ :  $\Phi_1(u) = \sup_{f_0 \in \alpha_0} |z_1(B_0 f_0)|^2$ ,  $\Phi_2(u) = \sup_{f_0 \in \alpha_0} |l(f_0) - z_2(B_0 f_0)|^2$  і функціонали  $F_l(u)$ ,  $l=1,2$ :  $F_l(u) = z_l(\hat{Q}_l u) + u(\hat{Q}_l u)$ .  $\hat{Q}_2 = D Q_2^{-1} R_2 D^*$ ,  $R_2$  - канонічний ізоморфізм простору  $F_2$  на  $F_2$ .

Припустимо, що  $D^{-1} \in L(Y, F_2)$ ,  $Y$  - рефлексивний простір,  $G_0$  - обмежена. Тоді, має місце

Теорема 4. МОК - оцінки функціоналів  $l_1(x)$ ,  $l_2(f_0)$  існують та єдині і при цьому виконуються рівняння

$$\hat{l}_i = \hat{u}_i(y) + C_i, \quad \sigma_i = \Phi_i(u_i) + F_i(u_i),$$

$$i=1,2, \text{ де } C_i = \hat{z}_i(B_i m_i) - \hat{u}_i(D m_i),$$

а вектори  $\hat{u}_1$  і  $\hat{u}_2$  знаходяться із співвідношень

$$(\tilde{Q}_2 \hat{u}_2 - C p_1) \in \partial \Phi_1(\hat{u}_1),$$

де  $\partial \Phi_l$  - субдиференціали функціоналів  $\Phi_l(u)$ ,  $l=1,2$ .

Нехай  $G_0 = F_0$ . Введемо  $\hat{z}_1, \hat{p}_1, \hat{p}, \hat{x}$  як розв'язки систем

$$\begin{cases} A^* \hat{z}_1 = I_1 - C^* \hat{u}_1, \\ A \hat{p}_1 = Q_1 \hat{z}_1 + B_0 \lambda, \\ B_0^* \hat{z}_1 = 0, \end{cases} \quad (25) \quad \begin{cases} A^* \hat{z}_2 = -C^* \hat{u}_2, \\ A \hat{p}_2 = Q_1 \hat{z}_2 + B_0 \lambda_1, \\ B_0^* \hat{z}_2 = -I_2, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} A^* \hat{p} = C^* Q_2^{-1} (y - C \hat{t} - D m_2), \\ A \hat{t} = Q_1 \hat{p} + B_0 \lambda_1 + B_1 m_1, \\ B_0^* \hat{p} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

тут  $\hat{u}_l = Q_l^{-1} C \hat{p}_l$ ,  $l=1,2$ . Має місце

Теорема 5. Нехай оператор  $\tilde{B}_0 = B_0^* (A^*)^{-1} C^*$  відображає простір  $Y^*$  на весь простір  $F_0$ . Тоді

$$l_1(x) = \hat{u}_1(y) + \hat{U}_1 = l_1(\hat{x}), \quad l_2(f_0) = \hat{u}_2(y) + c_2 = l_2(\lambda_1),$$

При цьому  $\sigma_1 = l_1(\hat{p}_1)$ ,  $\sigma_2 = l_2(\lambda)$ , де  $\hat{U}_1 = z_1(B_1 m_1) - \hat{u}_1(D m_2)$ , а  $z_1, \hat{x}, \hat{u}_1$  знаходяться при розв'язуванні систем рівнянь (25) - (27).

Нехай  $F_0$  - гільбертів простір і

$$G_0 = \{f_0 : (Q_0 f_0, f_0) \leq 1\}, \quad \text{де } Q_0 \in L(F_0, F_0).$$

Теорема 6. МСК - оцінки функціоналів  $l_1(x)$  і  $l_2(f_0)$  представляється у вигляді

$$\tilde{l}_1(x) = \hat{u}_1(y) + \hat{U}_1 = l_1(\hat{x}), \quad \tilde{l}_2(f_0) = \hat{u}_2(y) + c_2 = l_2(Q_0^{-1} R_{\nu} B_0^* \hat{p}).$$

При цьому похибки оцінювання дорівнюють  $\sigma_1 = l_1(\hat{p}_1)$ ,  $\sigma_2 = l_2(Q_0^{-1} R_{\nu} (B_0^* \hat{z}_2 + I_2))$ . Тут  $\hat{u}_1 = \hat{Q}_1^{-1} C p_1$ ,  $\hat{u}_2 = \hat{Q}_2^{-1} C p_2$ ,  $R_{\nu}$  - канонічний ізоморфізм простору  $F_0$  на  $F_0$ ,

$\hat{U}_1 = z_1(B_1 m_1) - \hat{u}_1(D m_2)$ ,  $\hat{p}_1, \hat{z}_1, \hat{p}, \hat{x}$  - розв'язки системи рівнянь (25), (27) при  $B_0 = 0$  і  $Q_1$  рівному  $Q_1 + \hat{Q}_0$ , де  $\hat{Q}_0 = B_0 Q_0^{-1} R_{\nu} B_0^*$ , а  $\hat{z}_2, \hat{p}_2$  розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} A^* \hat{z}_2 = -C^* \hat{u}_2, \\ A \hat{p}_2 = (\hat{Q}_1 + \hat{Q}_0) \hat{z}_2 + B_0 Q_0^{-1} R_F^* l_2. \end{cases}$$

Звуження 4. Із теореми 6 випливає, що коли шукати МСК-оцінки векторів  $x$  і  $f_0$  в класі лінійних, тобто із умови

$$\begin{aligned} \inf_x \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|x - \hat{x}\|^2 &= \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|x - \hat{x}\|^2, \\ \inf_{f_0} \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|f_0 - \hat{f}_0\|^2 &= \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|f_0 - \hat{f}_0\|^2, \end{aligned}$$

то для цих оцінок одержимо вираз  $\hat{x} = \hat{x}$ ,  $\hat{f}_0 = Q_0^{-1} R_F^* E_0^* \hat{p}$ , де  $\hat{x}, \hat{p}$  знаходяться із розв'язків системи (27).

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|x - \hat{x}\|^2 &= \sup_{|l_1| \leq 1} l_1(\hat{p}_1), \\ \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M \|f_0 - \hat{f}_0\|^2 &= \sup_{|l_2| \leq 1} l_2(Q_0^{-1} R_F^* \hat{z}_2). \end{aligned}$$

Якщо в оператора  $D$  оберненого не існує, то в роботі [7] розглянуто є - МСК оцінки для функціоналів  $l_1(x)$  і  $l_2(f_2)$ , поклавши  $\hat{u}_i^{(e)} = \hat{u}_i^{(e)}(y) + \hat{C}_i^{(e)}$ ,  $i=1,2$ , де  $\hat{u}_i^{(e)}, \hat{C}_i^{(e)}$  знаходяться із розв'язків задач

$$I^{(e)} = (u_i, C) = \sup_{\alpha_0 \times \alpha_1} M |l_i - u_i(y) - C|^2 + \alpha_i(Q_i) - \inf_{u_i, C}.$$

Тут  $e > 0$ ,  $Q_i \in L_1(Y^*, Y)$ . В [7] сформульовані умови існування є-МСК оцінок.

Припустимо тепер, що  $B_1 = 0$ ,  $f_2$  - детермінований вектор, для оператора  $D$  існує обмежений обернений і

$$\begin{aligned} (f_0, f_2) \in Q, \text{ де } G = ((f_0, f_2) : (Q_0 f_0, f_0) + (Q_2 f_2, f_2) \leq 1), \\ Q_0 \in L_1(F_0, F_0), Q_2 \in L_1(F_2, F_2). \end{aligned}$$

Введемо множину  $G_y = \{f_0 : (f_0, D^{-1}(y - Cx)) \in G\}$ . Визначимо апостеріорні мінімаксі оцінки (АМО) і відповідні похибки оцінювання векторів  $f_0, x$ . АМО векторів  $f_0$  і  $x$  знаходяться з

$$\inf_{f_0 \in G_y} \sup_{f_0 \in G_y} \|f_0 - \hat{f}_0\| = \sup_{f_0 \in G_y} \|f_0 - \hat{f}_0\| = 0^{(2)},$$

$$\ln f \sup_{x \in G_Y, f_0 \in G_Y, f_0 \in G_Y} |x - \tilde{x}| = \sup |x - x_0| = \sigma_a^{(1)}$$

Величини  $\sigma_a^{(1)}$  назвемо вшостеріорними похибками векторів  $f_0$  і  $x$ . Тут  $\tilde{x}$  - розв'язок рівняння  $A\tilde{x} = B_0 \tilde{f}_0$ . Нехай вектори,  $z_1$ ,  $p_1$ ,  $z_2$ ,  $p_2$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ , визначаються як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} Az_1 = \hat{z}_1 - C u_1, \\ A\hat{p}_1 = \hat{p}_0 z_1, \end{cases} \quad (28) \quad \begin{cases} A z_2 = -C u_2, \\ Ap_2 = Q_0 z_2 + B_0 Q_0^{-1} R_{f_0} l_2 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} A p = C Q^{-1} (y - Cx) \\ Ax = Q_0 p, \end{cases} \quad (30) \quad u_l = \tilde{Q}_2^{-1} O p_l, \quad l=1,2.$$

Теорема 7. Має місце рівність  $x_0 = x$ ,  $f_0 = Q_0^{-1} R_{f_0} B_0 p$

При цьому  $\sigma_a^{(1)} = \sup |l_1^{1/2} (p_1) (1 - Re (Q_2)^{-1} y, D^{-1} (y - (x)))|^{1/2}$ ,  
 $|l_1| \leq 1$

$\sigma_a^{(2)} = \sup |l_2^{1/2} (Q_0^{-1} R_{f_0} (B_0 z_2 + l_2)) (1 - Re (Q_2)^{-1} y, D^{-1} (y - Cx))|^{1/2}$ .  
 $|l_2| \leq 1$

Нехай множина  $G$  має вигляд

$G = \{(f_0, f_2) : (Q_0 f_0, f_0) + (Q_2 f_2, f_2) \leq 1\}$ , де

$Q_2 \in Z_1(F_2, P_2)$ , а  $Q_0$  - невід'ємно визначений оператор.

Введемо тоді множину

$$G^{(B)} = \{(f_0, f_2) : ((Q_0 + \epsilon B) f_0, f_0) + (Q_2 f_2, f_2) \leq 1\},$$

$\epsilon > 0$ , і нехай  $G_Y^{(B)}$  - відповідна множина. АНО, що відповідає множині  $G_Y^{(B)}$ , позначимо через  $f_a^{(B)}$ . Введемо також функціонал

$$I_\epsilon(f_0) = \{((Q_0 + \epsilon B) f_0, f_0) + (Q_2 (y - Cx), y - Cx)\},$$

і припустимо, що множина  $F = \{f_0 : I_0(f_0) = \ln f I_0(f_0)\}$  не порожня. Тоді має місце

Теорема 8.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_a^{(B)} = f_0$ , де  $f_0$  визначається в

розв'язку задачі  $(f_0, f_0) = \ln f$ .

Зауваження 5. Подібні теореми можна довести у випадку

вимірів  $y = \text{Re}(Cx) + f_2$ .

Нехай вектор  $x$  є розв'язком рівняння  $Ax = Bu + B_0 f_0 + B_1 f_1$ , де  $u \in U \subset H$ ,  $H$  — банаховий простір  $B \in L(H, F)$ , а оператори  $B_0, B_1$  такі ж, як і раніше. Припустимо, що  $M f_1 = 0$ ,  $f_1 \in G_1 \subset \{f_1 : M |f_1|^2 < \infty\}$ , а  $f_0 \in G_0$ , де  $G_0$  має представлення  $G_0 = \pi_0 + G$  для деякого вектору  $\pi_0 \in F_0$  і  $G$  має ту властивість, що  $\lambda \pi \in G \forall \pi \in G$  і  $|\lambda| = 1$ .

Введемо функціонал

$$I(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \sup_{\alpha_0, \alpha_1} M |l_i(x) - \alpha_i|^2 + \Phi(u).$$

Тут  $\gamma_i, \alpha_i$  — задані числа, причому  $\gamma_i \geq 0$ ,  $l_i$  — лінійні неперервні функціонали,  $\Phi(u)$  — деякий функціонал на просторі  $H$ .

