

На правах рукописи

ВИШНЯКОВА Анна Марковна

Ави

РОСТ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ И ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Харьков – 1993



AB 27.275

Работа выполнена на кафедре теории функций
Харьковского государственного университета

Научный руководитель:

член-корр. АН Украины,
доктор физико-математических наук,
профессор Островский И.В.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Азарин В.С. (ХЛНТ)

доктор физико-математических наук,
доцент Логвиненко В.Н. (ХГУ)

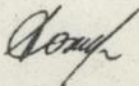
Ведущая организация -

Львовский государственный университет

Защита состоится " 4 " июня 1993 г.
в " 16¹⁵ " час. на заседании специализированного совета
К 053.06.02 в Харьковском государственном университете
по адресу: 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4, ауд. 6-48

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной
библиотеке Харьковского государственного университета.

Автореферат разослан " 4 " мая 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета  доц. А.С.Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Целые и аналитические характеристические и хребтовые функции играют важную роль в теории вероятностей и некоторых вопросах теории функций и функционального анализа. При изучении таких функций одной из основных является проблема выяснения связи между ростом функции и распределением ее нулей. Диссертация посвящена решению некоторых вопросов, относящихся к этой проблеме. Этим объясняется актуальность темы диссертации.

Цель работы. Цель диссертации состоит в решении следующих задач:

- 1.° Изучить рост целых и аналитических в полуплоскости характеристических и хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области.
- 2.° Исследовать регулярность роста целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций двойного экспоненциального роста с ограничениями на расположение нулей.
- 3.° Получить описание нулевых множеств некоторых классов целых функций, ограниченных в полуплоскости.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Результаты, относящиеся к задаче 1.°, ранее были известны в случае, когда угловая область является всей плоскостью или полуплоскостью (И.Марцинкевич, И.В.Островский, А.А.Гольдберг и И.В.Островский, И.П.Каминни и др.). Методы, которыми ранее пользовались, неприменимы к рассматриваемому случаю. В диссертации использован новый метод, основанный на

контурном интегрировании.

Результаты, относящиеся к задаче 2^0 , можно считать обобщением теоремы В.В.Зимогляда о целых хребтовых функциях. В диссертации рассмотрен случай аналитических в полуплоскости хребтовых функций и получена более точная, чем у В.В.Зимогляда, оценка регулярности роста. Для решения задачи 2^0 использован метод, аналогичный методу решения задачи 1^0 .

В связи с задачей 3^0 заметим, что ранее были описаны нулевые множества всех целых характеристических функций вероятностных распределений (И.П.Камнин и И.В.Островский, 1982). Вопрос об описании нулевых множеств целых характеристических функций, ограниченных в полуплоскости (т.е. целых характеристических функций распределений, сосредоточенных на полуоси) остается открытым. Единственный результат в этом направлении принадлежит И.В.Островскому (1988) и дает описание конечных нулевых множеств таких функций. Мы получим полное описание нулевых множеств трех классов целых функций, близких к классу целых характеристических функций вероятностных распределений, сосредоточенных на полуоси. При решении задачи 3^0 в диссертации использован метод, разработанный И.П.Камниним и И.В.Островским для решения задачи об описании нулевых множеств целых эрмитово положительных функций.

Методика исследования. Методы, использованные для решения задач 1^0 и 2^0 , основаны на контурном интегрировании и применении других методов теории аналитических функций.

При решении задачи 3^0 используется метод, основанный на применении теоремы М.В.Келдыша о приближении аналитичес-

ких функций целыми, а также метод, разработанный И.П.Каминным и И.В.Островским для описания нулевых множеств целых эрмитово позитивных функций.

Значение результатов диссертации. В диссертации обнаружены новые закономерности, относящиеся к связи между ростом и распределением нулей целых и аналитических характеристических и хребтовых функций. Разработан новый метод, позволяющий исследовать целые и аналитические в полуплоскости характеристические и хребтовые функции.

Основные положения, вынесенные на защиту.

1. Точные оценки роста целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций, не имеющих нулей в угловых областях.

2. Регулярность роста целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций двойного экспоненциального роста с ограничениями на нули.

3. Полные описания нулевых множеств специальных классов целых функций, ограниченных в полуплоскости.

Апробация работы. Изложенные в работе результаты докладывались на Всесоюзной конференции по приложениям комплексного анализа (г. Черноголовка, 1989 г.), на Всесоюзной конференции по комплексному анализу (г. Харьков, 1990 г.), на международной школе по комплексному анализу (пос. Николаевка, Крым, 1992 г.), на Харьковском городском семинаре по теории функций (рук. проф. Б.Я.Левин и проф. И.В.Островский), на Харьковском городском семинаре по аналитическим

вопросам теории вероятностей (рук. проф. И.В.Островский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1] - [5].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 4-х глав. Объем диссертации 103 страницы, библиография - 27 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена история вопросов, рассматриваемых в диссертации, и проведено сравнение полученных результатов с предшествующими работами других авторов.

В главе I изучается рост целых и аналитических в верхней полуплоскости характеристических и хребтовых функций при ряде ограничений на распределение нулей.

Напомним, что функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, называется характеристической, если она представима в виде

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P(dx), \quad (1)$$

где P - вероятностная мера на прямой. Целая (аналитическая в полуплоскости $C_+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ и непрерывная вплоть до границы) функция называется характеристической, если ее сужение на вещественную ось является характеристической функцией. Известно, что для целой (аналитической в C_+) характеристической функции представление (1) сохраняет силу при всех $t \in C$ ($t \in C_+$), -

причем интеграл в правой части (I) сходится абсолютно.

Целая (аналитическая в \mathbb{C}_+) функция φ , $\varphi(0) = 1$, называется хребтовой, если она при $t \in \mathbb{C}$ ($t \in \mathbb{C}_+$) удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| \leq \varphi(i \operatorname{Im} t).$$

Понятие хребтовой функции было введено Ю.В. Линником и является естественным расширением понятия характеристической функции. Поэтому мы стремимся в целях большей общности доказывать теоремы для хребтовых функций, а примеры, показывающие точность оценок, даваемых этими теоремами, находить в классе характеристических функций.

Основными результатами главы I являются следующие две теоремы.

Теорема I. Пусть аналитическая в \mathbb{C}_+ хребтовая функция $\varphi(z)$ не имеет нулей в угле $\{z: |\arg z - \pi/2| < \alpha\}$ при некотором $\alpha \in (0; \pi/2]$. Если

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \ln^+ \ln^+ |\varphi(iy)| = 0, \quad (2)$$

то

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} (\ln y)^{-1} \ln^+ \ln^+ |\varphi(iy)| < \infty. \quad (3)$$

При $\alpha = \pi/2$ эта теорема была доказана И.В.Островским.

Аналогичная теорема доказывается для целых хребтовых функций.

Теорема I'. Пусть целая хребтовая функция $\varphi(z)$ не имеет нулей в угловой области $\{z: |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z: |\arg z + \pi/2| < \alpha\}$ при некотором $\alpha \in (0; \pi/2]$.

Если

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \ln^+ \ln^+ (|\varphi(iy)| + |\varphi(-iy)|) = 0, \quad (2')$$

то

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} (\ln y)^{-1} \ln^+ \ln^+ (|\varphi(iy)| + |\varphi(-iy)|) < \infty. \quad (3')$$

При $\alpha = \pi/2$ теорема I' была доказана И.В.Островским **

Заметим, что условия (2) и (2') в теоремах I и I' ослабить нельзя: об этом свидетельствует пример целой характеристической функции распределения Пуассона $\varphi(z) =$

* Островский И.В. О росте целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций // Матем. сборник. - II9 (I61), № I (9). - 1982. - с. 150 - 159.

** Островский И.В. О применении одной закономерности, обнаруженной Виманом и Валироном, к исследованию характеристических функций вероятностных законов // Докл. АН СССР. - 143, № 3. - 1962. - с. 532 - 535.

$$= \exp(a(\exp(ibz) - 1)) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad b > 0 \quad .$$

Утверждения (3) и (3') могут быть уточнены: в правой части (3) и (3') можно поставить конкретные величины, зависящие от α . Этим уточнениям будут посвящены теоремы 3 и 4 главы II.

Теоремы I и I' можно рассматривать как обобщения утверждения, высказанного в 1960 г. Ю.В.Линником в качестве гипотезы и доказанного в 1962 г. И.В.Островским: если целая ха-

рактеристическая функция имеет вид $\varphi(z) = \exp f(z)$, где $f(z)$ - целая функция не выше минимального типа порядка 1 , то $f(z)$ - полином.