Розглянемо наступну задачу оптимізації  $I(u)$  —  $\inf$ .

Позначимо через  $U_1 = \{u : I(u) = \inf_{u \in U} I(u)\}$ .

Теорема 9. Мискина  $U_1$  співпадає з множиною

$$U_2 = \{u : I_1(u) = \inf_{u \in U} I_1(u)\},$$

де  $I_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left[ \sup_{\alpha_0, \alpha_1} |l_i(\tilde{x}_1)| + |l_i(\tilde{x}_2) - \alpha_i|^2 \right] + \Phi(u)$ .

При цьому  $I(u) = I_1(u) + \sum \gamma_i \sup M |l_i(x_i)|^2$ .

Тут  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  — розв'язки рівнянь

$$A \tilde{x}_1 = B_0 f_0, \quad A \tilde{x}_2 = Bu + B_0 \pi_0, \quad A x_1 = B_1 f_1.$$

Нехай  $B_1 = 0$ ,  $G_0$  — симетричне.

$$Ax = Bu + B_0 f_0, \quad B_1 = 0 \quad (31)$$

$$I(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \sup_{G_0} |l_i(x) - \alpha_i|^2 + \Phi(u). \quad (32)$$

Теорема 10. Задача керування (31)–(32)

еквівалентна задачі керування системою  $Ax_1 = B_0 f_0, Ax_2 = Bu$  (33)

з критерієм якості

$$I = I_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left[ |l_i(\hat{\phi}_1) - \alpha_i + l_{11}(\phi_2)|^2 + \sigma_{\alpha_i} \right] + \Phi(u)$$

де  $l_i(\hat{\varphi}_1)$  - апостеріорна оцінка функціоналу  $l_i(\varphi_1)$ ,

$\sigma_{\alpha_i}$  - апостеріорна логічна оцінювання,  $x = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Зуваження 6. Нехай  $U$  - опукла замкнута множина, простір  $H$  - рефлексивний,  $G_1, G_0$  - обмежені множини. Тоді, якщо 1)  $U$  - обмежена,  $\Phi(u)$  - невід'ємний опуклий слабонапівноперервний функціонал або 2)  $\Phi(u)$  - строго опуклий слабонапівноперервний функціонал, що задовольняє умові  $\Phi(u) \rightarrow \infty$  при  $\|u\| \rightarrow \infty$ , тоді існує єдиний елемент  $u_0 \in U$ .

Для випадку, коли  $U=H$ ,  $H$  - гільбертовий простір,  $\Phi(u) = (Nu, u)$ ,  $N \in L_1(H, H)$ , і  $H$  ототожнено з  $H^*$ , то, як легко бачити,  $u_0$  має вигляд  $u_0 = -N^{-1} B^* \sum_{i=1}^k z_i \alpha_i$ , де  $z_i$  - розв'язок рівняння  $A^* z_i = l_i$ , а  $\alpha_i$  - комплексні числа, які знаходяться при розв'язуванні задачі на мінімум строго опуклої функції  $\bar{I}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = I_1(N^{-1} B^* \sum_{i=1}^k z_i \alpha_i)$ .

Припустимо тепер, що  $f_0$  - відомий вектор  $X$ ,  $U = H$  - гільбертові простори,  $G_1$  - обмежена множина.

Розглянемо функціонал  $I(u) = \text{вир } \mathbb{M}(N_1(x - x_0), x - x_0) + (N_2 u, u)$ .

Тут  $N_1 \in L_1(X, X)$ ,  $N_2 \in L_1(H, H)$ .

Теорема II. Існує єдиний вектор  $\hat{u}$ , такий, що

$$J(\hat{u}) = \inf J(u). \text{ При цьому } \hat{u} = -N_2^{-1} R_u B_0^* p,$$

$$J(\hat{u}) = p(B_0 f_0) + (A^* p)(x_0) + \text{вир } \mathbb{M}(N_1 \tilde{x}, \tilde{x}),$$

де  $p, \tilde{x}$  знаходиться з розв'язку рівнянь

$$A x_1 = B \hat{u} + B_0 f_0 \quad A p = R_x N_1 (x_1 - x_0) \quad A \tilde{x} = B_1 f_1$$

Тут  $R_u, R_x$  - канонічні ізоморфізми просторів  $H, X$  на  $H$  і  $X$  відповідно.

3. Приклади оцінювання розв'язків і правих частин рівняння Гельмгольца. Розглянемо для прикладу плоскопаралельний хвиленод  $K = \{x = (z, r), 0 \leq z \leq R, r = \sqrt{x^2 + z^2}, r < \infty\}$ . Потенціал  $\Phi$ , що описує розповсюдження звуку в області  $K$ , задовільняє,

для гармонічних процесів, рівняння (9) з правого частини  
 $g(r, z) = f_0 + f_1$  та граничним умовам  $\Phi|_{z=0} = 0$ ,  $\Phi_z|_{z=h} = 0$ .  
 Функція  $f_0(x)$  являється функцією джерела, невідома і така,

$$\text{що } f_0 \in G_0 = \{f_0 : \int_{\Omega_0} g_0^2(x) |f_0(x)|^2 dx \leq I\}, \quad (34)$$

а  $f_1(x)$  - випадкове поле, неперервне в середньому квадратичному із середнім значенням  $Mf_1 = m_1$  і невідомим другим моментом. На нескінченності задаємо умови випромінювання.

Нехай в області  $\Omega_1 \subset K$  проводяться такі виміри потенціалу  $\Phi(x)$  у вигляді (35а) або (35б), або (35в), де

$$y(x) = \Phi(x) + f_2(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (35a)$$

$$y_t = \Phi(x_t) + f_{2t}, \quad x_t \in \Omega_1, \quad t = 1, \bar{m}, \quad (35b)$$

$$y(x) = \int_{\Omega_2} R(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi + f_2(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (35v)$$

причому відомо, що складові в (35) такі, що  $Mf_2(x) = m_2$  а другі моменти від  $f_1(x), f_2(x)$  належать заданій області

$$G_1 = \{f_1, f_2 : \int_{\Omega_1} g_1^2(x) |f_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega_2} g_2^2(x) |f_2(x)|^2 dx \leq I\} \quad (36)$$

Якщо вимірювання задано у вигляді (35б), то замість другого

члена в (36) буде  $\sum_{j=1}^m g_{2j}^2 Mf_{2j}^2$ . Потрібно зняти

МСК-оцінки функціоналів

$$i_1(\Phi) = \int_{\Omega_1} l_1(x) \Phi(x) dx, \quad l_2(f_0) = \int_{\Omega_2} l_2(x) f_0(x) dx, \quad (37)$$

(Функції  $l_1(x)$  та  $l_2(x)$  задані). Згідно теореми 6 МСК-оцінки функціоналів  $l_1(x)$  і  $l_2(f_0)$  і похибки оцінювання представлені у вигляді

$$\hat{l}_1(\Phi) = l_1(\hat{\Phi}) = \int_{\Omega_1} l_1(x) \hat{\Phi}(x) dx, \quad (38)$$

$$\hat{l}_2(f_0) = l_2(g_0^{-2} \hat{p}) = \int_{\Omega_2} l_2(x) g_0^{-2}(x) \hat{p}(x) dx, \quad (39)$$

$$\sigma_i^2 = l_1(\hat{p}_1) = \int_{\Omega_1} l_1(x) \hat{p}_1(x) dx, \quad (38a)$$

$$\sigma_2^2 = l_2 (g_0^{-2} (\hat{z}_2 + l_2(x))) = \int_{\kappa} g_0^{-2}(x) (\hat{z}_2(x) + l_2(x)) dx \quad (39a)$$

Тут  $\hat{p}_1, \hat{z}_2, \hat{p}, \hat{\Phi}$  - розв'язки таких рівнянь:

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{z}_1 = l_1 - c^* \hat{U}_1 \quad (40)$$

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{p}_1 = (g_1^{-2} + g_0^{-2}) \hat{z}_1, \quad (41)$$

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{z}_2 = -c^* \hat{U}^2, \quad (42)$$

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{p}_1 = (g_1^{-2} + g_0^{-2}) \hat{z}_2 + g_0^{-2} l_2, \quad (43)$$

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{p} = c^* g_2^2 (y - c \hat{\Phi} - m_2), \quad (44)$$

$$(\Delta + n^2 k^2) \hat{\Phi} = (g^{-2} + g_0^{-2}) \hat{p} + m_1, \quad (45)$$

де  $\hat{U}_i = g_2^{+2} \hat{O} \hat{p}_i$ ,  $i=1,2$ . Риска означає комплексне спряження. Граничні умови для функцій  $\hat{z}_i, \hat{p}_i, \hat{\Phi}, \hat{p}$  такі ж як і для  $\Phi$ , а умови на нескінченності для  $\hat{z}_i$  та  $\hat{p}$  є спряжені до умов випромінювання для  $\hat{p}_i$  та  $\hat{\Phi}$ .

Оператор  $c^* \hat{U}_i$  для вимірювання (35) має вигляд; для (35a)

$$c^* \hat{U}_1 = X_{\Omega_1} \hat{U}_1(x), \quad x \in \Omega_1 \quad (46)$$

$$\text{для (35б)} \quad c^* \hat{U}_i = \sum_{j=1}^m \delta(x-x_j) \hat{U}_j, \quad (47)$$

для (35в)  $c^* \hat{U}_i = \int_{\Omega_2} R(\xi, x) \hat{U}_i(\xi) d\xi$ ,  $i=1,2$ , а оператор

$$c^* g_2^2 (y - c \hat{\Phi} - m_2) \text{; для (35в)} \quad X_{\Omega_2} g_2^2(x) (y(x) - \hat{\Phi}(x) - m_2)$$

$$\text{для (35б)} \quad \sum_{j=1}^m g_2^2 \delta(x-x_j) (y_j - \hat{\Phi}(x_j) - m_{2j}), \quad (48)$$

для (35в)  $\int_{\Omega_2} R(x, \eta) g_2(\eta) (y(\eta) - \int_{\Omega_2} R(\eta, \xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi - m_2) d\eta$ , де  $x \in \Omega_2$ ,

$\eta \in \Omega_1$ ;  $R_1(x, \eta) = 0$ ,  $x \in \Omega_2$ ,  $X_{\Omega_1} = 0$ ,  $x \in \Omega_1$ ,  $X_{\Omega_1} = I$ ,  $x \in \Omega_1$ .

Для вимірів (35б) МСК оцінки мають вигляд (38), (39), похибки оцінювання-вигляд (38a) (39a),  $\hat{\Phi}_2(x)$  і  $\hat{p}(x)$  суть розв'язки

крайових задач

$$(\Delta + k^2 n^2) \hat{p}(x) = \sum_{j=1}^m g_j^2 [y_j - \hat{\Phi}(x_j) - m_{2j}] \delta(x - x_j), \quad (49)$$

$$(\Delta + k^2 n^2) \hat{\Phi}(x) = (g_0^{-2} + g_1^{-2}) \hat{p}(x) + m_1, \quad (50)$$

Розв'язок  $\hat{p}(x)$ ,  $\hat{\Phi}(x)$  (49) і (50) через функцію Гріна  $G(x, x')$  (див (92)) можна записати

$$\hat{p}(x) = - \int \sum_{j=1}^m g_j^2 [y_j - \hat{\Phi}(x_j) - m_{2j}] \delta(\xi - x_j) G(x, \xi) d\xi, \quad (51)$$

$$\hat{\Phi}(x) = - \int G(x, \xi) [(g_0^{-2}(\xi) + g_1^{-2}(\xi)) \hat{p}(\xi) + m_1] d\xi.$$

Перетворимо формули (51), враховуючи властивості функції Гріна:

$$\hat{p}(x) = - \sum_{j=1}^m g_j^2(x_j) [y_j - \hat{\Phi}(x_j) - m_{2j}] G(x, x_j), \quad (52)$$

$$\hat{\Phi}(x) = \int G(x, \xi) [(g_0^{-2}(\xi) + g_1^{-2}(\xi)) \sum_{j=1}^m g_j^2(x_j) \cdot$$

$$(y_j - \hat{\Phi}(x_j) - m_{2j}) G(\xi, x_j) d\xi - \int_{\Omega} G(x, \xi) m_1 d\xi.$$

Покладемо в другому рівнянні (52)  $x = x_j, j = \overline{1, m}$  з врахуванням властивостей потенціалу простого слоу для визначення функцій  $\hat{\Phi}(x_j)$  одержимо систему алгебраїчних

$$\begin{aligned} \text{рівнянь } \hat{\Phi}(x_n) + \sum_{j=1}^m g_j^2(x_j) \hat{\Phi}(x_j) \int_{\kappa} G(x_n, x) G(x, x_j) [g_0^{-2}(x) + \\ + g_1^{-2}(x)] dx = \int_{\kappa} G(x_n, \xi) [(g_1^{-2}(\xi) + g_0^{-2}(\xi))] \sum_{j=1}^m g_j^2(x_j) [y_j - \end{aligned}$$

$$- m_{2j} - G(\xi, x_j)] d\xi - \int_{\kappa} m_1 G(x_n, \xi) d\xi, \quad n = \overline{1, m}, \quad (53)$$

яка в силу додатньої визначеності матриці має єдиний розв'язок  $\hat{\Phi}(x_n), n = \overline{1, m}$ . Розв'язучи її, визначимо числа  $\hat{\Phi}(x_n)$ , а із системи (52) одержимо шукані  $\hat{p}(x)$  і  $\hat{\Phi}(x)$  для  $\forall x \in \kappa$ . Тоді за формулами (38) и (39) визначимо МСК-оцінки функціоналів  $l_1$  і  $l_2$ .

Випадки вимірів (35а), (9), (35б) розглядаються аналогічно з тими відмінностями, що замість (53) будуть інтегральні рівняння з інтегрованими особливостями в ядрах.

4. Задачі мінімаксного оцінювання та оптимального керування для параболічного рівняння в акустиці. Приведемо деякі результати по розв'язуванню задач оцінювання і керування акустичними полями [22, 23, 26, 28, 40] на основі найпростішого параболічного рівняння (10)

$$\Delta p \triangleq 2ik_0 \partial r p + \partial_{zz}^2 p + 1/r^2 \partial_{\theta\theta}^2 p + ik_0^2 [n^2(r, z, \theta) + 1 - \nu] p = 0, \quad (54)$$

$$I = \{ \partial r + i/2k_0 \Lambda_1 [ ik_0/2 - (n^2 + \nu + 1) ] \}, \quad (55)$$

$\Lambda_1 = \partial_{zz}^2 + 1/r^2 \partial_{\theta\theta}^2$ ,  $\partial r = \partial/\partial r$  з початковими і граничними

$$\text{умовами } p(r, z, \theta)|_{r=r_0} = u(z, \theta) + f(z, \theta), \quad p|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=H} = 0, \quad (56)$$

де  $\Omega = \{ z, \theta: 0 \leq \theta \leq 2\pi, H \geq z \geq 0 \}$ ,  $r_0 > 0$ .

$K_r = \{ r, z, \theta: H \geq z \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r_0 \leq r \leq R < \infty \}$ ,

$c_0 = 1500$  м/сек,  $n = \omega/c(r, z, \theta)$ ,  $\nu(r, z)$  - задана функція (коефіцієнт затухання),  $H$  - глибина хвилеводу. Початкова функція  $u(z, \theta)$  в (56) в задачах оптимізації буде грати роль керування. Функція  $f(z, \theta)$  в задачах керування (56) вважається заданою,  $f(z, \theta), u(z, \theta) \in L_2(\Omega)$ .

Припустимо, що  $f(z, \theta)$  - випадкове поле, неперервне в середньо-квадратичному сенсі. Нехай маємо найпростіші виміри звукового тиску  $p(r, z, \theta)$  вигляду а) або б):

$$\text{а) } y_k(r, \theta) = p(r, z_k, \theta) + \xi_k(r, \theta), \quad k=1, m, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (57)$$

$$\text{б) } y_k(z, \theta) = p(r_k, z, \theta) + \xi_k(z, \theta), \quad k=1, m, \quad z, \theta \in \Omega, \quad (58)$$

в яких функції  $\xi_k(r, \theta)$  і  $\xi_k(z, \theta)$  - невідомі випадкові поля.

Припустимо, що детермінована функція  $u(z, \theta) \in L_2(\Omega)$  невідома і належить заданій області

$$G_0 = \left\{ u : \int_{\Omega} |u|^2 g_0^2(z, \theta) d\Omega \leq 1 \right\}. \quad (59)$$

Відносно функцій  $f(z, \theta), \xi_k(z, \theta)$  і  $\xi_k(r, \theta)$  вважаємо, що їх перші моменти нульові, а другі - невідомі і в залежності від вигляду, належать заданим областям:

$$a) \quad G_1 = \left\{ f: \int_{\Omega} M |f(z, \theta)|^2 g_0^2(z, \theta) d\Omega \leq 1 \right\}, \quad (60)$$

$$G_2 = \left\{ \xi_k: \int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^m g_k^2(r, \theta) M |\xi_k(r, \theta)|^2 r dr d\theta \leq 1 \right\},$$

$$b) \quad G_2 = \left\{ \xi_k(z, \theta): \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m M |\xi_k(z, \theta)|^2 q_k^2(z, \theta) d\Omega \leq 1 \right\}.$$

Тут і далі функції  $g_0(z, \theta), q_k(r, \theta), g_k(z, \theta), g(z, \theta)$  задані, інтегровані і такі, що  $g_0^{-2}, q_k^{-2}, g_k^{-2}, g^{-2}$  - існують.

Потрібно знайти мінімаксні оцінки (МСК-оцінки) функціоналів:

$$I_1(p) = \int_{\Omega} \overline{l_1(z, \theta)} p(R, z, \theta) d\Omega, \quad I_2(u) = \int_{\Omega} \overline{l_2(z, \theta)} U(z, \theta) d\Omega \quad (61)$$

(функції  $l_1(z, \theta) \in L_2(\Omega)$ ,  $l_2(z, \theta) \in L_2(\Omega)$  - задані).

Мінімаксні оцінки функціоналів (61), та їх похибки оцінювання представими у вигляді [7, 40]

$$\hat{I}_1(p) = I_1(\hat{p}) = \int_{\Omega} \overline{l_1(z, \theta)} \hat{p}(R, z, \theta) d\Omega, \quad (62)$$

$$\hat{I}_2(u) = I_2(g_0^{-2} \hat{\phi}) = \int_{\Omega} \overline{l_2(z, \theta)} g_0^2 \hat{\phi}(r_0, z, \theta) d\Omega,$$

$$\sigma_1^2 = I_1(\hat{p}_1) = \int_{\Omega} \overline{l_1(z, \theta)} \hat{p}_1(R, z, \theta) d\Omega, \quad (63)$$

$$\sigma_2^2 = I_2(g_0^{-2}(\hat{z}_2 + l_2)) = \int_{\Omega} \overline{g_0^{-2}(z, \theta)} (\hat{z}_2(r_0, z, \theta) + l_2(z, \theta)) d\Omega,$$

де  $\hat{p}_1, \hat{z}_2, \hat{p}, \hat{\phi}$  - розв'язки таких систем рівнянь для вимірів

$$\begin{cases} L^* \hat{\phi} = \sum_{k=1}^m g_k^2(r, \theta) (y - \hat{p}(r, z_k, \theta)) \delta(z - z_k), \\ L \hat{p} = 0, \quad \hat{\phi}|_{r=R} = 0, \quad \hat{p}|_{r=r_0} = Q_0^{-2} \hat{\phi}|_{r=r_0}, \quad Q_0^{-2} = g_0^{-2} + g^{-2}, \end{cases} \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{aligned} L^* \hat{z}_1 &= -\sum_{k=1}^m g_k^2(\theta) \delta(z - z_k) \hat{p}_1(r_0, z_k, \theta), \\ \hat{p}_1 &= 0, \quad \hat{z}_1|_{r=r_0} = \hat{l}_1, \quad \hat{p}_1|_{r=r_0} = Q_0 \hat{z}_1|_{r=r_0}, \end{aligned} \right. \quad (65)$$

$$\left\{ \begin{aligned} L^* \hat{z}_2 &= -\sum_{k=1}^m g_k^2(r, \theta) \delta(z - z_k) \hat{p}_2(r_0, z, \theta), \\ \hat{p}_2 &= 0, \quad \hat{z}_2|_{r=r_0} = 0, \quad \hat{p}_2|_{r=r_0} = Q_0^{-2} (l_2(z, \theta) + \hat{z}_2(r_0, z, \theta)) \end{aligned} \right. \quad (66)$$

Граничні умови для функцій  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{\phi}$  такі ж, як і в (65) для  $p(r, z, \theta)$ ,  $L^*$  — спряжений до  $L$  оператор. Випаємо рекурентні оцінки  $\hat{p}(r, z, \theta)$ , через рівняння Ріккати для вимірів (67). Мінімальна оцінка функціоналу  $l_1(p)$  представляє в вигляді  $l_1(\hat{p})$ ; при цьому похибка оцінювання дорівнює  $\sigma^2 = (P l_1, l_1)$ , а  $\hat{p}(r, z, \theta)$  — розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} L \hat{p}(r, z, \theta) &= \int_{\Omega} P(r; z, \theta; z', \theta') \sum g_k^{-2}(r, \theta) l_{y_k}(r, \theta') - \\ &- \hat{p}(r, z', \theta') \delta(z' - z_k) d\Omega, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\hat{p}(r, z, \theta) = 0, \quad \hat{p}|_{z=0} = 0, \quad \hat{p}|_{z=h} = 0,$$

де  $P(r; z, \theta; z', \theta')$  — розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} \partial P / \partial r + L_{z\theta} P(r; z, \theta; z', \theta') + L_{z'\theta'}^* P(r; z, \theta; z', \theta') + \\ + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega'} g_k^{-2}(r, \theta') \overline{P(r; z, \theta; z', \theta') P(r; z', \theta'; z'', \theta'')} \delta(z'' - z_k) d\Omega' = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

$$P(r_0, z, \theta; z', \theta') = g_0^{-2}(z, \theta) \delta(z - z') \delta(\theta - \theta'), \quad (69)$$

$$P|_{z=0} = 0, \quad P|_{z=h} = 0, \quad \partial_z P|_{z=h} = 0, \quad \partial_{z'} P|_{z=h} = 0. \quad (70)$$

Для вимірювання (58) задача оцінювання розв'язується аналогічно (64)–(66), тільки замість сум

$$\text{буде функція: } \sum_{k=1}^m l_{y_k}(z, \theta) - \hat{p}(r_k, z, \theta) l_{g_k}^2(z, q) \delta(r - r_k) / 2\pi r,$$

а в рекурентній оцінці права частина (68) прийме вигляд

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Omega} P(r; z, \theta; z', \theta') [y_k(z', \theta') - \hat{p}(r, z', \theta')] \delta(r - r_k) / 2\pi r \, d\Omega. \quad (71)$$

Розглянемо тепер задачу фокусування акустичної енергії в задану область хвилеводу при  $f = 0$ , та відсутності вимірів. Для їх формулювання задамо функціонали

$$y_i = l_j(p), \quad j = \overline{1, m}, \quad (72)$$

які характеризують середнє значення поля  $p$  в окремих областях і розглянемо обмеження на керування

$$u \in U = \{u(z, \theta) : \int g^2(z, \theta) |u(z, \theta)|^2 \, d\Omega \leq 1\}, \quad (73)$$

$g(z, \theta) \neq 0$  задана і така, що  $g^{-2}(z, \theta)$  інтегровна.

Потрібно вибрати таке  $u \in U$ , щоб критерій якості

$$I_1[u] = \sup_{l \in \Omega} \operatorname{Re} \int_{\Omega} l(z, \theta) p(R, z, \theta) \, d\Omega, \quad (74)$$

( $G$  - задана область) приймає максимальне значення при виконанні обмежень (54)-(56), (72).