Теорема 2. Пусть аналитическая в \mathbb{C}_+ хребтовая функция $\varphi(z)$ не имеет нулей. Пусть

$$0 < \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \ln^+ \ln^+ |\varphi(iy)| = a < \infty .$$

Тогда

$$\ln^+ \ln^+ |\varphi(iy)| \leq ay + o(\ln^2 y), \quad y \rightarrow +\infty .$$

Эта теорема является уточнением результата В.В.Зимогляда*, показавшего, что для целой хребтовой функции $\varphi(z)$ без нулей из условия

* Зимогляд В.В. О росте целых функций, удовлетворяющих специальным неравенствам // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - вып. 6. - 1968. - с. 30 - 41.

$$0 < \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \ln^+ \ln^+ (|\varphi(iy)| + |\varphi(-iy)|) = a < \infty.$$

следует, что

$$\ln^+ \ln^+ |\varphi(iy)| \leq a|y| + O(\sqrt{|y|}), \quad y \rightarrow \pm \infty.$$

Для формулировки результатов главы II введем следующее обозначение: для $0 < \alpha \leq \pi/6$ обозначим $\gamma(\alpha)$ лежачий в интервале $(\pi/(2\alpha); \pi/\alpha)$ корень уравнения

$$\cos \gamma (\alpha + \pi/\gamma) = -\cos \gamma \alpha.$$

Заметим, что $\gamma(\alpha) = \pi/\alpha - 2\sqrt{\pi/\alpha} (1 + o(1))$, $\alpha \rightarrow 0$.

Основными результатами главы II являются следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть аналитическая в \mathbb{C}_+ хребтовая функция $\varphi(z)$ порядка $\rho < \infty$ не имеет нулей в угле $\{z : |\arg z - \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда

$$\rho \leq \begin{cases} \gamma(\alpha), & 0 < \alpha \leq \pi/6; \\ 3 = \gamma(\pi/6), & \pi/6 < \alpha \leq \pi/2. \end{cases}$$

При любом α , $0 < \alpha \leq \pi/2$ оценка на ρ является неулучшаемой.

При $\alpha = \pi/2$ эта теорема была доказана И.П.Камминим ^{*}.

Теорема 4. Пусть целая хребтовая функция $\varphi(z)$ порядка $\rho < \infty$ не имеет нулей в угловой области $\{z: |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z: |\arg z + \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда

$$\rho \leq \begin{cases} \gamma(\alpha), & 0 < \alpha \leq \pi/6; \\ \pi/(2\alpha), & \pi/6 < \alpha \leq \pi/4; \\ 2, & \pi/4 < \alpha \leq \pi/2. \end{cases}$$

При любом α , $0 < \alpha \leq \pi/2$, оценка на ρ является неулучшаемой.

При $\alpha = \pi/2$ эта теорема была доказана А.А.Гольдбергом и И.В.Островским ^{**}.

* Камминин И.П. Обобщение теоремы Марцинкевича о целых характеристических функциях вероятностных распределений // Записки научных семинаров ЛОМИ. - 85. - 1979. - с. 94 - 108.

** Гольдберг А.А., Островский И.В. О росте целых хребтовых функций с действительными нулями // Труды ФТИНТ АН УССР, Математическая физика, функциональный анализ. - вып. 5. - 1974. - с. 3 - 10

Результаты главы II были одновременно независимо получены А.Е.Фринтовым* с помощью другого метода.

Теоремы 3 и 4 можно рассматривать как обобщения следующей теоремы Марцинкевича** , имеющей многочисленные применения в теории вероятностей и математической статистике (см., например, монографию А.Н.Каган, Ю.В.Линник, С.Р.Рао "Характеризационные задачи математической статистики"): если целая характеристическая функция $\varphi(z)$ порядка $\rho < \infty$ не имеет нулей, то она является характеристической функцией распределения Гаусса (и, следовательно, $\rho \leq 2$).

Следующая теорема, которую тоже можно рассматривать как обобщение теоремы Марцинкевича, является основным результатом главы III.