Задача максимізації критерія якості (74) еквівалентна задачі

відшукування супремуму функціоналу  $I(l) = \sigma_{\alpha} + |\operatorname{Re} l(\hat{p})| - \sup_{l \in G}$

де  $\hat{p}$ ,  $\sigma_{\alpha}$  - мінімаксна оцінка і апостеріорна похибка оцінювання функціоналу  $l(p)$ , причому

$$\sigma_{\alpha} = (1 - \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} y_{\alpha})^{1/2} l^{1/2}(p), \quad l(\hat{p}) = l(\hat{p}) \sum_{k=1}^m \hat{u}_k y_k,$$

Числа  $\lambda_k$ ,  $\hat{u}_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  та функції  $P$ ,  $\hat{p}$  є розв'язками таких систем.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \bar{\phi} = \sum_{\alpha=1}^m l_{\alpha} \lambda_{\alpha}, \quad \bar{\phi}|_{r=r_0} = 0, \bar{\phi}|_{z=0} = 0, \partial_z \bar{\phi}|_{z=h} = 0 \\ L p = 0, \hat{p}|_{r=r_0} = g^{-2} \bar{\phi}|_{r=r_0}, \hat{p}|_{z=0} = 0, y_j = l_j(\hat{p}), \partial_z p|_{z=h} = 0 \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\left\{ \begin{aligned} L^* \bar{z} &= -\sum_{k=1}^m \hat{u}_k \lambda_{k\beta}, \quad \bar{z}|_{r=r_0} = \bar{l}, \quad \bar{z}|_{z=0} = 0, \\ Lp &= 0, \quad \theta_1 \hat{z}|_{z=-H} = 0, \quad \hat{p}|_{r=r_0} = \bar{g}^2 \bar{z}|_{r=r_0} = 0, \\ l_{\beta}(p) &= 0, \quad \hat{p}|_{z=0} = 0, \quad \partial z \hat{p}|_{z=H} = 0 \end{aligned} \right. \quad (76)$$

Якщо функціонал (74) має вигляд

$$I_1[u] = \sup_{l \in G} l(p) = \sup_{l \in G} \int_{\kappa_n} l(r, \theta, z) p(r, z, \theta) dz r d\theta, \quad (77)$$

то змінюється лише права частина рівняння для  $\hat{z}$ ,

$$\text{що дорівнює} \quad \bar{l} - \sum_{\alpha=1}^m \hat{u}_\alpha \lambda_{\alpha\beta}, \quad \text{в} \quad \bar{z}(R, z, \theta) = 0.$$

Нехай тепер множина  $U$  має вигляд

$$U = \left\{ u: \int_{\Omega} (\rho_1(z, \theta) |p(R, z, \theta) - p_1(z, \theta)|^2 + \gamma(z, \theta) |u|^2) dz d\theta \leq 1 \right\} \quad (78)$$

де  $\rho_1 > 0$ ,  $\gamma > 0$  і  $p_1$  - задані функції.

Розглянемо задачу визначення максимуму (77) при обмеженнях (54) - (56),  $u \in U$ .

Сформульована задача еквівалентна задачі відшукування екстремуму критерія якості  $I(l) = \sigma_\alpha^{-1} |\text{Re} l(\hat{p})| - \sup_{l \in G}$ , де  $\sigma_\alpha$  - апостеріорна похибка оцінювання функціоналу  $l(p)$ ,  $l(\hat{p})$  мінімаксна оцінка, що має представлення

$$\hat{l}(p) = l(\hat{p}), \quad \sigma_\alpha = [1 - \text{Re}(\rho_1^2(\hat{p} - p_1), p_1)]^{1/2} l^{1/2}(p),$$

в  $\hat{p}$  і  $p$  розв'язки систем рівнянь

$$\left. \begin{aligned} L^* \hat{\phi} &= 0, \quad \hat{\phi}|_{r=r_0} = \rho_1^{-1}(\hat{p} - p_1), \quad \hat{\phi}|_{z=0} = 0, \quad \partial z \hat{\phi}|_{z=H} = 0 \\ L \hat{p} &= 0, \quad \rho_1^{-1} \hat{\phi}|_{r=r_0} = \hat{p}|_{r=r_0}, \quad \hat{p}|_{z=0} = 0, \quad \partial z \hat{p}|_{z=H} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$L p = 0, \quad \rho_1^{-1} z|_{r=r_0} = p|_{r=r_0}, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \partial z p|_{z=H} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} L^* \bar{z} &= 0, \quad \rho_1^{-1} p|_{r=r_0} = \bar{z}|_{r=r_0}, \quad \bar{z}|_{z=0} = 0, \quad \partial z \bar{z}|_{z=H} = 0 \end{aligned} \right\}$$

В [26, 40] розглянуті також задачі амплітудно-фазового, фазового та амплітудного синтезу при обмеженнях (78) для функціоналу

$$I_3[u] = \int_{\Omega} [\rho(z, \theta) (|p(R, z, \theta) - d(z, \theta)|^2 + \gamma(z, \theta) |u(z, \theta)|^2)] d\Omega \quad (79)$$

де  $\rho > 0, \gamma > 0$  и  $d(z, \theta)$  - задані дійсні функції.

Для їх розв'язання пропонуються градієнтні методи, в (37) приведені розрахунки чисельного розв'язання задачі фазового керування параболічним рівнянням у випадку мілкого моря з лінійним профілем швидкості звуку.

В (40) розв'язні також задачі МКК-сцінжування функціоналів для неповних точних вимірів.

5. Задачі синтезу акустичних полів з заданими властивостями. Конкретизуємо тепер деякі задачі оптимізації для граничних умов (56) та рівняння Гельмгольца в області  $K$

$$(\Delta + k^2) \Phi(\vec{x}) = Bu(\vec{x}) \quad (80)$$

з умовами випромінювання на нескінченності. В (80)  $Bu(\vec{x})$  - функція джерела звуку ( $B$  - заданий оператор, від якого буде оговорений нижче и залежить від способу збудження акустичних хвиль, де  $B^*$  - спряжений оператор до  $B$ ).

В роботах [7, 9, 13, 21, 34, 37, 38, 41, 42, 43] розв'язано ряд задач керування акустичними полями в неоднорідному океані, пов'язані з отриманням звукових пучків визначеного типу, наприклад, заданим розподілом амплітуди поля  $\Phi_2(\vec{x})$ , інтенсивності  $I[\Phi]$ , моментів  $I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  та інших величин.

Однак досягнути бажаного розподілу  $\Phi_2(\vec{x})$  навіть коли  $\Phi_2(\vec{x})$  задовільняє граничній задачі і умовам випромінювання неможливо, оскільки в океані завжди присутні випадкові і детерміновані флюктуації параметрів середовища та сигналів, не враховані в моделі. Тому якість сфокусованого поля природньо характеризувати функціоналами [37]

$$I_1[u] = \int_{\Omega_1} \rho(\vec{x}) |\Phi(\vec{x}) - \Phi_2(\vec{x})|^2 d\Omega + \int_{\Omega_2} \gamma(\vec{x}) |u(\vec{x})|^2 d\Omega, \quad (81)$$

$$I_2[u] = \int_{\Omega_1} \rho(\vec{x}) (|\Phi(\vec{x})| - |\Phi_2(\vec{x})|)^2 d\Omega + \int_{\Omega_2} \gamma(\vec{x}) |u(\vec{x})|^2 d\Omega, \quad (82)$$

$$I_3[u] = \int_{\Omega_1} \rho(\vec{x}) (|\Phi(\vec{x})|^2 - J_0)^2 d\Omega + \int_{\Omega_2} \gamma(\vec{x}) |u(\vec{x})|^2 d\Omega, \quad (83)$$

$$I_4[u] = \int \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k | \nabla_{x_k} \Phi(\vec{x}) - \Phi_{3k} |^2 \right\} d\Omega + \int \gamma(\vec{x}) |u(\vec{x})|^2 d\Omega. \quad (84)$$

які характеризують середньоквадратичне відхилення за тиском, за модулем, за потужністю створеного поля  $J_0$ , за градієнтами  $\Phi_{3k}$ .  $\Omega_2 = \{x_1, x_2, x_3: x_1 = x_1^0, (x_2, x_3) \in S, S = LxI_1, -L/2 \leq x_3 \leq L/2, -1/2 \leq x_2 \leq 1/2\}$ ,  $\Omega_1 = \{x_1, x_2, x_3: x_1 = L, -\infty < x_2 < \infty, -H \leq x_3 \leq 0, -1/2 \leq x_2 \leq 1/2\}$ . Функції  $\rho, \gamma, \Phi_3$  та числа  $1, 1_1, L$  дані, причому  $\gamma > 0, \rho > 0, 1 > 0, 1_1 > 0, L > 0$ .

1. Задача амплітудно-фазового керування. Потрібно вибрати таке керування  $u(\vec{x}) \in L_2(\Omega_2)$ , яке мінімізує критерій якості  $I_1, (I_2, I_3, I_4)$  при зв'язках (80).

2. Задача амплітудного керування. Потрібно знайти таке керування  $|u(\vec{x})| \in U \subset \tilde{L}_2(\Omega)$ , яке мінімізує критерій  $I_1, (I_2, I_3, I_4)$  для обмежень (80) ( $\tilde{L}_2(\Omega)$  - сукупність дійсних функцій інтегровних з квадратом).

3. Задача фазового керування. Нехай  $v \in U_1$  ( $U_1$  - задана множина керувань). Потрібно знайти таке  $v \in U_1$ , яке мінімізує  $I_1[v], (I_2[v], I_3[v], I_4[v])$  при зв'язках (80).

Теорема 12. Оптимальні керування  $u, |u|, v$ , які дають розв'язки задачі амплітудно-фазового, амплітудного і фазового керування для функціоналів (81) - (84), визначаються як розв'язки операторних рівнянь

для функціоналу  $I_1[u]$

$$B^* \psi(\vec{x}) + \gamma u = 0,$$

$$\operatorname{Re}(B^* \psi(\vec{x}) e^{-iv} + \gamma u) = 0, \quad (85)$$

$$\operatorname{Im}(B^* \psi(\vec{x}) u) = 0,$$

для функціоналу  $I_3[u]$

$$B^* \psi(\vec{x}) + \gamma u = 0,$$

$$\operatorname{Re}(B^* \psi(\vec{x}) e^{-iv} + \gamma u) = 0, \quad (87)$$

$$\operatorname{Im}(B^* \psi(\vec{x}) \bar{u}(\vec{x})) = 0,$$

відповідно, де  $\psi(\vec{x})$  - розв'язок спряженої задачі

$$(\Delta + k^2 n^2(\vec{x})) \psi(\vec{x}) = \varepsilon_k(\vec{x}), \quad (89)$$

для функціоналу  $I_2[u]$

$$B^* \psi(\vec{x}) + \gamma u = 0,$$

$$\operatorname{Re}(B^* \psi(\vec{x}) e^{-iv} + \gamma u) = 0 \quad (86)$$

$$\operatorname{Im}(B^* \psi(\vec{x}) u) = 0,$$

для функціоналу  $I_4[u]$

$$B^* \psi(\vec{x}) + \gamma u = 0,$$

$$\operatorname{Re}(B^* \psi(\vec{x}) e^{-iv} + \gamma u) = 0, \quad (88)$$

$$\operatorname{Im}(B^* \psi(\vec{x}) \bar{u}) = 0,$$

$$\phi|_{x_3=0} = 0, \quad \partial_{x_3} \phi|_{x_3=0} = 0, \quad (90)$$

$$a \quad g_1(\vec{x}) = (\Phi - \Phi_0) \rho \delta(x_1 - L), \quad (\text{для } I_1[u]),$$

$$g_2(\vec{x}) = (|\Phi| - \Phi_0) \exp(-i \arg \Phi) \rho \delta(x_1 - L), \quad (\text{для } I_2[u]),$$

$$g_3(\vec{x}) = (|\Phi| - \Phi_0) \bar{\Phi}(\vec{x}) \rho \delta(x_1 - L), \quad (\text{для } I_3[u]),$$

$$g_4(\vec{x}) = \sum_k (\partial_{x_k} \Phi - \Phi_{0k}) \rho_k \delta(x_1 - L), \quad (\text{для } I_4[u]),$$

зі спряженими умовами випромінювання на нескінченності.

Зважування 7 Якщо замість граничних умов (90) взяти (7), тоді в (90) другою граничною умовою буде  $[\rho(x_3) \bar{\Phi}]_{x_3=0} = 0$   $[\phi]_{x_3=0} = 0$ . Зазначимо, що спряжені умови випромінювання на нескінченності виділяють хвилі, що приходять. Таким чином, спряжена функція  $\phi(z)$  має сенс зідійтої хвилі. В [7] розглянуто задачу керування з функціоналом  $I_4$  де  $\Omega_1 = \bar{\Omega}$ ,  $\Omega_2$  - куля радіуса  $R$ ,  $n=1$ ,  $n=\text{const}$ ,  $B(\vec{x}) = b(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Omega_1$ ,  $\gamma = \bar{N}$ ,  $\rho = \bar{N}$ .

В роботі [24] розв'язані задачі керування для рівняння Гельмгольца при неповних спостереженнях. Частково їх розглянуто для параболічного рівняння в п. 5.

6. Перерахунок поля в дальню зону хвилевою по вимірах в ближній зоні. Приведемо найпростіший варіант задачі,

коли тіло  $D \subset K$ ,  $\partial D \in C^2$  отримано в результаті обертання деякого контуру навколо осі  $Oz$ ; тоді поверхня його тіла обертання в циліндричній системі координат визначається рівнянням  $r=r(z)$ ,  $-H \leq z \leq b < 0$  не залежним від кутової координати  $\phi$  і задача еквівалентна наступній:

визначити функцію  $\phi \in C^2(K \setminus D) \cap C(\bar{K} \setminus D)$ , задовольняючи в  $K \setminus D$  крайовій задачі для рівняння Гельмгольца  $\Delta \phi + k^2 \phi = 0$ ,  $\Delta \phi + k^2 \phi = 0$ ,  $\text{Im } k \geq 0$   $\phi(r, z, \phi)|_{z=0} = 0$ ,  $\partial \phi / \partial z|_{z=-H} = 0$ ,  $\phi(r, z, \phi) = f$  на  $\partial D$   $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, z, \phi) = 0$ ,  $r \rightarrow \infty$   $f$  - неперервна функція, яка зображує собою вимірні значення акустичного тиску на контрольній поверхні  $\partial D$ . В [35] встановлена

Теорема 12. Звуковий тиск  $\phi(M)$  в точці  $M \in K \setminus D$

обчислюється по формулі  $\phi(M) = \int G(M, N) \Phi(N) dS_N$ , де

$$G(M, N) = \frac{i}{2H} \sum_{m=0}^{\infty} q_m(z_M) q_m(z_N) H_0^{(1)}(\mu_m |r_M^2 + r_N^2 - 2r_M r_N \cos(\varphi_M - \varphi_N)|),$$

$$M, N \in \bar{K}, q_m(r_m) = \sin(\gamma_m z_m), \gamma_m = (z_{m+1})\pi/2H, \mu_m = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2},$$

(вітка кореня при обчисленні  $\mu_m$  вибирається так, щоб

$\text{Im } \mu_m > 0$ ; якщо  $\text{Im } \mu_m = 0$ , то  $\text{Re } \mu_m > 0$ )

а  $\Phi(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z_N) e^{-in\varphi_N}$ ,  $N \in \partial D$  розв'язок, для кожного,  $n$

рівняння

$$\int_{\bar{K}} K_n(z_M, z_N) \Phi_n(z_N) dz_N = f_n(z_M), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \quad f(N) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_M) e^{-in\varphi_N},$$

$$K_n(z_M, z_N) = \frac{\pi i}{H} r(z_N) \sqrt{1 + (r'(z_N))^2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} q_m(z_M) g_m(z_N) \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} & H_n^{(1)}(\mu_m r(z_N)) I_n(\mu_m r(z_M)) - \frac{e^{-\gamma_m(r(z_N) - r(z_M))}}{i\gamma_m \pi \sqrt{r(z_M) r(z_N)}}, \quad r(z_N) \geq r(z_M) \\ & I_n(\mu_m r(z_N)) H_n(\mu_m r(z_M)) - \frac{e^{-\gamma_m(r(z_M) - r(z_N))}}{i\gamma_m \pi \sqrt{r(z_M) r(z_N)}}, \quad r(z_M) \geq r(z_N) \end{aligned} \right]$$

$$+ H \ln P(z_M, z_N) / (4i\pi^2 \sqrt{r(z_N) r(z_M)}) \Big],$$

$$P(z_M, z_N) = (ch^2 b(r(z_N) - r(z_M)) - \sin^2 b(z_M - z_N)) / ((sh^2 b(r(z_N) - r(z_M)) + \sin^2 b(z_M - z_N)) (sh^2 b(r(z_N) - r(z_M)) + \sin^2 b(z_M + z_N)) / ((ch^2 b(r(z_N) - r(z_M)) - \sin^2 b(z_M + z_N))); \quad b = \pi/(4H).$$

Розглянуто також випадок довільної поверхні  $\partial D$ , коли використовується метод скінченних елементів. Оскільки ядро  $K_n(z_M, z_N)$  має логарифмічну особливість, то інтегрування рівнянь для  $\Phi_n(z_N)$  виконується по традиційній схемі.

III. Практична реалізація систем просторової обробки гідроакустичних сигналів і шумів у програмно-технічних комплексах.

Відзначимо, що реалізація і наповнення математичним

забезпеченням (МЗ) програмно-апаратних комплексів спеціалізованого призначення є значною проблемою як за вартістю апаратних засобів, так і за складністю МЗ, що використовуються в тому чи іншому проекті або НДР, залежно від мети та призначення розробки. Такі системи створюються чисельними колективами виконавців. Автор працював в одному з таких колективів і розроблені ним методи, алгоритми, методики та комплекси програм були впроваджені при виконанні ряду державних замовлень в КБ "Штурм".

На блок - схемі приведена загальна структура просторово - часової обробки гідроакустичних сигналів з урахуванням властивостей середовища в пасивному режимі. При цьому в області постановки гідроакустичних засобів система повинна функціонувати як у пасивному локаційному режимі, так і в режимі навчання і тренажера для обслуговуючого персоналу.

Для реалізації МЗ в блоці моделювання гідроакустичної ситуації представлені розроблені комплекси програм, що використовують як модові, так і променеві моделі акустичних полів в області низьких та високих частот для визначення сигнально-шумових характеристик середовища та узгодження розрахункових даних з експериментальними даними акустичних експедицій, і синтезу моделей середовища в районах постановки акустичних засобів. Тут описано МЗ для моделювання розв'язків рівняння (9), що описує розповсюдження хвиль для однорідного та неоднорідного середовища при ідеальних, поглинаючих, імпедансних та змішаних граничних умов для різної геометрії хвилеводів (полоса, плоско-паралельний хвилевод (ППХ), клин, з похилим дном і т.п.). При цьому моделюються поля не лише від точкового джерела, а й від розвинених апертур (в основному антен вертикальних чи горизонтальних), як для мілкого, так і для глибокого морів. Тут представлено і розроблений комплекс програм розв'язування крайових задач для параболічного рівняння акустики (10) скінченно-різницевими методами, перевагою якого є врахування неоднорідностей середовища по трасі поширення сигналу.

Наведемо тепер деякі розрахунки визначення гарантованих

оцінок акустичних полів, координат випромінюючих джерел, по синтезу антени опублікованих у відкритій періодичній літературі [30, 21, 30, 37].

Розглянемо результати моделювання по мінімакшому оцінюванню звукового потенціалу та інтенсивності джерел в плоско-паралельному хвилеводі [30]. Рівняння та граничні умови для мінімакських оцінок  $\Phi$  та  $g$  для вимірів (12) згідно з формулами (49)–(50) приймуть вигляд:

$$\Delta \hat{\Phi} + n^2 \hat{\Phi} = g_{\infty}^2 (\vec{x}) \hat{p}, \quad \Delta \hat{p} + n^2 \hat{p} = F(\hat{\Phi}, \vec{g}), \quad (91)$$

де позначено  $F(\hat{\Phi}, \vec{g}) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^4 (g_{\alpha j}^2 (y_{\alpha j}, -\hat{\Phi}_{\alpha j}(\vec{x}_j - \vec{m}_{\alpha j})) \delta_{\alpha j}(\vec{x} - \vec{x}_j)$ ,

$\hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Phi}_2 = \hat{\Phi}_x$ ,  $\hat{\Phi}_3 = \hat{\Phi}_y$ ,  $\hat{\Phi}_4 = \hat{\Phi}_z$ , а  $\delta_1(\cdot) = \delta(\cdot)$ ,  $\delta_2(\cdot) = -\delta'_x(\cdot)$ ,  $\delta_3(\cdot) = -\delta'_y(\cdot)$ ,  $\delta_4(\cdot) = -\delta'_z(\cdot)$  дельта функція та її похідні.

$K = \{x, y, z: 0 \leq z \leq H, x^2 + y^2 = r^2, r \geq 0\}$ . Для визначення однозначного розв'язку системи задамо парціальні умови Свешнікова для  $\hat{\Phi}$ , їх спряження – для  $\hat{p}$ .

Рівняння (91) еквівалентні системі інтегральних

$$\hat{\Phi}(\vec{x}) = \int_K G(\vec{x}; \vec{\xi}; \omega) g_{\infty}^{-2}(\vec{\xi}) \hat{p}(\vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad \vec{x} \in K,$$

$$\hat{p}(\vec{x}) = \int_K \overline{G(\vec{x}; \vec{\xi}; \omega)} F(\hat{\Phi}(\vec{x}_1), \vec{V}(\vec{x}_1)) d\vec{\xi}, \quad \vec{\xi} = (\xi, \xi, \xi) \text{ де}$$

$G(\vec{x}; \vec{\xi}; \omega)$  – функція Гріна крайової задачі (8)–(9), що має вигляд (92).

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0; \vec{z}, \omega) = -\frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \varphi_n(z_0) H_n^{(2)}(k_n R) - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu(z) \varphi_\nu(z_0) x \quad (92)$$

$$H_n^{(2)}(\sqrt{\nu} R) \operatorname{ch} \nu, \quad \operatorname{Im} \sqrt{\nu} > 0, \quad k = \omega/c, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = r \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2 \frac{r_0}{r} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$k_1 < h_n < k \operatorname{tanh}(z)$ ,  $-\infty \leq \nu \leq k_1$ ,  $k = \omega/c_0$ ,  $n(z) = c/c(z)$ ;  $\vec{r} = (r, \varphi, z)$  – циліндричні координати  $\varphi_n(z)$ ,  $h_n$ ,  $\varphi_\nu(z)$ ,  $\nu$  – дійсні власні функції та власні значення відповідно дискретного та неперервного спектрів крайової задачі Штурма – Ліувілья (8)–(9) ( $i$  – уявна одиниця) Система (91) розв'язується так, як описана в п.4., система (52).

Приведемо чисельні результати МСК оцінювання звукового потенціалу та його градієнтних характеристик за результатами вимірів (II) для полоси в декартовій системі координат [30] Поле моделювалось розподіленням по всій глибині гармонічним джерелом,  $g = \delta(x-x_0)f_0(z)$ ,  $H=200$  м,  $C=1500$  м/сек.

Антенна вертикальна, міжелементна віддаль  $d=4$  м. Шум у вимірах (II) моделювався випадковою гаусовою величиною з нульовим матсподіванням та дисперсією у вигляді

$$D\xi_{zk} = \gamma |\Phi(\vec{x}_k)|^2, D\xi_{zk} = \gamma |V_x(\vec{x}_k)|^2, D\xi_{zk} = \gamma |V_z(\vec{x}_k)|^2, \vec{x} = (x, z), \gamma -$$

Відношення сигнал-шум. На рис.1 а)  $f=5$  Гц,  $m=9, \delta)f=50$  Гц,

$\gamma=5$ . Суцільна лінія - істинне поле, штрихова - оцінка, штрих пунктирна - вимір. Функція  $g_0$  та числа  $g_i$ , вибирались із умови належності областям  $G_i$ ,  $i=0,1$ . На рис.2 приведені результати оцінювання поля та його градієнтних характеристик при  $x=10$  км,  $\gamma=5$ ,  $f=5$  Гц (рис.2а),  $f=50$  Гц (рис.2б)

Результати моделювання показують, що алгоритми МСК оцінок стійкі, вірно оцінюють процес поширення акустичної енергії. При моделюванні встановлено, що градієнтні характеристики акустичного поля значно покращують значення оцінюваного функціоналу. В табл. I приведено обчислення потоку акустичної потужності за результатами мінімаксного оцінювання поля та його градієнтів в точках антени в відносних величинах.