Теорема 5. Пусть $\varphi(z)$ - целая хребтовая функция конечного порядка $\rho \neq 1, 2$, все нули которой лежат в области $\{z: |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z: |\arg z + \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда

$$\alpha \geq \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{если } \sin \frac{\rho\pi}{2} > 0; \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{arctg} \left[\frac{1 + \sin^{\rho-1} \frac{\pi}{2(\rho-1)} \cos \frac{\rho\pi}{2}}{\sin^{\rho-1} \frac{\pi}{2(\rho-1)} (-\sin \frac{\rho\pi}{2})} \right] & \text{если } \sin \frac{\rho\pi}{2} < 0. \end{cases}$$

* Фринтов А.Е. Об одном свойстве конуса, порожденного мультипликативными сдвигами субгармонической хребтовой функции // Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Сборн. научн. трудов ФТИИТ АН УССР. - 1990. - с. 33 - 40
 ** Macinkiewicz J. Sur une propriété de la loi de Gauss // Math. Zeitschr. - Band. 44. - 1938. - s 612-618.

При любом $p \neq 1, 2$ оценка на α является неулучшаемой.

В главе IV основным результатом является следующая теорема.

Теорема 6. Обозначим через S класс целых функций, допускающих в \mathbb{C} представление абсолютно сходящимся интегралом

$$\varphi(z) = \int_0^{+\infty} e^{ixz} Q(dx),$$

где Q - вещественная мера, неотрицательная на некоторой полуоси $[\hat{x}, \infty)$ (Q и \hat{x} зависят от функции φ).

Для того, чтобы множество $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ являлось нулевым множеством некоторой целой функции класса S необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1) $a \in A \Rightarrow (-\bar{a}) \in A$;
- 2) существует $y_0 \in \mathbb{R}$, такое что

$$A \cap \{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < y_0\} = \emptyset;$$

- 3) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k > \lambda} \frac{|\operatorname{Im} a_k| + 1}{|a_k|^2 + 1} < \infty.$$

Класс S^* является расширением класса целых характери-

стических функций, ограниченных в верхней полуплоскости. Проблема описания нулевых множеств таких характеристических функций не решена в настоящее время (И.В.Островским описаны конечные нулевые множества). Теорему 6 можно рассматривать как продвижение в решении этой проблемы. Следующие два результата являются аналогами для целых функций классической теоремы Бляшке, дающей описание нулевых множеств функций, аналитических и ограниченных в полуплоскости.

Теорема 7. Пусть A — множество, лежащее в верхней полуплоскости. Для того, чтобы A являлось нулевым множеством некоторой целой функции, ограниченной в верхней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы A не имело конечных предельных точек и, кроме того, удовлетворяло условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} a_k}{1 + |a_k|^2} < \infty.$$

Теорема 8. Пусть $A \subset \mathbb{C}$. Для того, чтобы A являлось нулевым множеством для некоторой целой функции, ограниченной в любой полуплоскости вида $\{z: \operatorname{Im} z > h\}$, $h \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $h \geq 0$ выполнялось условие

$$\sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k > h} \frac{|\operatorname{Im} a_k| + 1}{|a_k|^2 + 1} < \infty.$$

Разумеется, теоремы 7 и 8 в сторону необходимости являются непосредственными следствиями теоремы Бляшке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишнякова А.М., Островский И.В. Аналог теоремы Марцинкевича для целых хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Доклады АН УССР, сер. А.- № 9.- 1987.- с. 8 - 11.
2. Вишнякова А.М. О росте хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // В об. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Сб. научных трудов ФТИНТ АН УССР.- Киев: Наукова думка, 1990.- с. 40 - 48.
3. Вишнякова А.М., Островский И.В., Улановский А.М. Об одной гипотезе П.В.Линника // Алгебра и анализ.- № 4.- 1990.- с. 82 - 90.
4. Вишнякова А.М. О росте функций, хребтовых в полуплоскости // В об. Теория операторов, субгармонические функции. Сб. научных трудов ФТИНТ АН УССР.- Киев: Наукова думка, 1991.- с. 24 - 30.
5. Вишнякова А.М. Рост целых хребтовых функций с ограничениями на аргументы нулей // Украинский матем. журнал.- 43, № 8.- 1991.- с. 727 - 734.

Ответственный за выпуск *В.Т. Жаирова*

Подп. к печ. 13.04.98 Формат 60×84¹/₁₆. Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 40.
Уч.-изд. л. 60 Тираж 10 экз. Зак. № 435 Бесплатно.

Харьковское междузовское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115

AB 27.275

AB 27.275