Таблиця I

Z	30 м	34 м	38 м	42 м	46 м	50 м
$P \cdot \Phi_r$	0.56	0.72	0.90	1.09	1.30	1.52
$P \cdot \Phi_z$	0.47	0.53	0.59	0.64	0.69	0.74

Розглянемо тепер, для прикладу, задачу визначення глибини точкового джерела  $g(x, w) = \delta(r-r_0)\delta(z-z_0)$ , в найпростішій для вимірів (II) постановці [24]. Для цього будемо шукати МСК оцінку  $a^T \vec{\varphi}(z_0)$  вектора  $\vec{\varphi}(z_0) = (\varphi_1(z_0), \varphi_N(z_0))$ , (тут  $N$  - число власних функцій (мод)), що поширюється в воді при заданих параметрах  $w$ ,  $H$  та  $C(z)$ ,  $\vec{a}$  - заданий вектор.

Нехай відома область  $G$ , якій належать  $\varphi_i(z_0)$



(функції  $\mathcal{E}_0^2(\omega)$  та  $\mathcal{E}_{k_1}^2(\omega)$  інтегровані і такі, що  $\mathcal{E}_0^2$  та  $\mathcal{E}_{k_1}^2$  існують, функція  $g(\vec{x})$  - задана).

Тоді мінімальна оцінка  $S(\omega)$  знаходиться за формулою

$$\hat{S}(\omega) = [\mathcal{E}_0^2(\omega) + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^M \mathcal{E}_{l,k}^2 |\Phi_l(\vec{x}_k, \omega)|^2]^{-1} * \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^M \mathcal{E}_{l,k}^2(\omega) Y_{l,k}(\omega) |\Phi_l(\vec{x}_k, \omega)|^2, \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (93)$$

де  $\Phi(\vec{x}, \omega)$  - розв'язок крайової задачі (7), (9) при  $g = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ .

Результати моделювання для оцінки прямокутного імпульсу приведені на (рис.12) для циліндричного тивілеводу, з функцією Гріна (92).

Оцінювалась інтенсивність чотирьох точкових джерел, розміщених на глибинах 40 м, 80 м, 120 м, 160 м, на віддалі  $r=50$  км від вертикальної антени з точковими приймачами, які мають координати  $r_A=0$ ,  $z_A^j = z_A^1 + d(j-1)$ ,  $j=1, m$ ,  $z_A^1 = -10$  м,  $d=7,5$  м. Обвідні перетворення Фур'є інтенсивності цих джерел задавалися у вигляді прямокутників висотой 200, 150, 100, 50 одиниць в діапазоні 1500 Гц, 510 Гц, 1 та нулем зовні. Розрахунки по (93) для  $H=200$  м,  $c=1500$  м/сек  $\gamma=1/2$  приведені на рис.12 зразу для всіх інтенсивностей. Штрих-пунктирна лінія це оцінка по виміру тиску, пунктирна - по приймачам. Всі джерела повністю розділяються і

найгірша відносна похибка оцінювання  $\sigma_i = \frac{|S_i(\omega) - \hat{S}_i(\omega)|}{S_i(\omega)} \cdot 100\%$ ,

$i=1,4$  збільшується при збільшенні  $r$  та зменшенні  $\gamma$ :

$r$	$\gamma$	$S_1=200$	$S_2=150$	$S_3=100$	$S_4=50$
$r=10$ км	$\gamma=10$	$\sigma_1=2$	$\sigma_2=1,5$	$\sigma_3=2,2$	$\sigma_4=3,8$
	$\gamma=1/2$	$\sigma_1=10$	$\sigma_2=8,4$	$\sigma_3=13,1$	$\sigma_4=19,8$
$r=50$ км	$\gamma=10$	$\sigma_1=1,35$	$\sigma_2=3,7$	$\sigma_3=3,7$	$\sigma_4=4,4$
	$\gamma=1/2$	$\sigma_1=11,2$	$\sigma_2=20$	$\sigma_3=15,9$	$\sigma_4=27,8$

Розглянемо тепер задачу амплітудно-фазового синтезу акустичних антен в найпростішому варіанті для  $J_2(u)$  в мілкому морі при  $n(z) = az + b$  з м'якою верхньою

границей та граничними умовами (7), які конкретизуємо далі.

В  $J_2[u]$  функції  $\rho(\vec{x})$  та  $\gamma(\vec{x})$  задані, невід'ємні і характеризують області випромінювання та мішені відповідно.

При  $\Phi_3(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}_0)$  задача еквівалентна методу обернення хвильового фронту для фокусування в точку.

В роботах [23, 29, 37, 45] розроблені методи синтезу полів, що мають задані властивості. Так визначення  $u(\vec{x})$  в сформульованій задачі амплітудно-фазового керування для мінімуму  $J_4[u]$  п.5 зводиться до розв'язку інтегрального рівняння (85), яке еквівалентне такому

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{y}) G(\vec{y}, \vec{x}) \int_{\Omega_0} G(\vec{y}, \xi) u(\xi) d\xi d\vec{y} + \gamma(\vec{x}) u(\vec{x}) = \int_{\Omega} \rho(\vec{y}) G(\vec{y}, \vec{x}) \Phi_3(\vec{y}) d\vec{y}$$

Приведемо розрахунки по фокусуванню звукового поля в задану точку чи область. Розглянемо вертикальну антену для ПХ з твердим дном при  $H = 250$  м,  $C = C(z) = C_0(1 - \nu Cz)$ ,  $r_0 = 30$  км. Фокусування проводимо в область, витягнуту по вертикалі по закону  $\Phi_3(z) = \exp(-(z-z_0)^2/\alpha^2)$  з параметром  $\alpha$ , що характеризує ширину області,  $\Omega = \Omega_1 = H$ . Параметром  $\sigma$  далі будемо характеризувати відношення максимуму поля в точці фокусування ( $r_0$ ,  $z_0$ ) до середнього значення бокових викидів,  $\sigma = |\Phi_{\max}|/|\Phi_{\text{сер}}|$ ,  $l$  - довжина апертури. Залежність поля  $\Phi^0$  від розмірів плями по вертикалі зрозуміла з рис.3  $l=250$  м,  $f=100$  Гц,  $r_0=50$  м,  $1-\sigma=54,4$   $\alpha=10$  м,  $2-\sigma=34,8$ ,  $3-\sigma=21,3$   $\alpha=30$  м. При збільшенні  $\alpha$  величина максимуму поля змінюється незначно.

Зміна якості фокусування від довжини хвилі (рис.4)  $r_0=50$  м,  $\alpha=10$  м,  $l=250$  м,  $c=0,1$  м,  $1-f=50$  Гц,  $\sigma=4$ ,  $2-f=75$  Гц,  $\sigma=53$ ,  $3-f=100$  Гц,  $\sigma=5$ . Відмітимо, що при зміні  $c$  від  $0,05$  с<sup>-1</sup> до  $0,15$  с<sup>-1</sup> параметри  $\sigma$  та  $\Phi$  практично не змінюються.

Залежність поля на антені від віддалі до фокальної плями для  $f=100$  Гц,  $\alpha=10$  м,  $l=250$  м,  $r_0=50$  м,  $c=0,1$ ;  $1-r_0=20$  км,  $2-r_0=40$  км,  $3-r_0=60$  км показано на рис.5.

Особливість поширення звукових хвиль низьких частот ( $f = 10 + 100$  Гц) в неглибоких морях полягає в псмтній взаємодії звукових хвиль з поверхнею та дном океану.

Встановлено, що ослаблення звукових хвиль обумовлено переважно втратами енергії в морському дні, тоді як об'ємне поглинання відіграє незначну роль. Наближена формула для коефіцієнта затухання хвилі номеру  $m$  така:

$$\beta_m \approx k_1 \lambda^2 (m - 1/2)^2 / 8H^3, \quad k_1 = 2\text{Re}(\nu \sqrt{k_2^2 - 1}), \quad \nu = \rho_{\text{дн}} / \rho_{\text{в}},$$

$$n_1 = \bar{n}(1 + i\alpha), \quad \alpha = 0.001 f^{1/2}.$$

З урахуванням поглинання кожний член ряду функції Гріна (92) домножується на  $\exp(-\beta | \vec{r} - \vec{r}_0 |)$ . На рис.6 показана залежність сфокусованого поля від  $r_0$  для рідкого дна,  $\nu=1.8$ ,  $\alpha=0.014$ ,  $f=200$  Гц,  $a=10$ ,  $z_0=50$  м,  $l=250$  м,  $l-r_0=10$  км,  $\sigma=11$ ,  $2-r_0=11$  км,  $\sigma=10$ ;  $3-r_0=12$  км,  $\sigma=4$ .

Характер впливу дна, як видно з рис.6, приводить до зміни  $\sigma$ , чого немає для твердого дна. Для твердого дна  $\sigma$  майже не змінюється. Вплив другого члену в (93) характеризує рис.9. Для  $r_0=0.5$  км,  $z_0=50$  м,  $l=250$  м,  $f=50$  Гц,  $\alpha=0.7$ ,  $\nu=1.8$ . Суцільна лінія - без другого члену в (92), штрихована з його урахуванням. Взає на віддвілі  $r_0=0.5$  км бокова хвиля майже не впливає на фокусування.

Для жорсткого дна та  $r_0=20$  км,  $f=50$  Гц,  $z_0=100$  м,  $l=250$  м, рис. 10 ілюструє вплив на фокусування в точку градієнтів поля. Суцільна лінія відповідає мінімізації  $I_4$ , а штрихова -  $I_4$ .

Слід відмітити, що найкраще фокусування має місце при повному перекритті вертикальною антеною хвилеводу. Аналіз ліній різня побудованих в площині  $(r, z)$  показує, що при зменшенні  $l$  фокальна пляма розширюється, а значення модуля поля  $\Phi^0(\vec{r})$  в центрі плями зменшується. Одночасно з'являється багато побічних інтерференційних піків, причому рівень інтерференційних максимумів зростає і стає по величині майже такий як значення поля в центрі фокальної плями. В цілому, рівень побічних максимумів помітно (більш, ніж на порядок) перевищує аналогічну величину при фокусуванні в  $R^3$ , що пояснюється впливом границь (див. рис.7-8). Рис.7  $a=10$  м,  $l=250$  м,  $r_0=20$  км,  $z_0=100$  м,  $c=0.1 \text{ м}^{-1}$  - центр плями.

Рис.8  $a=20$  м,  $r_0=20$  км,  $f=50$  Гц. Чим більша  $a$ , тим лінії різня більше витягнуті по горизонталі. Вплив частоти на фокусування в точку ілюструє рис.11 для двохвимірного

хвилеводу [6]. Довжина антени зображена внизу (тут  $|\Phi^0| = |u|$ ).

Використання методу фокусування для визначення координат  $r_0, z_0$  точкових та розподілених джерел впливає із побудови функції  $|\Phi^0|$  в хвилеводі (див. рис. 3-II). Крім того обчислення показують, що вибір амплітудно-фазового розподілу по довжині антени як розв'язок рівняння (85) в порівнянні із традиційними заданнями  $u(x)$  (лінійна, по біноміальному закону, та ін.) дозволяє при фокусуванні у хвилеводі збільшити рівень звукового поля в порівнянні з традиційним на порядок.

Використання рівняння Гемгольца для визначення координат випромінюючих джерел фокусуванням енергії в точці чи області хвилеводу дуже громіздка для обчислення процедура, тому використання параболічного наближення дозволяє значно швидше проводити обчислення в багатовитратних обернених задачах. Розрахунки проведені в [37, 42] показують, що, для мілкого моря з твердим дном і лінійним профілем швидкості звуку, навіть в задачі фазового керування максимум квадрату модуля поля майже на порядок більше аналогічної величини при використанні, в хвилеводі, традиційного фазового керування для  $K^2$ .

Апаратні засоби системи забезпечують збір, ідентифікацію, попередню обробку, аналогово-цифрове перетворення, накопичення гідрозвучної інформації в ПЕОМ, експрес-аналіз, контроль та відображення інформації, а також забезпечують комутацію та керування апаратурою з пульта оператора.

В блоці попередньої обробки відбувається як стандартна первинна обробка так і вторинна обробка, що містить в собі когерентний та спектральний аналіз на заданих частотах, побудови функцій розподілу фази та рівня сигналу по каналу, кореляційних характеристик і т.п.

Спеціальна обробка включає в себе побудову діаграм направленості (ДН) в області високих і низьких частот в тому числі і з урахуванням властивостей середовища, з реалізацією як стандартних наборів ДН так і синтезованих на основі розв'язку рівнянь (85)-(88) для горизонтальних і вертикальних антен.

Роботю комплексу керує спеціалізований системний

монітор, який реалізує резидентну частину та забезпечує управління програмними засобами.

При функціонуванні вимірвального комплексу для розв'язку задач визначення шумності досліджуваних об'єктів розроблена методика розв'язку на основі задачі перерахунку поля із близької зони в дальню з урахуванням хвилеводного поширення, а також для побудови індикатриси розсіювання. Розв'язок цієї задачі зводиться до розв'язку задачі розрахунку поля тиску в плоскопаралельному хвилеводі по даним вимірювання тиску на деякій контрольній поверхні, охопленій випромінювач, в близькому звуковому полі.

Практичне застосування наведених результатів в складі програмно-апаратних комплексів, що забезпечують проведення швартових і стопових акустичних вимірювань кораблів на базі випробувальних полігонів показало високий рівень адекватності побудованих моделей та експериментальних даних і дозволило автоматизувати процес локалізації джерел підвищеного шуму вібрвипромінювання, шумового портрету об'єкту та ін.

#### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Основні результати роботи полягають в наступному:

Розроблені теоретичні основи розв'язування задач керування рівняннями гідроакустики в звичайній та мінімакській постановці.

Запропонована концепція розв'язування задач просторової обробки гідроакустичних сигналів, основана на методі мінімаксного оцінювання звукових полів, їх характеристик і випромінюючих джерел на основі антенних вимірів з урахуванням властивостей середовища.

Розроблено метод аналізу шумів гідроакустичного об'єкту в хвилеводі, оснований на точному перерахунку даних вимірів про звукове поле від близької зони до дальньої.

Розроблена концепція оптимального керування гідроакустичними полями в океанічних хвилеводах, яка основана на варіаційному підході для рівнянь Гельмгольца в поєднанні з променевим і модовим підходом.

Розроблена концепція керування звуковими полями в хвилеводах, основана на параболічному рівнянні.

Розроблені методи і комплекси програм, що реалізують оптимальні алгоритми фокусування акустичної енергії в задану область хвилеводу вертикальними та горизонтальними антенами в області низьких (на основі модового підходу) і високих (на основі променевого методу) частот;

запропоновані методи аналізу та синтезу акустичних полів на основі променевого та модового підходів;

розроблено комплекс програм синтезу адаптивних антенних решіток;

розроблені алгоритми і програми для визначення градієнтних характеристик багатозарових хвилеводів методом параболічного рівняння;

розроблені алгоритми та програми по визначенні координат джерел у хвилеводі на основі мінімаксних методів оцінки інтенсивності джерел та власних функцій при неповних вимірах тиску та коливальної швидкості;

Основні результати проведених наукових досліджень були використані при виконанні та впровадженні НДР та ДКР "Міранда-УВО", "Міранда-2-УВО", "Мінерал", "Вимірювач", "Альдебаран", "Сангар", "Мезень", "Захист", "Бензол", "Кола" та ін. при проведенні ходових швартових і стопових вимірювань кораблів.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Данилов В.Я. Об одной задаче с квадратичным критерием качества // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. Киев. - 1981. - Вып. I. - С. 81-89.
2. Данилов В.Я., Фоменко А.В. Об оптимальном управлении в задаче демпфирования периодических колебаний распределенных систем // Межвед. научн. сб. Выхисл. и прикл. матем. - 1982. - вып. 47. - С. 122-126.
3. Данилов В.Я., Каспрук М.А., Романов Н.П. Некоторые задачи оценивания для уравнения Гельмгольца // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. Киев. - 1983. - Вып. 2. - С. 106-109.
4. Данилов В.Я., Федорченко И.С., Цитрицкий О.Е. Подвижное управление и векторная оптимизация // Сб. научн. трудов. Управление ресурсами с подвижным

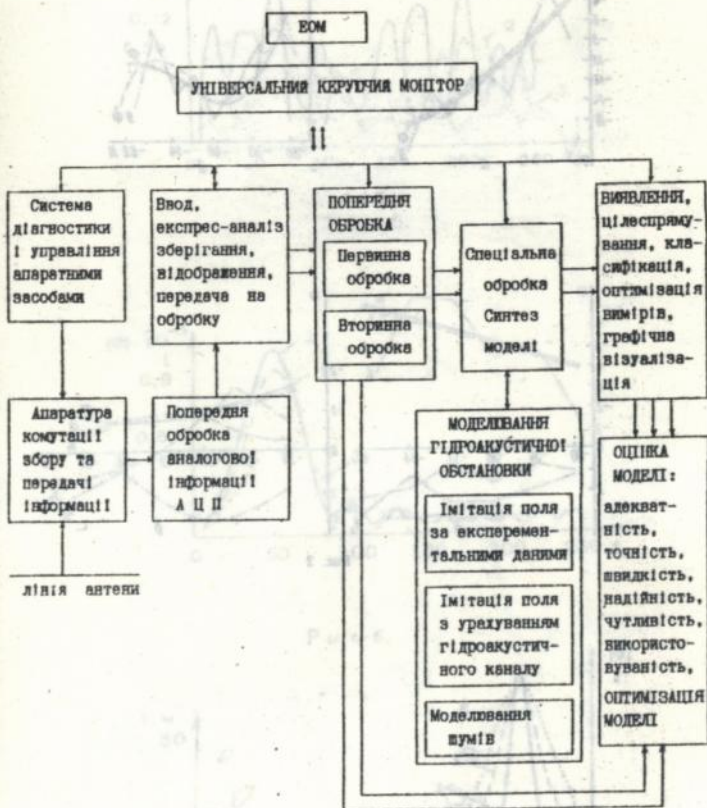
- воздействием. - Куйбышев: КПИ. - 1983. - С.38-39
5. Данилов В.Я., Капустян В.Е. Об оптимальном успокоении бесконечномерных систем с запаздыванием // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1983. - Вып.3. - С.71-77.
6. Данилов В.Я., Кравцов В.А., Петников В.Г. и др. Об управлении волновыми полями в волноводах // Москва, 1984. 28 с. (Препринт/АН СССР. Ин-т общей физики: № 163).
7. Наконечный А.Г., Данилов В.Я., Ляшко В.И. Оптимизационные методы в задачах гидроакустики // Киев. 1984. - 40 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т кибернетики: 84-31).
8. Данилов В.Я., Федорченко И.С., Цитрицкий О.Е. Об устойчивом методе решения задачи управления операторным включением // Международ. конф. по дифференциальным уравнениям. - г. Руссе, Болгария, 1985. - С.33.
9. Данилов В.Я., Федорченко И.С., Ткалич Е.Ф. Об оптимальном управлении акустическими полями в волноводах // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1985. - Вып.4. - С.17-21.
10. Наконечный А.Г., Данилов В.Я. Задачи оптимального управления для эволюционных уравнений со специальными критериями качества // Тез. докл. X Всесоюз. совещания по проблемам управления. - Алма-Ата, 1986. - Книга I. - С.183-184.
11. Данилов В.Я. Оптимальный анализ диаграмм направленности на основе интегральных уравнений // Интегральные уравнения в прикладном моделировании. : Тез. докл. Республ. научно-технич. конф. - Киев, 1986. - Т I. - С.116-117.
12. Аджубей Л.Т., Данилов В.Я., Построение минимаксных регуляторов для уравнений гиперболического типа по неполным данным // Метод функций А.М. Ляпунова в совр. матем.: Тез. докл. Всесоюз. научн. конф. - Харьков, 1986. - С.101.
13. Аджубей Л.Т., Данилов В.Я. Построение минимаксных регуляторов для распределенных систем при специальных критериях качества // Комплексная автоматизация промышленности: Труды второй научно-техн. конф.

- советских молодых ученых выпускников высших учебных заведений СССР. - 1986. - С.71-74.
14. Аджубей Л.Т., Данилов В.Я., Кудин Г.И. Метод усреднения в задачах минимаксного оценивания систем с распределенными параметрами // Качественная теория дифференциальных уравнений.: Тез. докл. 6-й Всесоюз. научн. конф. - Иркутск, 1986. - С.4.
15. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Задачи оптимального наблюдения и управления для упругих пластин по неполной информации // Труды 6-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986. - С.138.
16. Данилов В.Я., Кудин Г.И., Аджубей Л.Т. Минимаксное оценивание систем, содержащих элементы с распределенными параметрами // Оптимальное управление механическими системами.: Тез. докл. 5-й Всесоюз. научн. конф. - Казань, 1986. - С.37.
17. Ткалич О.Ф., Кудин Г.И., Данилов В.Я. и др. Задачи управления звуковыми полями в волноводах // Актуальные проблемы модел. и упр-я системами с распределенными параметрами.: Тез. докл. Всесоюз. научно-техн. конф. - Одесса, 1987. - С.142.
18. Данилов В.Я. К решению задачи управления волновыми полями // Актуальные проблемы модел. и упр-я системами с распределенными параметрами: Тез. докл. Всесоюзн. научно-технич. Одесса, 1987. - С.49.
19. Данилов В.Я., Ткалич О.Ф., Федорченко И.С. Определение координат источников по методу обращения волнового фронта /ОВФ/ в неоднородном волноводе // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1987. - Вып.6. - С.18-23.
20. Данилов В.Я., Аджубей Л.Т., Кудин Г.И. Некоторые задачи управления и оценивания колебательных распределенных систем с малым параметром // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1987. - Вып.6. - С.85-89.
21. Данилов В.Я., Грачев В.И., Кравцов В.А. и др. Об управлении волновыми полями в многоволновых волноводах:

- численные расчеты фокусировки поля с использованием принципа фазового сопряжения // Изв. ВУЗОВ. Радиофизика. - 1988. - Т.31. - С.73. Статья депонирована в ВИНТИ N 8636-887, Деп. от 10.12.1987. - 14 с.
22. Данилов В.Я. Задачи управления для параболического уравнения в акустике // Тез. докл. 4-ой Республ. конф. Проблемы гидроакустики в освоении Мирового океана. - Часть I. - Киев, 1987. - С.69-70.
23. Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи управления и оценивания в гидроакустике // Кибернетика и вычисл. техника. - 1988. - Вып.77. - С.100-106.
24. Данилов В.Я., Аджубей Л.Г. Определение глубины источника в плоском волноводе // Вестн. Киев. ун-та Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1988. - Вып.7. - С.15-19.
25. Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Задачи управления для интегродифференциальных уравнений Риккати // Управление в механических системах.: Тез. докл. 7-й Всесоюз. науч. конф. - Львов, 1988. - С.117.
26. Наконечный А.Г., Данилов В.Я. Задачи управления и оценивания в гидроакустике при неполных данных // 7 th IFAC Workshop on Control applications of nonlinear programming and optimization: Tbilisi, 1988. - p.114-115.
27. Данилов В.Я., Бублик В.А., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах // Киев.: УМК ВО. 1988. - 190 с.
28. Наконечный А.Г., Данилов В.Я. Задачи управления волновыми процессами и их численное решение // Численные методы в современных волновых задачах акустики.: Тез. докл. Всесоюз. конф. - Акуст. ин-т. - Москва, 1988. - С.55.
29. Данилов В.Я. Задачи управления волновыми процессами // Комплексная автоматизация промышленности: Труды 3-й советско-польской научно-технич. конф. - Вроцлав, 1988. - С.131-137.
30. Наконечный А.Г., Данилов В.Я., Аджубей Л.Т. Оценивание градиентных характеристик и интенсивности в волноводах // Межвед. научн. сб.:

- Вычислит. и прикл. матем. - 1989. - Вып. 69. - С. 128-134.
31. Данилов В.Я., Мельник В.С. Точечные и гранично-точечные воздействия в квазиреальных системах с распределенными параметрами // Разрывные динамические системы.: Тез. докл. Всесоюз. школы-семинара. 1989. - С. 21-22.
  32. Данилов В.Я. К решению задач синтеза акустических антенн в волноводах // Управление в механических системах.: Тез. докл. Седьмой Всесоюз. научн. конф. Свердловск, 1990. - С. 35.
  33. Данилов В.Я. К решению некоторых прикладных задач управления звуковыми полями в волноводах // Математические методы оптимального управления и их приложения: Тез. докл. Междунар. советско-польский семинар. - Минск, 1989. - С. 159-160.
  34. Данилов В.Я., Лучицкий И.А., Ткалич Е.Ф. и др. Определение координат источников по методу обращения волнового фронта // Мат. физ. и нелинейн. механика. - 1990. - Вып. 13. - С. 40-46.
  35. Данилов В.Я., Подлипенко Ю.К. Применение метода интегральных уравнений к задаче расчета поля в плоскопараллельном волноводе по результатам измерения акустического давления в ближнем поле излучателя // Автоматика. - 1990. - № 2. - С. 50-56.
  36. Данилов В.Я., Мельник В.С. К задаче минимаксного управления для нелинейных дифференциально-операторных уравнений // Межвед. республ. сб.: Вычислит. и приклад. матем. - 1990. - Вып. 71. - С. 114-119.
  37. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидродвустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах.: Труды АН СССР ИКФ. - Нижний Новгород, 1990. - С. 32-55.
  38. Данилов В.Я., Щур В.И. Некоторые задачи управления звуковыми полями на основе лучевого метода // Межвед. респ. сб.: Исследование операций и АСУ. - 1990. - Т 36. - С. 22-29.

39. Данилов В.Я., Мельник В.С. Оптимизационные задачи для уравнений гидродинамического типа // Доклады АН УССР, серия А. - 1990. - Т.10. - С.12-14.
40. Данилов В.Я. Некоторые оптимизационные задачи для параболического уравнения в акустике // Кибернетика и вычисл. техника. - 1990. - вып. 85. С.87-93.
41. Данилов В.Я., Щур В.И. К решению задач управления акустическими полями на основе лучевого метода // Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии: Тез. докл. 5-й Всесоюз. симпозиум. - Новосибирск, 1989. - 174-175.
42. Данилов В.Я. К задаче управления в плоскостной среде // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1990. - Вып. 9. - С.17-21.
43. Данилов В.Я. К задаче оптимизации мощности, излучаемой в океаническом волноводе // Проблемы комплексной автоматизации: Труды 4-й международной научно-техн. конф. Секция 3. - Киев, 1990. - С.50-54.
44. Данилов В.Я., Ткалич Е.Ф., Щур В.И. Об управлении волновыми полями в гидрокустических волноводах на основе принципа фазового сопряжения // Межвед. респ. сб.: Исследования операций и АСУ. 1992. - Вып. 38. - С.41-45.
45. Данилов В.Я. Задачи сценивания и контроля в гидрокустике // Контроль и управление в технических системах: Тезисы докл. Научно-техн. конф. стран СНГ. - Вьеница, 1992. - С.162.
46. Данилов В.Я. Задачи оптимизации в гидрокустике // Проблемы комплексной автоматизации: Труды 4-й международной научно-техн. конф. Секция 3. - Киев, 1990. - С.50-54.
47. Данилов В.Я., Ткалич Е.Ф., Щур В.И. Об управлении волновыми полями в гидрокустических волноводах на основе принципа фазового сопряжения // Межвед. респ. сб.: Исследования операций и АСУ. 1992. - Вып. 38. - С.41-45.
48. Данилов В.Я. Задачи сценивания и контроля в гидрокустике // Контроль и управление в технических системах: Тезисы докл. Научно-техн. конф. стран СНГ. - Вьеница, 1992. - С.162.
49. Данилов В.Я. Задачи оптимизации в гидрокустике // Проблемы комплексной автоматизации: Труды 4-й международной научно-техн. конф. Секция 3. - Киев, 1990. - С.50-54.
50. Данилов В.Я., Ткалич Е.Ф., Щур В.И. Об управлении волновыми полями в гидрокустических волноводах на основе принципа фазового сопряжения // Межвед. респ. сб.: Исследования операций и АСУ. 1992. - Вып. 38. - С.41-45.



Блок-схема

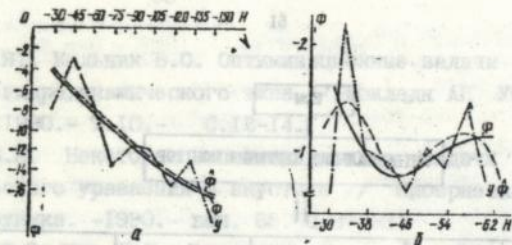


Рис. 1

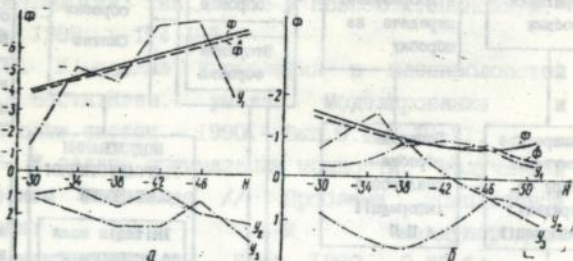


Рис. 2

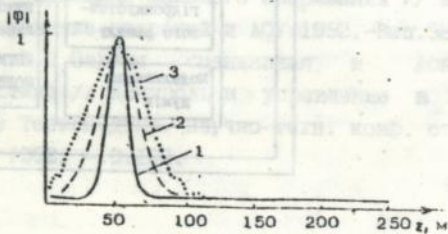


Рис. 3.

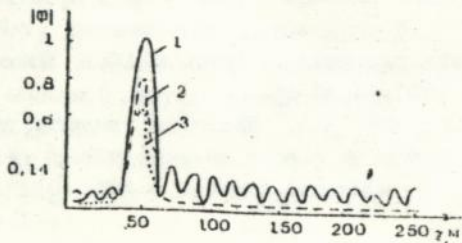
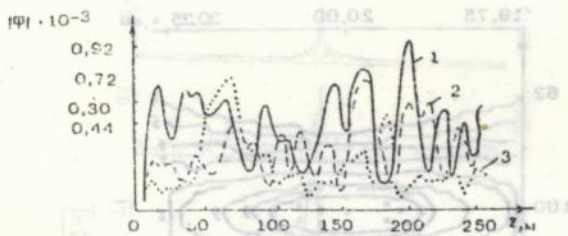
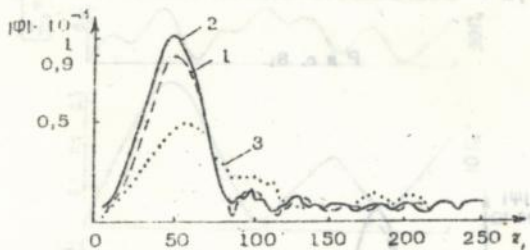


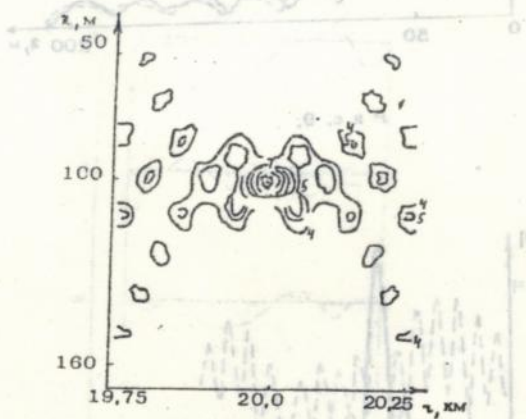
Рис. 4.



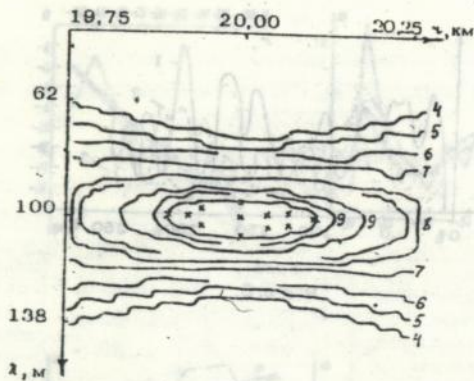
Р и с. 5.



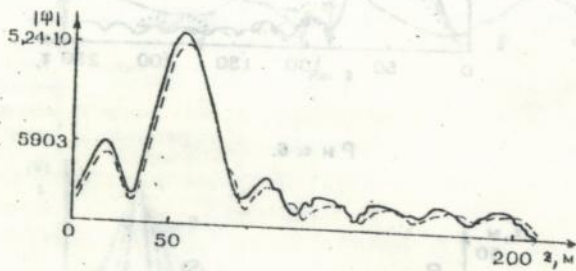
Р и с. 6.



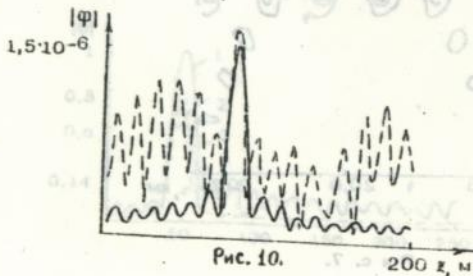
Р и с. 7.



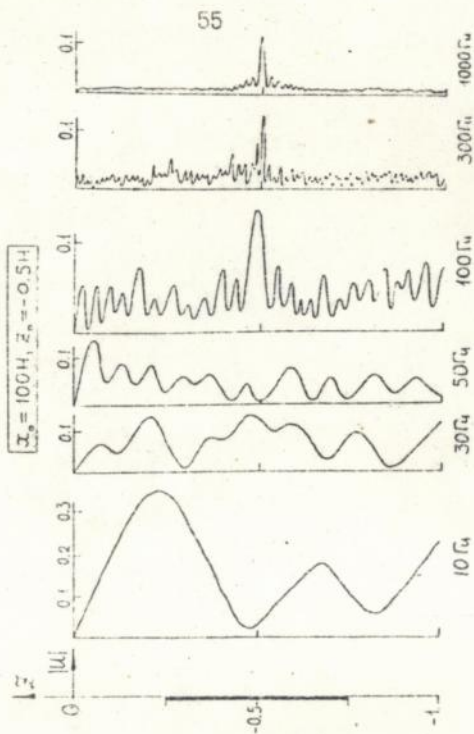
Р и с. 8.



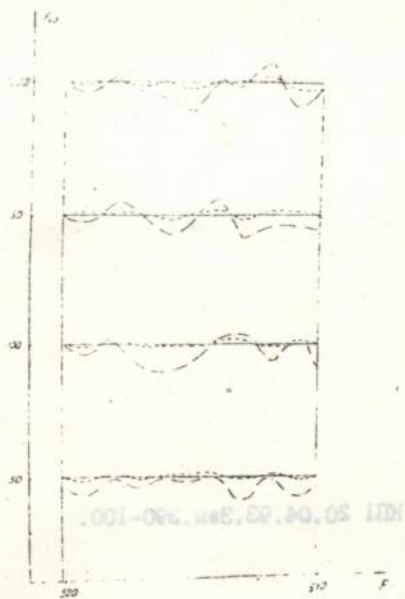
Р и с. 9:



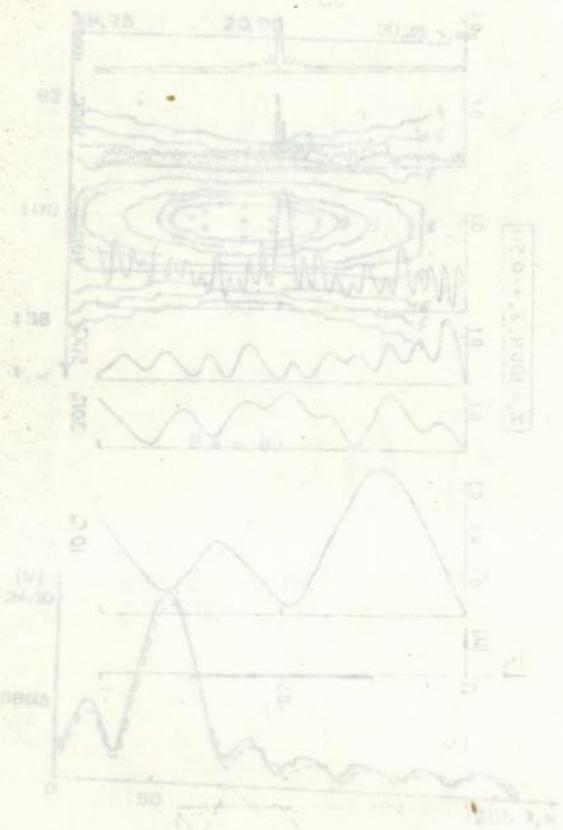
Р и с. 10.



Р и с. 11.



Р и с. 12.



Σ = 1000 S<sup>2</sup> x 0.2 m

КПІ 20.04.93.3ам.390-100.





465198

Ab 27.230

**Ab 27.230**